MATHEMATIK

FÜR HÖHERE TECHNISCHE LEHRANSTALTEN

Band 4

von

Heinz-Christian SCHALK, Gerald F. STEINER

und

Andreas BOLHAR-NORDENKAMPF,
Manfred GURTNER-WÜRL, Adnan IBICH, Peter KONSTANTINIUK,
Andreas PLIHAL, Gerhard SPITZER, Johann WEILHARTER

unter Mitarbeit der
Verlagsredaktion Mathematik



RENIETS VERLAG

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage der Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten (= „Rahmenlehrpläne“, d. h. die Auswahl und die Gewichtung der Inhalte erfolgt durch die Lehrkräfte), BGBl. II Nr. 302/1997 in der Fassung der Verordnung BGBl. II Nr. 382/1998, erstellt und mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur vom 13. November 2000, GZ 41.773/1-III/D/13/99, als für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den IV. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Es wurde weiters vom Bundesministerium für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten als für den Unterrichtsgebrauch an folgenden Schularten im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik geeignet erklärt:

– Höhere land- und forstwirtschaftliche Lehranstalten, Fachrichtung Landtechnik und Forstwirtschaft, für den IV. Jahrgang

Mit freundlicher Genehmigung des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur (früher: Bundesministerium für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten bzw. Bundesministerium für Unterricht und Kunst bzw. Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Sport) wurden Inhalte aus der zweiten Experimentalfassung der Lehrzielbank für das berufsbildende Schulwesen (Mathematik für berufsbildende mittlere und höhere Schulen) entnommen.

Mit freundlicher Genehmigung der Texas Instruments Incorporated wurden Abbildungen und Texte aus dem TI-92 MINI HANDBUCH sowie aus dem TI-92 HANDBUCH entnommen. Für die diesen Werken entnommenen Teile gilt: Copyright © 1995 Texas Instruments Incorporated. Autoren und Verlag danken der Texas Instruments Incorporated für die gute Zusammenarbeit.



Dieses Schulbuch wurde entsprechend der Neuregelung der deutschen Rechtschreibung bearbeitet. Ausgenommen sind Texte, bei denen urheberrechtliche Gründe einer Bearbeitung entgegen stehen.

Bildquellennachweis:

1 — Samuel B. Moore
52 — Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek (ÖNB) Wien
58 — Universitäts-Bibliothek Basel
61 — Bildarchiv der ÖNB Wien
87 — Bildarchiv der ÖNB Wien
102 — Superbike Verlagsgesellschaft m. b. H.
107 — Bildarchiv der ÖNB Wien
110 — Dr. Gerald F. Steiner
111 — Dr. Gerhard Spitzer / Institut für Zoologie
112 — Adam Opel Aktiengesellschaft
116/oben — Österreichische Draukraftwerke Aktiengesellschaft
116/unten — Peter Färbinger
117 — UIP Filmverleih, © MCMLXXXI by United Artists Corporation
118 — Christian Feigl
123/Hauptspalte — RÄTSEL-KURIER
123/Außenspalte — Cray Research. Inc.
125 — Christian Feigl
130/links — Foto Andreas Bolhar-Nordenkampf
130/rechts — Stadtamt Retz
133 — Universitätsbibliothek München
134 — Christian Feigl
135/oben — Erster Präsident des Wiener Landtags
135/unten — Foto KURIER
137 — VOEST-ALPINE STAHL, Werksfoto
147 — Dr. Josef Schreiner
176 — Bildarchiv der ÖNB Wien
177 — Ed & Darcie Elliott, The Camera Shop, Tacoma, Washington
178 — Ed & Darcie Elliott, The Camera Shop, Tacoma, Washington
197 — Ed & Darcie Elliott, The Camear Shop, Tacoma, Washington
207 — Bildarchiv der ÖNB Wien
212 — Universitätsbibliothek München
215 — Deutsches Museum München
216 — Karl Dlouhy OHG
217/Hauptspalte — Österreichische Philips Industrie GmbH
217/Außenspalte — Universitäts-Bibliothek Basel
225 — Deutsches Museum München
236 — Deutsches Museum München
241ff. — mit freundlicher Genehmigung der Texas Instruments Incorporated

Schulbuchvergütung/Bildrechte: © VBK/Wien

An der Zusammenstellung des vorliegenden Bands nach den HTL-Lehrplänen 1997 und 1998 haben Anton BURGER, Adnan IBICH und Monika WATZLAWEK von der Verlagsredaktion Mathematik der RENIETS VERLAG GmbH mitgewirkt.

Einband: IBM Computerkunst, Komposition von Jean-Claude HALGAND (Frankreich)

Autoren und Verlag danken Klaus DEMETZ, Gerhard DIETACHMAYR, Barbara LAGGNER, Hans-Joachim LUTTER, Johanna Elisabeth MALICK-PILZ, Astrid NEUSTIFTER, Manfred RAUSCH, Martin SCHODL, Eva TURNER und Wolfram ULINSKI für die Überlassung von Aufgabenmaterial.

Zu diesem Buch gibt es ein Lösungsheft, das unter der Schulbuchnummer 100086 bzw. ISBN 3-900648-79-4 in Buchhandlungen bestellt bzw. gekauft werden kann (Direkt-Lieferungen vom Verlag an Privatkunden sind nicht vorgesehen!):
SCHALK - STEINER, Mathematik für Höhere technische Lehranstalten, Lösungen zu Band 4

Die in diesem Lehrbuch mit ▭ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Aufgabenteile werden im Lösungsheft vollständig durchgerechnet!

Schulbuch-Nr. 100085
ISBN 3-900648-78-6

1. Auflage 1989
3. Auflage 2001, Nachdruck 2005. Alle Drucke der 3. Auflage sind nebeneinander verwendbar.

WICHTIGER HINWEIS: Nach den Lehrplänen ab 1997 ist nur mehr die 3. Auflage zu verwenden.

Satz, Computergrafik und Druck: ERNST BECVAR GMBH, Wien

INHALTSVERZEICHNIS

LEHRSTOFFÜBERSICHT

Der folgenden Zusammenstellung ist zu entnehmen, in welchen Jahrgängen der Höheren technischen und gewerblichen bzw. Höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten die betreffenden Abschnitte lehrplanmäßig vorgesehen sind. Bei im Lehrplan nicht expressis verbis angeführten Themenbereichen findet sich der Jahrgangshinweis in eckiger Klammer.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Matrizenrechnung	4.	4.	3.	4.	4.	4.	4.	—	—
Lineare analytische Geometrie	4.	4.	3.	4.	—	4.	4.	—	—
Kegelschnitte	4.	4.	3.	4.	—	4.	4.	—	—
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bis Unterabschnitt 3. Mehr über beurteilende Statistik	4.	5.	4.	5.	4.	5.	—	4.	4.
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Unterabschnitt 4. Zusammenhänge zwischen zwei Merkmalen	—	5.	4.	5.	5.	—	—	—	4.
Ausbau der Infinitesimalrechnung bis Unterabschnitt 6. Inhalt einer Drehfläche (Komplanation)	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]
Ausbau der Infinitesimalrechnung Unterabschnitte 7. Schwerpunkt und statische Momente und 8. Trägheitsmomente	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	[4.]	4.	4.
Differenzialgleichungen bis Unterabschnitt 4. Einfache Lösungswege	—	4.	4.	4.	4.	4.	—	4.	4.
Differenzialgleichungen Unterabschnitt 5. Schwingungen	—	4.	4.	—	—	—	—	—	—
Funktionenreihen Unterabschnitt 1. Potenzreihen	—	4.	4.	—	—	—	—	—	—
Funktionenreihen Unterabschnitt 2. FOURIER-Reihen	—	4.	—	—	—	—	—	—	—
Integraltransformationen	—	4.	—	—	—	—	—	—	—
Algebraische Strukturen	—	4.	—	—	—	4.	—	—	—
Moderne Hilfsmittel in der Mathematik: TI-92 und TI-92 Plus	4.	4.-5.	4.	4.-5.	4.-5.	4.-5.	—	[4.]	[4.]

(1) Höhere Lehranstalt für Bautechnik (Anlage 1.1.1)
Höhere Lehranstalt für Innenraumgestaltung und Holztechnik (Anlage 1.1.2)
Höhere Lehranstalt für Werkstoffingenieurwesen (Anlage 1.1.7)
Höhere Lehranstalt für Lebensmitteltechnologie (Anlage 1.2.3)

(2) Höhere Lehranstalt für Elektrotechnik (Anlage 1.1.3)
Höhere Lehranstalt für Elektronik (Anlage 1.1.4)

(3) Höhere Lehranstalt für Maschineningenieurwesen (Anlage 1.1.5)
(Für die Höhere Lehranstalt für Mechatronik (Anlage 1.1.6) ist der Lehrstoff auf den III. bis V. Jahrgang aufzuteilen.)

(4) Höhere Lehranstalt für Chemie (Anlage 1.2.1)
Höhere Lehranstalt für Chemieingenieurwesen (Anlage 1.2.2)
Höhere Lehranstalt für Elektronische Datenverarbeitung und Organisation (Anlage 1.3.1)

(5) Höhere Lehranstalt für Wirtschaftsingenieurwesen (Anlage 1.3.2)

(6) Höhere Lehranstalt für Betriebsmanagement (Anlage 1.3.3, V. Jahrgang nur Ausbildungszweige Produktionstechnik, Marketing und Controlling sowie Textilchemie und Ökologie)

(7) Höhere Lehranstalt für Kunst und Design (Anlage 1.4.1)

(8) Höhere Lehranstalt für Landtechnik (Anlage 1.6)

(9) Höhere Lehranstalt für Forstwirtschaft (Anlage 1.7)

Anlagenverweise beziehen sich auf die Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, BGBl. Nr. 302/1997, sowie auf die Verordnung des Bundesministers für Unterricht, Kunst und Sport über die Lehrpläne für Höhere land- und forstwirtschaftliche Lehranstalten, BGBl. Nr. 491/1988, jeweils in der geltenden Fassung.

MATRIZENRECHNUNG

1. Einführung

In der Praxis treten häufig Zusammenhänge auf, die sich durch eine rechteckige Anordnung von Zahlen beschreiben lassen.

Definition:
Ein rechteckiges Zahlenschema wird in der Mathematik als **Matrix** bezeichnet.

Beispiele für derartige Zusammenhänge:



Kilometertabellen

Jedem von uns gut bekannt sind sogenannte Kilometertabellen. Die Zahlen geben die Entfernungen zwischen den Orten in Kilometer an:

Ort	Bregenz	Innsbruck	Klagenfurt	St. Pölten
Bregenz	0	127	359	446
Innsbruck	127	0	234	333
Klagenfurt	359	234	0	202
St. Pölten	446	333	202	0

Als Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 127 & 359 & 446 \\ 127 & 0 & 234 & 333 \\ 359 & 234 & 0 & 202 \\ 446 & 333 & 202 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Symmetrie bezüglich der Diagonale ist hier einleuchtend.

Warenhaus mit Filialen

Ein Warenhaus, das vier Lagerhäuser und sieben Filialen besitzt, kann die Kosten für den Transport einer Tonne Waren von den Lagerhäusern zu den Filialen wie folgt zusammenfassen:

Filiale/ Lager	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
A	12	6	5	4	1	9	18
B	7	12	9	7	4	8	14
C	4	3	6	2	3	1	3
D	9	17	5	2	9	4	2

Als Matrix:

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 5 & 4 & 1 & 9 & 18 \\ 7 & 12 & 9 & 7 & 4 & 8 & 14 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 17 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

In einem Betrieb mit den Abteilungen A, B und C geben die Abteilungen untereinander Leistungen ab. Die Leistungsverflechtungen kann man gut durch eine Tabelle darstellen.

Als Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 80 & 200 \\ 100 & 0 & 200 \\ 50 & 150 & 0 \end{pmatrix}$$

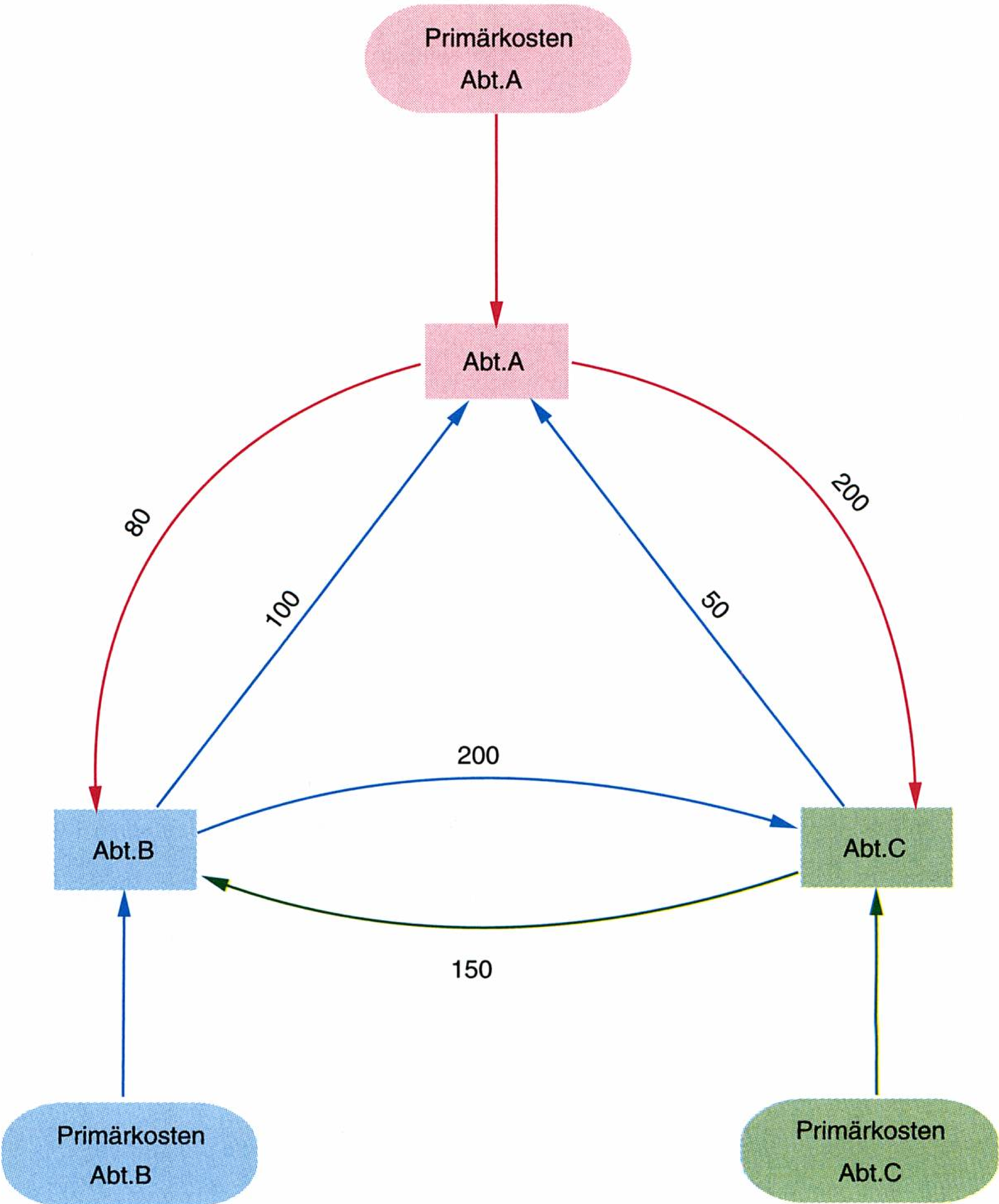
von (Zeile)/ an (Spalte)	A	B	C
A	0	80	200
B	100	0	200
C	50	150	0

Das bedeutet: A gibt an B 80 Leistungseinheiten. A gibt an C 200 Leistungseinheiten usw.

Dies lässt sich mit Hilfe eines Gozintographen darstellen:

Ein **Gozintograph** ist die grafische Darstellung einer Tabelle von Leistungsverflechtungen.

Das Wort „Gozintograph" kommt von „it goes into" (engl.).



Verallgemeinerung:

In allen Arten von Tabellen handelt es sich für den Mathematiker um rechteckige Zahlenanordnungen, von denen man noch wissen muss, dass sie zusammengehören.

Charakterisiert man die Zusammengehörigkeit der rechteckigen Anordnung von Zahlen dadurch, dass man sie in Klammern setzt, so spricht man von einer **Matrix**.

Das Gebilde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt **Matrix mit m Zeilen und n Spalten (m · n - Matrix)**.

Die Zahlen a_{ij} heißen **Elemente der Matrix.**

Vektoren

Matrizen, die entweder nur aus einer Spalte oder nur aus einer Zeile bestehen, werden auch **Vektoren** genannt.[1)]

Eine Matrix, die aus einer einzigen Spalte besteht, heißt **Spaltenvektor**.

Ein Spaltenvektor: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Eine Matrix, die aus einer einzigen Zeile besteht, heißt **Zeilenvektor**.

Ein Zeilenvektor: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Beispiele für Vektoren:

Mengenvektor

Eine Unternehmung, die 6 Güter herstellt, kann die in einem Monat produzierten Mengen der Güter als Vektor beschreiben.

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_6) = (5, 9, 2, 28, 0, 10)$$

Preisvektor

Außer diesem Mengenvektor gibt es auch einen Preisvektor für die Preise der Güter:

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_6) = (80, 50, 90, 10, 200, 70)$$

---

1) Im Abschnitt **„Matrizenrechnung"** wird hinsichtlich der Vektoren nur auf die sowohl für Matrizen als auch für Vektoren geltenden Rechenregeln eingegangen. Die Bedeutung von Vektoren in der analytischen Geometrie und in der Physik wird in einem eigenen Abschnitt behandelt.

Wir wollen nun anhand von Beispielen einige Eigenschaften von Matrizen besprechen:

Beispiele für quadratische Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$	Eine Matrix, bei der die Zeilenanzahl gleich der Spaltenanzahl ist, heißt **quadratische Matrix**.
Beispiele für Nullmatrizen: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Eine Matrix, in der alle Elemente null sind, nennt man **Nullmatrix**.
Beispiele für gleichartige Matrizen: $R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} x & a & b & y \\ v & r & s & t \end{pmatrix}$	Zwei Matrizen sind genau dann **gleichartig**, wenn sie in Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.
Beispiele für gleiche Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A = B$ $C = D$	Zwei Matrizen sind genau dann **gleich**, wenn sie gleichartig sind und in den entsprechenden Elementen übereinstimmen.
Beispiele für transponierte Matrizen (Aus einer $m \cdot n$-Matrix wird eine $n \cdot m$-Matrix!): $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	Zwei Matrizen sind genau dann zueinander **transponiert** (oder **gespiegelt**), wenn jeweils eine Matrix dadurch entsteht, dass bei einer anderen Matrix die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden.
Beispiele für Einheitsmatrizen: $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente, die auf der Hauptdiagonale liegen, 1 sind (und alle übrigen Elemente 0 sind!), bezeichnet man als **Einheitsmatrix E**.

2. Addition und Subtraktion von Matrizen

Für Matrizen sind verschiedene Rechenoperationen definiert, man kann sie z. B. addieren.

Beispiel:

Ein Betrieb produziert die Güter I, II und III und liefert diese an die Händler A, B, C und D. Im ersten bzw. zweiten Halbjahr eines Jahres wurden folgende Mengen abgegeben:

1. Halbjahr: $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 20 \\ 7 & 5 & 20 & 10 \\ 14 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

2. Halbjahr: $\begin{pmatrix} 13 & 12 & 5 & 10 \\ 13 & 7 & 6 & 20 \\ 12 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix}$

Man bestimme die Gesamtmengen für das gesamte Jahr.

Bemerkung: Die Zeilen bestimmen die Produkte, die Spalten bestimmen die Händler.

Lösung:

Die von den einzelnen Produkten an die einzelnen Händler in diesem Jahr insgesamt abgegebenen Mengen erhält man, indem man die jeweils an gleicher Stelle stehenden Elemente addiert.

Ganzes Jahr: $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 20 \\ 7 & 5 & 20 & 10 \\ 14 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 12 & 5 & 10 \\ 13 & 7 & 6 & 20 \\ 12 & 8 & 7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+13 & 8+12 & 0+5 & 20+10 \\ 7+13 & 5+7 & 20+8 & 10+20 \\ 14+12 & 4+8 & 6+7 & 15+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{20} & \mathbf{5} & \mathbf{30} \\ \mathbf{20} & \mathbf{12} & \mathbf{28} & \mathbf{30} \\ \mathbf{26} & \mathbf{12} & \mathbf{13} & \mathbf{30} \end{pmatrix}$

Die Mengenangaben lassen sich also besonders übersichtlich als Matrizen darstellen. Die Bestimmung der Gesamtmengen für das ganze Jahr entspricht der **Matrizenaddition**.

Zwei gleichartige Matrizen (und nur solche) werden addiert, indem man die in den Matrizen an gleicher Stelle stehenden Elemente addiert.

Da Vektoren Spezialfälle von Matrizen sind, ist auch die Addition von Vektoren erklärt.

Beispiel:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{10} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$

Eigenschaften der Matrizenaddition:

Kommutativgesetz:	Assoziativgesetz:
$A + B = B + A$	$(A + B) + C = A + (B + C)$

Die **Matrizensubtraktion** lässt sich wie in der gewöhnlichen Algebra als Umkehrung der Addition erklären.

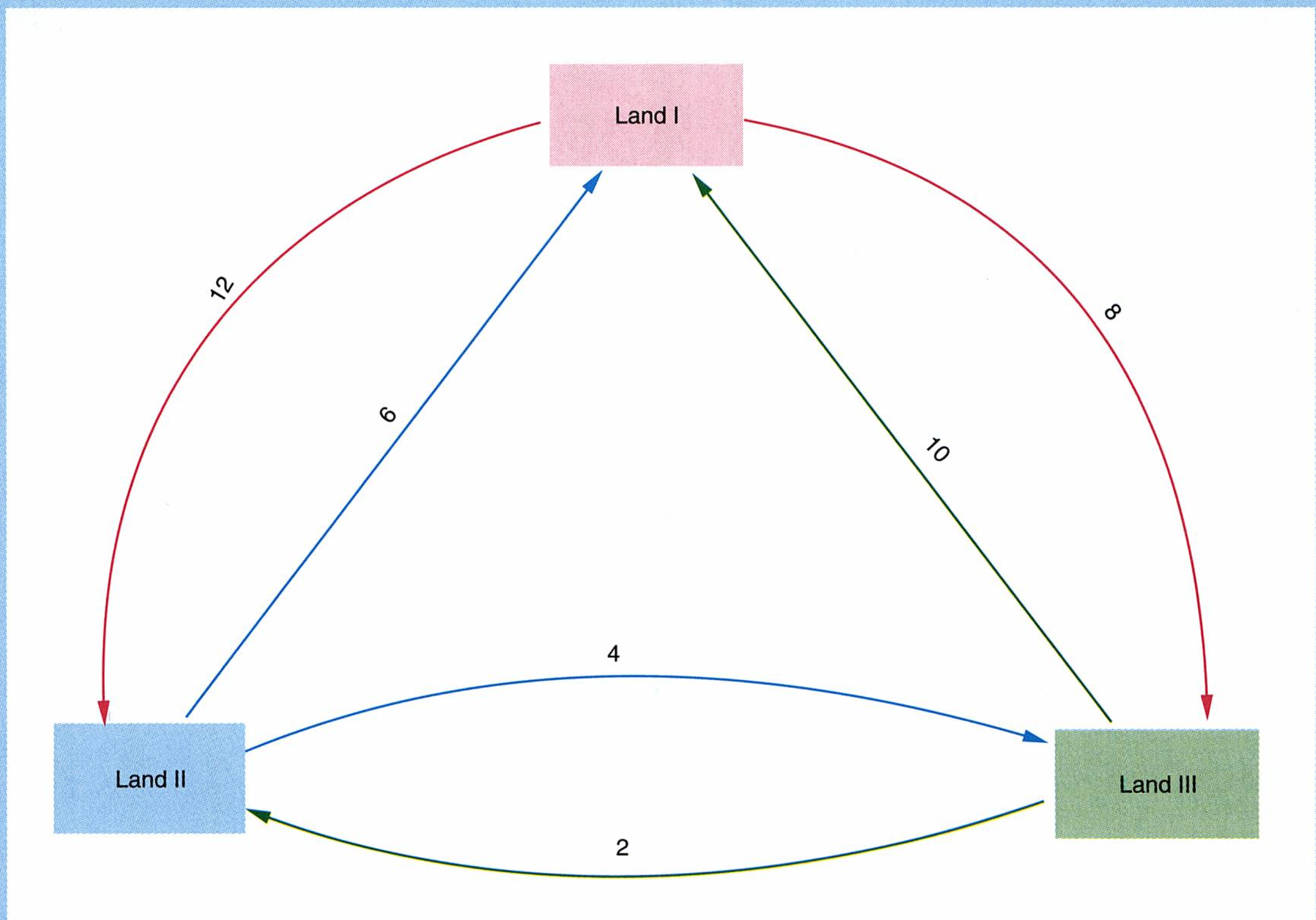
3. Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Beispiel:

Die Außenhandelsbeziehungen zwischen drei Ländern I, II and III sind durch eine Matrix gegeben (Exporte in den Zeilen, Importe in den Spalten):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Grafische Darstellung:



Die Zahlen geben den Wert in Milliarden US-Dollar an. Man bestimme die Werte in Euro.

Lösung:

Will man die Werte in Euro haben und beträgt der Kurs beispielsweise 1 US-Dollar = 0,75 Euro, so erhält man die Eurowerte, indem man jede Zahl mit 0,75 multipliziert:

$$A \cdot 0{,}75 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0{,}75 & 12 \cdot 0{,}75 & 8 \cdot 0{,}75 \\ 6 \cdot 0{,}75 & 0 \cdot 0{,}75 & 4 \cdot 0{,}75 \\ 10 \cdot 0{,}75 & 2 \cdot 0{,}75 & 0 \cdot 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4{,}5} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7{,}5} & \mathbf{1{,}5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix wird mit einer Zahl (einem Skalar) multipliziert, indem man jedes Element dieser Matrix mit dieser Zahl multipliziert. Diese Regel gilt auch für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar.

4. Skalares Produkt von Vektoren

Beispiel:

Ein Möbelhändler aus dem Lungau mit gediegenen Produkten in massiver Ausführung verkauft an einem schönen Vormittag 6 Stühle, 3 Tische und 10 Kästen.

Das mengenmäßige Verkaufsergebnis kann als Zeilenvektor dargestellt werden.

$$\vec{x}^T = (x_1, x_2, x_3) = (6, 3, 10)$$

Die Preise dieser Möbel in Euro können als Spaltenvektor aufgefasst werden.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 800 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Der Umsatz des Möbelhändlers ist zu berechnen!

Lösung:

Umsatz = Menge × Preis, d. h. $U = \vec{x}^T \cdot \vec{p} = (6, 3, 10) \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 800 \\ 3000 \end{pmatrix} = 6 \cdot 300 + 3 \cdot 800 + 10 \cdot 3000 = \mathbf{34\,200}$

Der Umsatz des Möbelhändlers beträgt 34 200,– Euro.

Es werden also, wenn man von den Vektoren ausgeht, die beiden ersten Komponenten, die beiden zweiten Komponenten und die beiden dritten Komponenten der Vektoren miteinander multipliziert und diese Produkte werden dann addiert.

Skalares Produkt von Vektoren:

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Man beachte:

Für die Bildung des skalaren Produkts

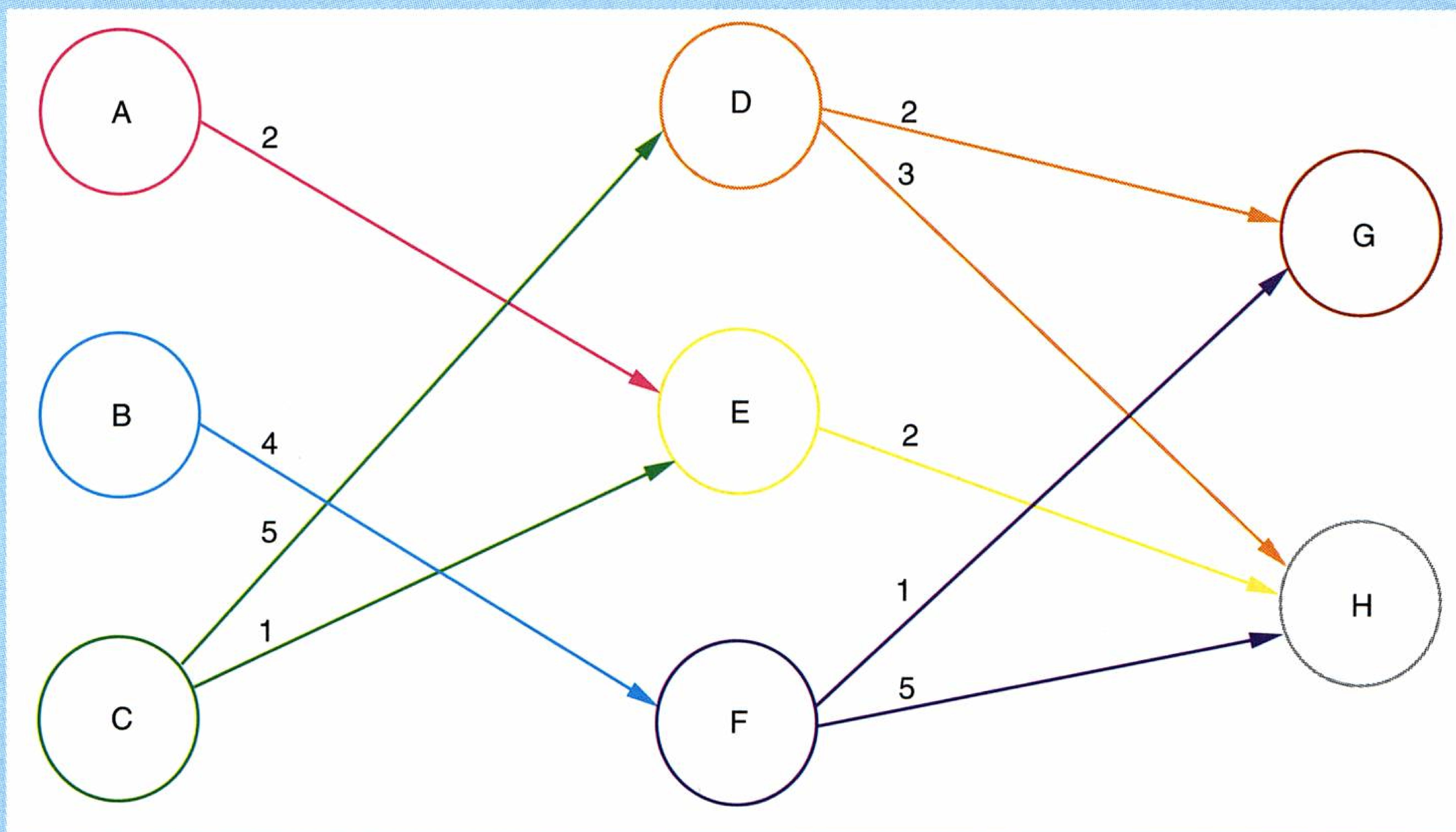
1. muss der Zeilenvektor $\vec{a}^T$ an erster Stelle stehen,
2. müssen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleichartig sein.

Bemerkung: An dieser Stelle soll nur die Berechnung des skalaren Produkts gezeigt werden. Auf die Bedeutung des skalaren Produkts in der analytischen Geometrie und in der Physik wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

5. Multiplikation von Matrizen

Beispiel:

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus 3 Rohstoffen A, B, C zunächst die Zwischenprodukte D, E, F und aus diesen die Endprodukte G und H hergestellt. Die Zusammenhänge sind der folgenden Grafik zu entnehmen.



Man berechne die Mengen der Endprodukte, wenn a Tonnen vom Rohstoff A, b Tonnen vom Rohstoff B und c Tonnen vom Rohstoff C eingesetzt werden.

Lösung:

Die Zusammenhänge aus der Grafik können als Matrizen formuliert werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}=0 & a_{12}=2 & a_{13}=0 \\ a_{21}=0 & a_{22}=0 & a_{23}=4 \\ a_{31}=5 & a_{32}=1 & a_{33}=0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_{11}=2 & b_{12}=3 \\ b_{21}=0 & b_{22}=2 \\ b_{31}=1 & b_{31}=5 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$d = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 5 \cdot c = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$e = 2 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f = 0 \cdot a + 4 \cdot b + 0 \cdot c = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g = 2 \cdot d + 0 \cdot e + 1 \cdot f = (d, e, f) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h = 3 \cdot d + 2 \cdot e + 5 \cdot f = (d, e, f) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Mengen der Endprodukte hängen natürlich vom Einsatz der Rohstoffmengen a, b und c ab. Den Zusammenhang erhält man, indem man in die Gleichungen für g und h die oben gegebenen Beziehung für d, e und f in Abhängigkeit von a, b und c einsetzt.

$$g = 2 \cdot d + 0 \cdot e + 1 \cdot f = 2 \cdot (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (a, b, c) \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = (a, b, c) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

In ähnlicher Weise erhält man $h = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

Daher gibt es zwischen den Rohstoffen und den Endprodukten den folgenden Zusammenhang:

Rohstoff/Endprodukt	G	H
A	0	4
B	4	20
C	10	17

Als Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 20 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix kann man auch direkt berechnen:

Hat man zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, wobei A den Zusammenhang zwischen den Rohstoffen und den Zwischenprodukten, B den Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten darstellt, so erhält man für den Zusammenhang zwischen den Rohstoffen und den Endprodukten:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

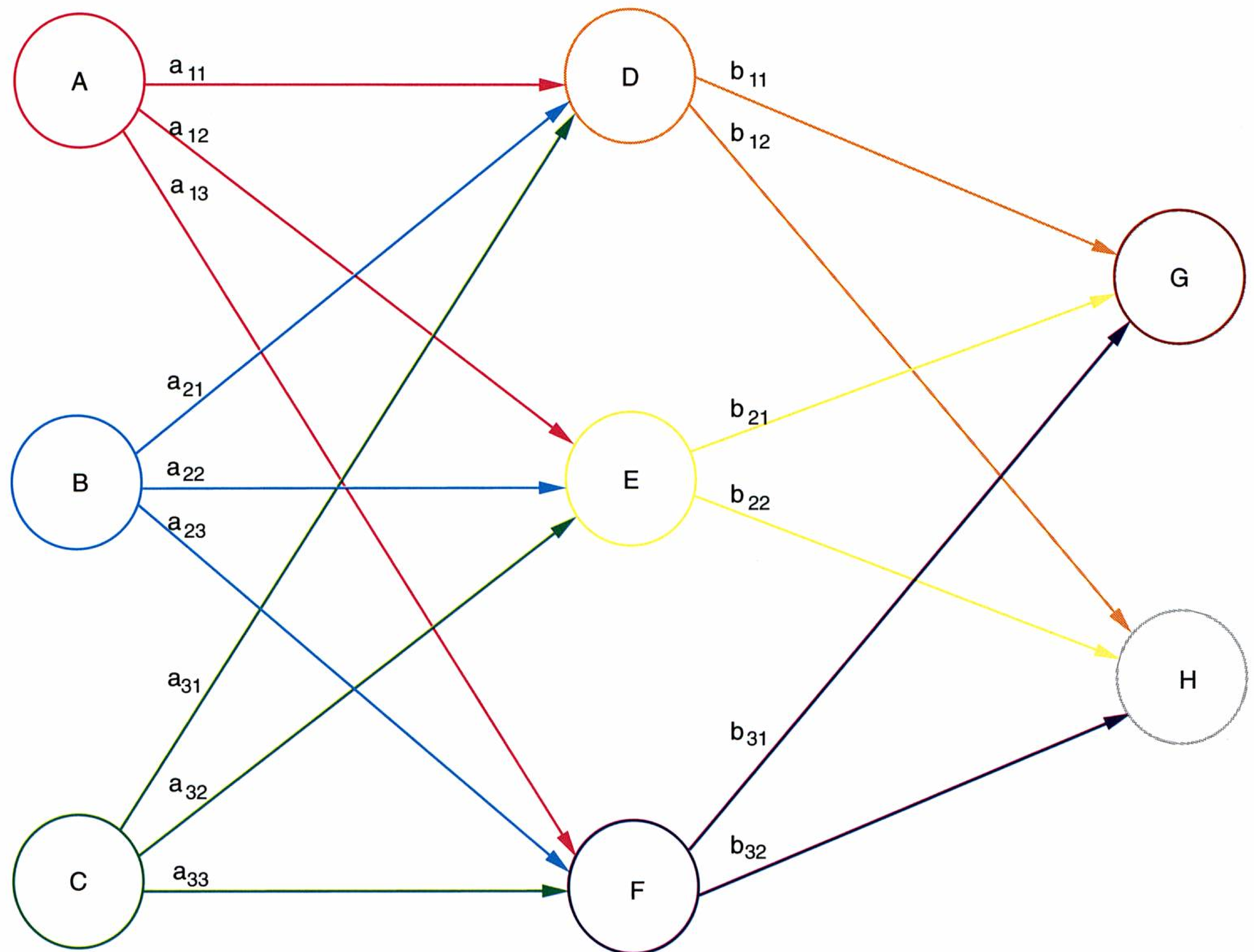
Bemerkung: Die Multiplikation von Matrizen ist nur für den Fall erklärt, dass die Spaltenzahl des ersten Faktors mit der Zeilenzahl des zweiten Faktors übereinstimmt. Das Ergebnis ist eine Matrix, die so viele Zeilen hat wie der erste Faktor und so viele Spalten wie der zweite Faktor.

Die Elemente dieser Matrix sind also die skalaren Produkte der Zeilen von A mit den Spalten von B.

Damit haben wir das **Produkt einer Matrix A mit einer anderen Matrix B** erklärt.

Wir führen noch den rechnerischen Nachweis.

Zunächst erstellen wir eine den Matrizen entsprechende Grafik:



Daraus lassen sich die folgenden Gleichungen ableiten:

$$g = b_{11} \cdot d + b_{21} \cdot e + b_{31} \cdot f$$
$$h = b_{12} \cdot d + b_{22} \cdot e + b_{32} \cdot f$$

$$d = a_{11} \cdot a + a_{21} \cdot b + a_{31} \cdot c$$
$$e = a_{12} \cdot a + a_{22} \cdot b + a_{32} \cdot c$$
$$f = a_{13} \cdot a + a_{23} \cdot b + a_{33} \cdot c$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} g &= b_{11} \cdot (a_{11} \cdot a + a_{21} \cdot b + a_{31} \cdot c) + b_{21} \cdot (a_{12} \cdot a + a_{22} \cdot b + a_{32} \cdot c) + \\ &\quad + b_{31} \cdot (a_{13} \cdot a + a_{23} \cdot b + a_{33} \cdot c) = \\ &= (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}) \cdot a + (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31}) \cdot b + \\ &\quad + (a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31}) \cdot c = \\ &= (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für h ist die analoge Rechnung notwendig.

Einige Eigenschaften der Matrizenmultiplikation:

Kommutativgesetz: $A \cdot B \neq B \cdot A$	Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen **nicht kommutativ.**
Assoziativgesetz: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	**Distributivgesetz:** $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$	Eine **Art Kommutativgesetz:** Die Transponierte eines Produkts zweier Matrizen ist gleich dem Produkt der Transponierten der beiden Matrizen in umgekehrter Reihenfolge.
Existenz des Nullelements: Durch Multiplikation einer Matrix mit einer Nullmatrix geeigneter Ordnung erhält man eine Nullmatrix.	**Bemerkung:** Es gibt noch andere Matrizen mit dieser Eigenschaft, z. B.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
Existenz eines neutralen Elements: $A \cdot E = A$	Durch Multiplikation einer Matrix mit einer Einheitsmatrix geeigneter Ordnung bleibt die Matrix **unverändert.**

6. Die inverse Matrix

Wenn eine Matrix mit ihrer inversen Matrix multipliziert wird, so erhält man die **Einheitsmatrix**: $A \cdot A^{-1} = E$

Beispiel:

Man berechne die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aus dem Ansatz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich durch Matrizenmultiplikation und Vergleich der Elemente folgende Gleichungen:

(1) $a_{11} + 2\,a_{21} = 1$
(2) $a_{12} + 2\,a_{22} = 0$
(3) $3\,a_{11} + 4\,a_{21} = 0$
(4) $\underline{3\,a_{12} + 4\,a_{22} = 1}$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen **$a_{11} = -2$ $a_{12} = 1$ $a_{21} = 1{,}5$ $a_{22} = -0{,}5$**

Das heißt, die inverse Matrix ist $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

AUFGABEN

1. Kilometertabelle

Ort	A	B	C	D
A	0	12	24	6
B	12	0	5	29
C	24	5	0	36
D	6	29	36	0

a) Wie viele Kilometer beträgt die Fahrstrecke von C nach D?

b) Was bedeutet $a_{42} = 29$?

c) Was bedeutet $a_{43} + a_{31}$?

2. Produktionsproblem

In drei Fabriken (F1, F2, F3) werden drei Erzeugnisse (E1, E2, E3) hergestellt:

Erzeugnis/Fabrik	E1	E2	E3
F1	240	350	420
F2	200	220	190
F3	340	270	250

a) Was bedeutet $a_{11} + a_{12} + a_{13} = ?$

b) Was bedeutet $a_{11} + a_{21} + a_{31} = ?$

3. Belieferung der Filialen einer Großhandelskette

(Die Tabelle gibt die Kosten für den Transport einer Tonne an.)

Filiale/Lager	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
A	12	6	5	4	1	9	18
B	7	12	9	7	4	8	14
C	4	3	6	2	3	1	3
D	9	17	5	2	9	4	2

a) Die Filiale F1 bezieht von den vier Lagern folgende Warenmengen: 3 t aus Lager A, 4 t aus Lager B, 1 t aus Lager C, 2 t aus Lager D. Wie hoch sind die zugehörigen Transportkosten?

b) Man bestimme $\max(a_{ij})$![1] Was bedeutet das praktisch?

c) Man bestimme $\min(a_{ij})$![1] Was bedeutet das praktisch?

Anleitung: $\max\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4$, $\min\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$.

[1]) a_{ij} = Element einer Matrix a mit i Zeilen und j Spalten.

4. Innerbetriebliche Leistungsverrechnung

Stellen Sie die folgende Tabelle in einem Gozintographen dar!

von (Zeile) / an (Spalte)	A	B	C
A	0	20	30
B	30	0	40
C	10	20	0

5. Welche der nachstehenden Matrizen (1) bis (8) sind **a)** zueinander gleichartig **b)** einander gleich **c)** Nullmatrizen **d)** quadratische Matrizen **e)** Einheitsmatrizen **f)** zueinander transponierte Matrizen?

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$ (4) $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

(5) $E = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ (6) $F = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ (7) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Man bestimme in $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 9 & -6 \\ -2 & 5 & 2 & -8 & 5 \\ -1 & -3 & -3 & 7 & -8 \\ 2 & 5 & 2 & 8 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ **a)** die Elemente a_{51}, a_{43}, a_{34} **b)** die Summen $\sum_{i=1}^{5} a_{i2}$ und $\sum_{j=1}^{5} a_{2j}$.

7. Die Matrix $B = (b_{ij})$ sei wie folgt definiert: $b_{ij} = i + j - 1$

Man bestimme **a)** B_{34} [1] **b)** die Summen $\sum_{i=1}^{3} b_{ij}$, $j = 1, 2, 3, 4$ **c)** die Summen $\sum_{j=1}^{4} b_{ij}$, $i = 1, 2, 3$ **d)** die Summe $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} b_{ij}$ **e)** die Matrix B_{34}^T.

8. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie (1) $A + B$ (2) $A - B$ (3) $B - A$ (4) $A + C$

b) Bestimmen Sie die Matrizen (X) so, dass die folgenden Gleichungen erfüllt werden:
(1) $A + B - X = 0$ (2) $A - B + X = 0$ (3) $A + B + X = E$ (4) $A - B + X = E$

9. Gesamtverbrauch im Ersatzteillager

Eine Unternehmung besitzt drei Teilelager, in denen jeweils drei Artikel lagern. Die zwei aufeinander folgenden Monaten entsprechenden Verbrauchsmengen sind durch folgende Matrizen gegeben:

1. Monat $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 2. Monat $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Man bestimme den Gesamtverbrauch in den beiden Monaten!

Bemerkung: Die Spalten geben die Teilelager an, die Zeilen die Artikel!

---

[1]) Matrix B mit 3 Zeilen und 4 Spalten.

10. Die Umsätze eines Lungauer Tischlereibetriebes sind in der nachstehenden Tabelle ausgewiesen:

Monat	JAN	FEB	MÄR	APR	MAI	JUN	JUL	AUG	SEP	OKT	NOV	DEZ
Tische	10	12	13	23	14	43	0	5	23	9	23	65
Sessel	40	23	23	120	23	200	0	35	12	8	12	45
Bänke	3	8	4	2	6	23	0	10	6	7	34	23

Man bestimme **a)** die Spaltenvektoren der monatlichen Umsätze **b)** die Umsätze der Quartale **c)** die Umsätze der Halbjahre **d)** die Gesamtumsätze.

11. Gegeben seien die Matrizen aus Aufgabe **5**.

Man bestimme **a)** $A+B$ **b)** $G+H$ **c)** $C+D+E+F$ **d)** $A-B$ **e)** $E-F$ **f)** $G-H$ **g)** $C+D-E$ **h)** $C-D+F$.

12. Gegeben seien die Matrizen $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$.

Man bestimme **a)** $3\cdot A$ **b)** $4\cdot B$ **c)** $5\cdot C$ **d)** $3\cdot A-2\cdot B+4\cdot C$ **e)** $7\cdot A+4\cdot B-2\cdot C$ **f)** $5\cdot A-2\cdot B$ **g)** $3\cdot A-2\cdot B+C$ **h)** $A-10\cdot B-3\cdot C$.

13. Gegeben seien die Matrizen aus Aufgabe **5**.

Man bestimme **a)** $2\cdot A+4\cdot B$ **b)** $2\cdot G+10\cdot H$ **c)** $C+2\cdot D+3\cdot E+4\cdot F$ **d)** $30\cdot A-20\cdot B$ **e)** $7\cdot C+4\cdot D-2\cdot E$.

14. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$.

Man bestimme s und t so, dass $\vec{a}+s\cdot\vec{b}+t\cdot\vec{c}=0$.

15. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}^T=(1,2,1)$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{d}^T=(1,-2,10)$.

Man bestimme **a)** $\vec{a}^T\cdot\vec{b}$ **b)** $\vec{b}^T\cdot\vec{c}$ **c)** $\vec{c}^T\cdot\vec{a}$ **d)** $\vec{a}^T\cdot\vec{c}$.

16. Umsatz der einzelnen Filialen

Der Lungauer Möbelhändler „Astrein" hat vier Filialen, in denen jeweils Tische, Sessel und Kästen verkauft werden. Die verkauften Stückzahlen (der Absatz) im Jahr 2004 sind durch die Vektoren

$\vec{a}=\begin{pmatrix}120\\ 234\\ 38\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}20\\ 264\\ 39\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}220\\ 34\\ 68\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}123\\ 23\\ 383\end{pmatrix}$ gegeben.

Die Preise in Euro sind gegeben durch $\vec{p}=\begin{pmatrix}300\\ 120\\ 800\end{pmatrix}$.

Die Angaben in der ersten Zeile beziehen sich auf Tische, in der zweiten auf Sessel, in der dritten auf Kästen.

Man bestimme **a)** den gesamten Absatz des Möbelhändlers **b)** den Umsatz der Filialen.

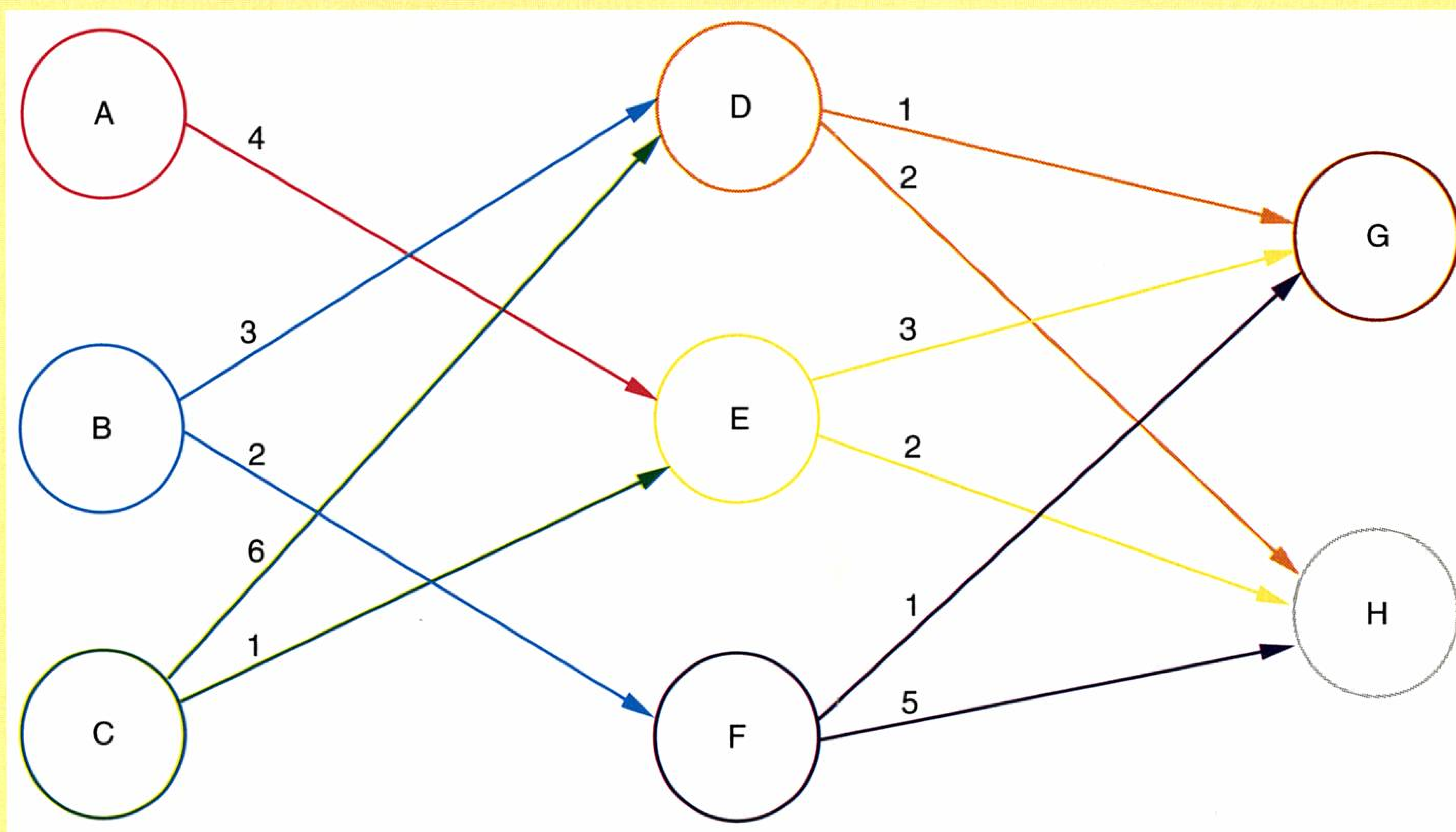
17. Gegeben seien die Matrizen $A=\begin{pmatrix}4&1\\2&5\\6&0\\2&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&3&4\\2&4&2\end{pmatrix}$.

Man bestimme **a)** $A\cdot B$ **b)** $C\cdot D$ **c)** $A\cdot C$ **d)** $B\cdot D$.

18. Die Input-Output-Matrizen eines Raffinerieprozesses sind $A=\begin{pmatrix}0{,}5&0{,}2\\0{,}4&0{,}3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}4&0{,}2\\0{,}2&0{,}3&0{,}4\end{pmatrix}$.

Man bestimme den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Endprodukten!

19. Die Beziehungen in einem zweistufigen Produktionsprozess sind:



a) Man bestimme den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Endprodukten!

b) Welche Mengen der Rohstoffe müssen bereit gestellt werden, damit von G 200 Einheiten und von H 100 Einheiten geliefert werden können?

20. Man zeige die Gültigkeit der Distributivgesetze an den folgenden Beispielen:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\5&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}10&2\\3&-2\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&1\\2&3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&5&1\\-1&0&1\\2&3&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&2&1\\-1&2&1\\-2&3&4\end{pmatrix}$

21. Grafische Deutung der Matrizenmultiplikation:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$$

a) Man erstelle ein Pfeildiagramm, welches diesen Zusammenhang grafisch darstellt (vgl. Materialverbrauch).

b) Mit Hilfe des Pfeildiagramms sind Gleichungen zu erstellen, mit denen die Matrizenmultiplikation nachgeprüft werden kann!

22. Man berechne die zu **a)** $A=\begin{pmatrix}10&12\\2&4\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}$ inversen Matrizen mit Hilfe des Gleichungsverfahrens.

Vermischte Aufgaben

23. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

❍ **a)** Das Produkt zweier quadratischer gleichartiger Matrizen A, B ist stets kommutativ, d. h. es gilt: AB = BA.

❍ **b)** Zwei Matrizen A, B sind genau dann gleichartig, wenn gilt A = B.

❍ **c)** $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -5 & 0 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -39 \\ 38 & -15 \end{pmatrix}$

❍ **d)** $AA^{-1} = E$

❍ **e)** $A^{-1}A = E$

❍ **f)** $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$

❍ **g)** Eine quadratische Matrix. bei der alle Elemente 1 sind, bezeichnet man als Einheitsmatrix.

❍ **h)** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}$

$$AB = C \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kj} \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, l$$

24. Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme

a) Man überzeuge sich, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 6y + z &= 9 \\ 3x - 2y + 2z &= 3 \\ -x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

in Matrizenform wie folgt geschrieben werden kann: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Im Hinblick auf **a)** sind die nachstehenden Gleichungssysteme in Matrizenform anzuschreiben:

(1) $\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 14 \\ 5x - 4y - 2z &= 10 \\ 11x - 9y - 7z &= 16 \end{aligned}$

(2) $\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$

(3) $\begin{aligned} x - y &= -1 \\ x + z &= 6 \\ y + z &= 7 \end{aligned}$

25. Matrizen und Determinanten: ein Unterschied?

Welcher Unterschied besteht zwischen den schon früher besprochenen Determinanten und den hier dargelegten Matrizen? Die Antwort ist recht einfach:

Matrizen besitzen keinen Zahlenwert, sie sind nur eine Anordnung von Elementen. Matrizen werden von runden Klammern begrenzt.

Determinanten besitzen einen ganz bestimmten Zahlenwert, wenn ihre Elemente Zahlen sind. Determinanten werden von senkrechten Strichen begrenzt.

Man berechne den Wert der folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

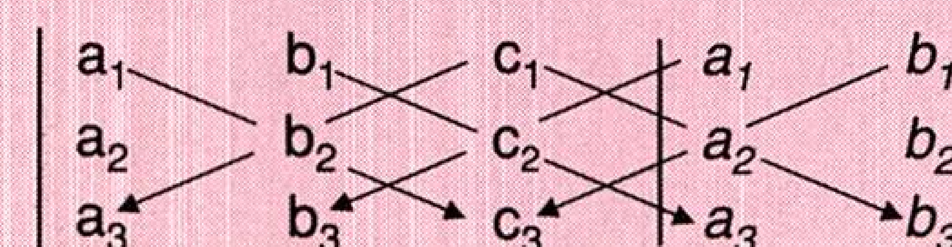
d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 4 & -10 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \\ 8 & -7 & 6 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 3{,}1 & -3{,}8 & -1{,}4 \\ 4{,}5 & 2{,}5 & 0{,}9 \\ 7{,}2 & 0 & -8{,}3 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 3 & 0{,}4 & 0{,}7 \\ -5 & 0{,}3 & 1{,}2 \\ 4 & 7{,}6 & 4 \end{vmatrix}$

Wiederholung wie **„Dreizeilige Determinanten"** berechnet werden.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 b_3 + b_1 c_2 a_1 + $$
$$+ c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

Die obige Zusammenstellung kann man sich durch folgende Schreibweise leichter merken



LINEARE ANALYTISCHE GEOMETRIE

1. Wiederholung der Vektorrechnung

Die vektoriellen Formeln gelten, falls nicht anderes angegeben, sowohl für den zweidimensionalen als auch den dreidimensionalen Raum.

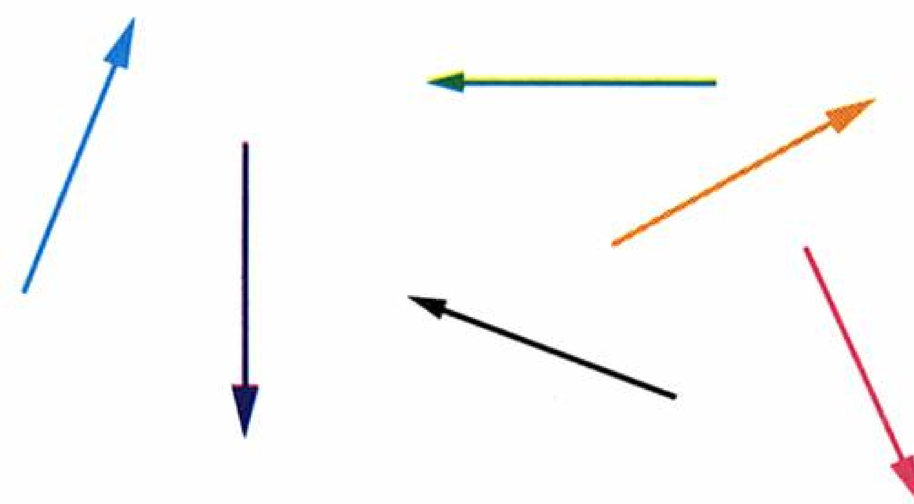
Die Menge aller zu $\overrightarrow{P_1P_2}$ gleich langen, parallelen und gleich orientierten Pfeile bezeichnet man als den zu $\overrightarrow{P_1P_2}$ gehörigen **Vektor** $\vec{v}$ (gesprochen: v Pfeil).

Der Pfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ heißt ein **Repräsentant (Stellvertreter)** des Vektors $\vec{v}$.

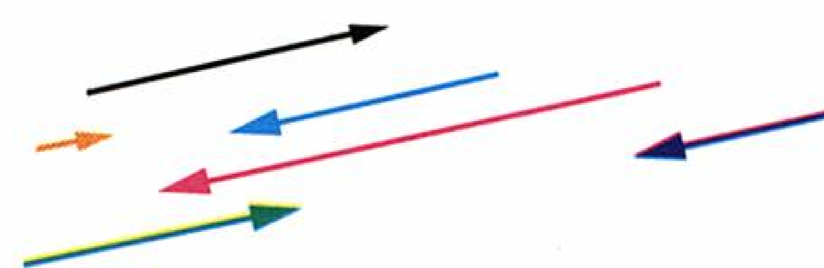
Auch jeder andere dazu parallele Pfeil ist ein Repräsentant des Vektors $\vec{v}$, wenn er die gleiche Länge und Orientierung hat.

Der Vektor $\vec{v}$ besteht also aus allen seinen Repräsentanten.

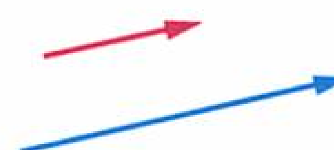
Gleich lange Pfeile:



Parallele Pfeile:



Parallele, gleich orientierte Pfeile:



Parallele, verschieden orientierte Pfeile:



Für die x- und y-Koordinatendifferenz eines Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ mit $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ gilt allgemein:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Differenz der x-Werte} \\ \text{Differenz der y-Werte} \end{pmatrix}$$

Kurz: „Spitze minus Schaft“

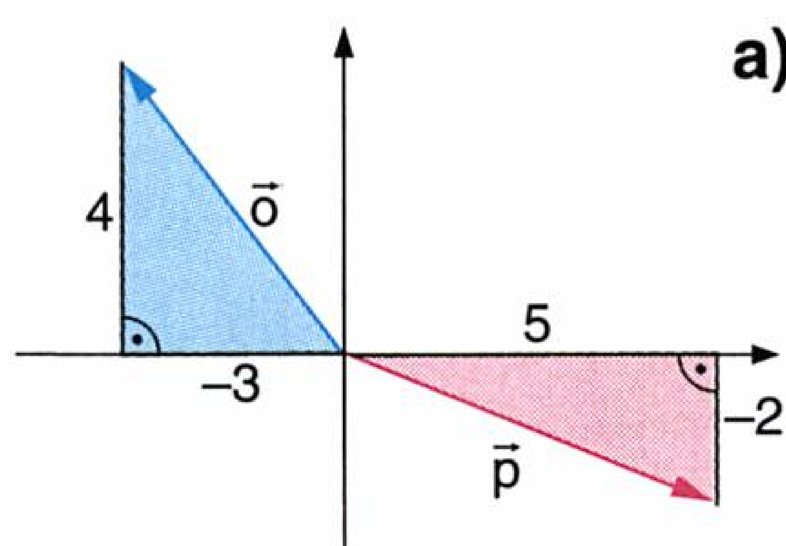
„Spitze minus Schaft“ heißt: Von den Koordinaten des Eckpunktes (der Spitze) sind die Koordinaten des Anfangspunktes (des Schaftes) zu subtrahieren.

Beispiel:

Welche Länge haben die Vektoren **a)** $\vec{o} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Lösung:

Die Längen können abgemessen oder durch Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes berechnet werden:



a) $|\vec{o}| = 5$ (durch Messung)

$|\vec{o}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{o}| = 5$ (mittels pythagoräischen Lehrsatzes)

b) $|\vec{p}| = 5{,}3$ (durch Messung)

$|\vec{p}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} = 5{,}4$

$|\vec{p}| = 5{,}4$ (mittels pythagoräischen Lehrsatzes)

Definition:

Unter der **Länge** (dem **Betrag**) eines Vektors versteht man die Länge eines (beliebigen) seiner Repräsentanten.

Statt „Länge von $\vec{v}$“ bzw. „Betrag von $\vec{v}$“ schreibt man „$|\vec{v}|$“.

Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Im nebenstehenden Beispiel wurden die Anfangspunkte der Vektoren $\vec{o}$ und $\vec{p}$ in den Ursprung gelegt. Solche Vektoren nennt man **Ortsvektoren**.

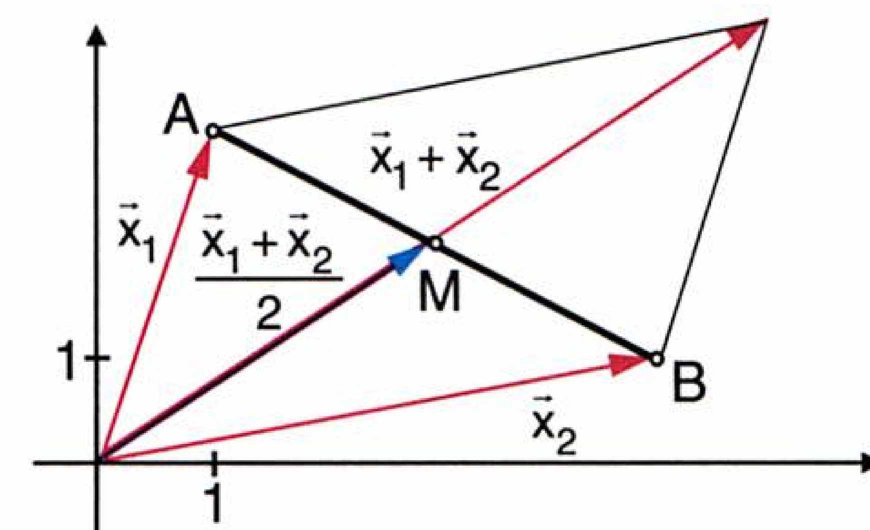
Beispiel:

Es ist der Mittelpunkt M der Strecke AB [A (1, 3), B (5, 1)] zu bestimmen.

$$\overrightarrow{0M} = \frac{\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}}{2}$$

Lösung:

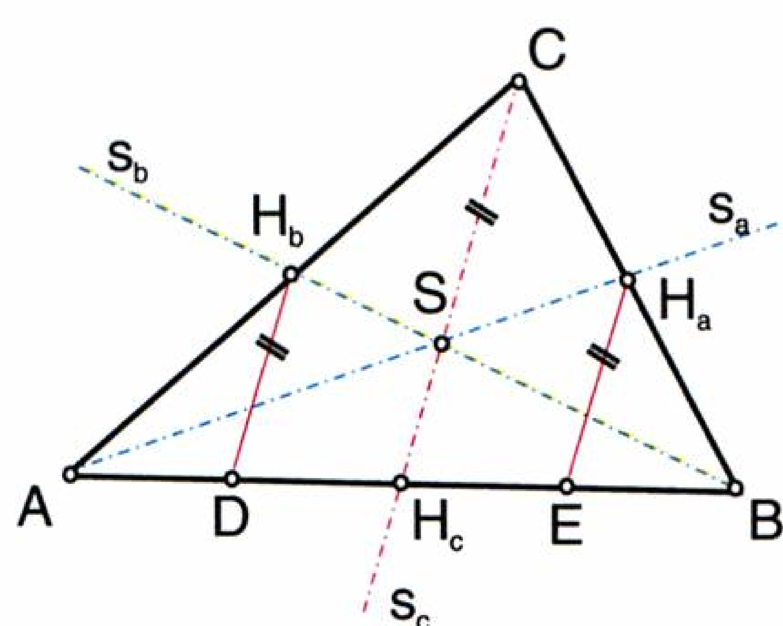
Wird der Ortsvektor $\overrightarrow{x_1}$ des Punktes A und der Ortsvektor $\overrightarrow{x_2}$ des Punktes B addiert, ergibt sich der „Diagonalvektor" $\vec{d}$ des dargestellten Parallelogramms: $\vec{d} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$



Aus der Figur ist ersichtlich, dass der halbe Diagonalvektor der Ortsvektor des Mittelpunktes M ist.

$$\overrightarrow{0M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+5\\3+1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Da für den Ortsvektor $\overrightarrow{0M}$ die Koordinaten des Endpunktes M mit den Koordinaten des Ortsvektors überein stimmen, gilt: **M (3, 2).**



Als **Schwerlinien** s_a, s_b und s_c werden diejenigen Geraden in einem Dreieck bezeichnet, die den Mittelpunkt einer Seite mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbinden.

Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S. (Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2 :1.)

Für die Berechnung des Schwerpunkts S gilt:

$$\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C})$$

In der Physik ist der Schwerpunkt jener Punkt, der – unterstützt – das Herunterfallen des Körpers verhindert. Ordnet man der Fläche eine Masse zu (in der Realität ein dünnes dreieckiges Plättchen), so kann man sich in diesem Punkt die gesamte Masse vereinigt denken. Man nennt ihn dann auch **Massenmittelpunkt**.

Beispiel:

Die Koordinaten S des Schwerpunkts eines Dreiecks ABC sind allgemein zu bestimmen.

Lösung:

In der Zeichnung in der Außenspalte sind H_a, H_b und H_c die Halbierungspunkte der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$.

Mit Hilfe des 1. Strahlensatzes lassen sich folgende Beziehungen aufstellen:

$$\frac{\overline{AH_b}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AH_c}} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{DH_c}$$

$$\frac{\overline{BH_a}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BH_c}} \Rightarrow \overline{BE} = \overline{EH_c}$$

Da H_c der Halbierungspunkt der Seite $\overline{AB}$ ist, gilt weiters:

$$\overline{AD} = \overline{DH_c} = \overline{H_cE} = \overline{EB}$$

Unter nochmaliger Anwendung des 1. Strahlensatzes erhält man:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AH_a}} = \frac{2}{3}.$$

Der Schwerpunkt S teilt die Strecke $\overline{AH_a}$ im Verhältnis 2 : 1.

Daher gilt: $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AH_a} = \frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Wir setzen $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{0S} - \overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0B}$

$$\overrightarrow{0S} - \overrightarrow{0A} = \frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}) + \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0B}) =$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{0B} - \frac{2}{3}\overrightarrow{0A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{0C} - \frac{1}{3}\overrightarrow{0B}$$

Für $\overrightarrow{0S}$ erhält man:

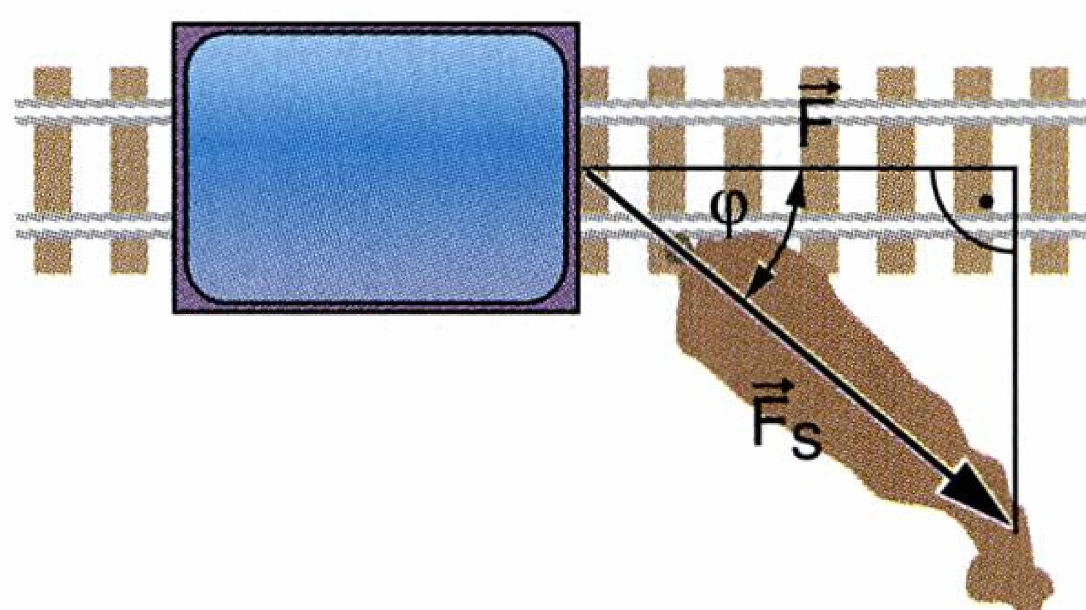
$$\overrightarrow{0S} = \overrightarrow{0A} - \frac{2}{3}\overrightarrow{0A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{0B} - \frac{1}{3}\overrightarrow{0B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{0C} =$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{0A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{0B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{0C} = \frac{\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}}{3}$$

Skalares Produkt

Die Berechnung des skalaren Produkts wurde bereits im Abschnitt „Matrizenrechnung" allgemein gezeigt.

Wir ergänzen hier die geometrische bzw. physikalische Deutung des skalaren Produkts.

Arbeit = Kraft in Wegrichtung × Weg Kurz: $W = F_s \cdot s$



Der Winkel φ spielt eine entscheidende Rolle:

$\cos\varphi = \frac{F_s}{F} \Leftrightarrow F_s = F \cdot \cos\varphi$

In $W = F_s \cdot s$ eingesetzt:

$W = F \cdot s \cdot \cos\varphi$

Man nennt diese Verknüpfung von $\vec{F}$ und $\vec{s}$ das **skalare Produkt** der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$:

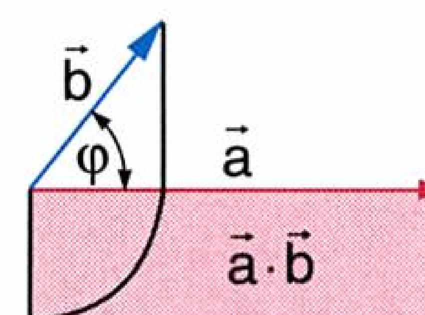
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi = F \cdot s \cdot \cos\varphi$$

Berechnung des skalaren Produkts:

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Das skalare Produkt ist eine reelle Zahl.



Allgemeine Definition des skalaren Produkts:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

φ ist der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel.

Für $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gilt: φ = 90°, d. h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen aufeinander normal.

Vektorielles Produkt

Beispiel:

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC [A(7, 3, 4), B(9, –1, 5), C(1, 1, – 6)] ist zu berechnen.

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} (-4)\cdot(-10)-1\cdot(-2) \\ -(2\cdot(-10)-(-6)\cdot 1) \\ 2\cdot(-2)-(-6)\cdot(-4) \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 40+2 \\ -(-20+6) \\ -4-24 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 42 \\ 14 \\ -28 \end{pmatrix}\right| = \frac{14}{2}\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 7\sqrt{9+1+4} = 7\sqrt{14} = 26,19 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = 26,19$

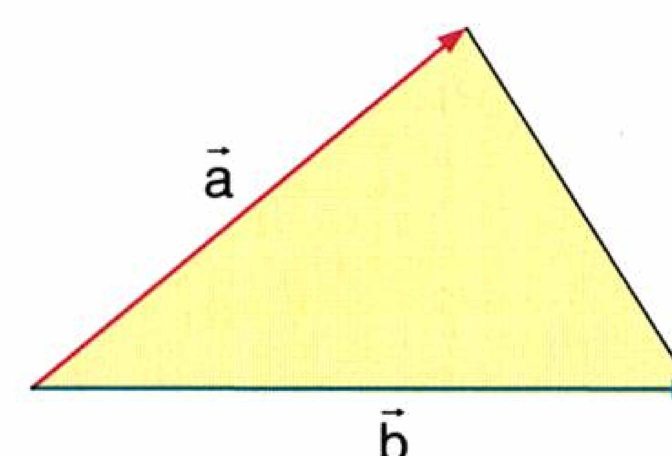
Berechnung des vektoriellen Produkts:

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ -(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

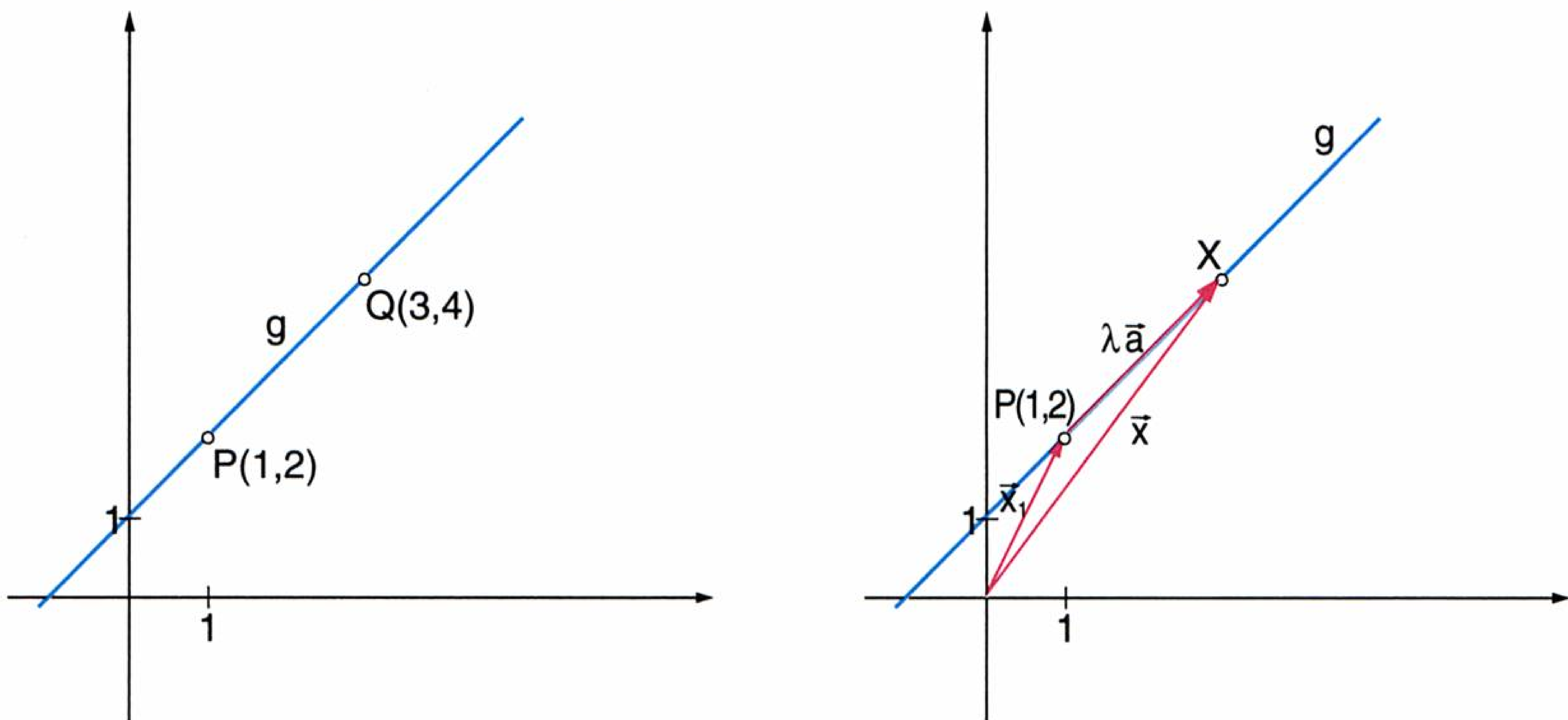
Das vektorielle Produkt ist ein Vektor, der normal auf die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene steht.

Flächeninhalt eines Dreiecks:



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

2. Geradengleichung



Parameterform der Geradengleichung:

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$

$\vec{x}_1$ ..... Beliebiger Punkt auf der Geraden

$\vec{a}$ ..... Beliebiger Vektor in Richtung der Geraden (Richtungsvektor)

λ ..... Parameter[1], er durchläuft die reellen Zahlen

$\vec{x}$ ..... von λ abhängige Variable (Variabler Ortsvektor zu einem durch λ bestimmten Punkt X der Geraden g.)

Durch die beiden Punkte P und Q wird die Gerade g gelegt. Wie sich leicht nachrechnen lässt, lautet die zugehörige Gleichung $y = x + 1$. Wie lässt sich $y = x + 1$ mit **Vektoren** beschreiben? Wählen wir als Anfangspunkt z. B. den Punkt P, so brauchen wir zunächst den Ortsvektor, um zu diesem Punkt zu gelangen: $\vec{x}_1 = \binom{1}{2}$. Freilich ist die Richtung gleichfalls von Bedeutung. Diese wird durch den Richtungsvektor $\vec{a} = \binom{1}{1}$ festgelegt. Um unsere Gerade mit Hilfe der Vektorrechnung darzustellen, muss der Richtungsvektor in Richtung $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ verlängert und verkürzt werden. Das kann man durch den Skalar λ erreichen.

Damit ergibt sich für die Geradengleichung $\vec{x} = \binom{1}{2} + \lambda\binom{1}{1}$.

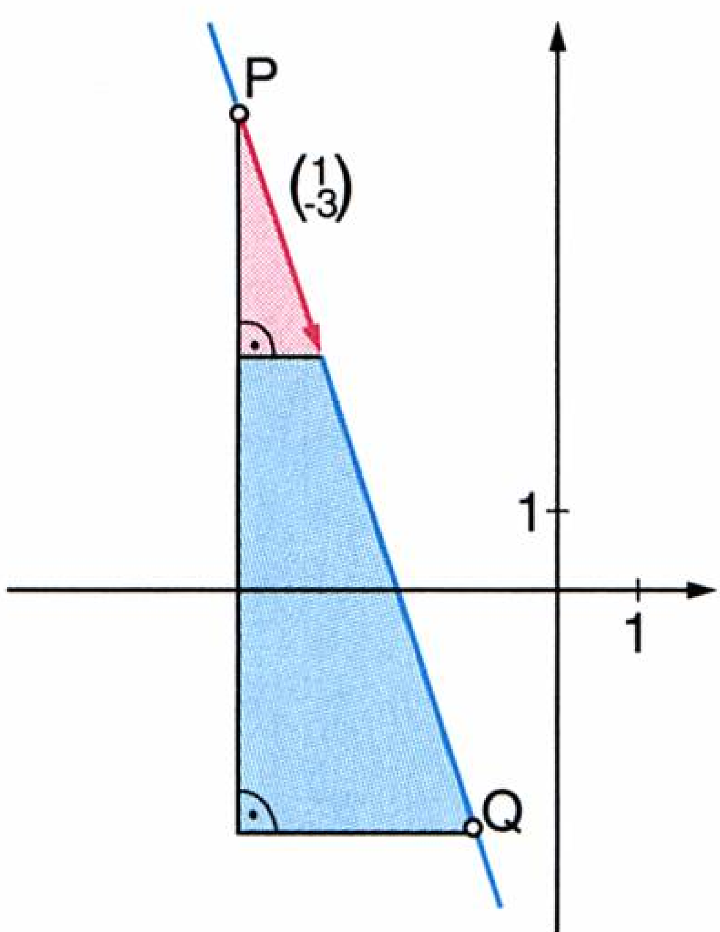
Beispiel:

Eine Parameterform der Geraden durch P(−4, 6) und Q(−1, −3) ist zu bestimmen.

Lösung:

$\overrightarrow{PQ} = \binom{3}{-9} = 3\binom{1}{-3} \qquad \vec{x} = \binom{-4}{6} + \lambda\binom{1}{-3}$

Bemerkung: Statt $\binom{-4}{6}$ hätten wir ohne Unterschied $\binom{-1}{-3}$ einsetzen können. Außerdem darf der Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ} = \binom{3}{-9}$ beliebig dividiert oder multipliziert werden. Es empfiehlt sich allerdings, für weitere Berechnungen möglichst einfache Zahlenpaare zu verwenden!



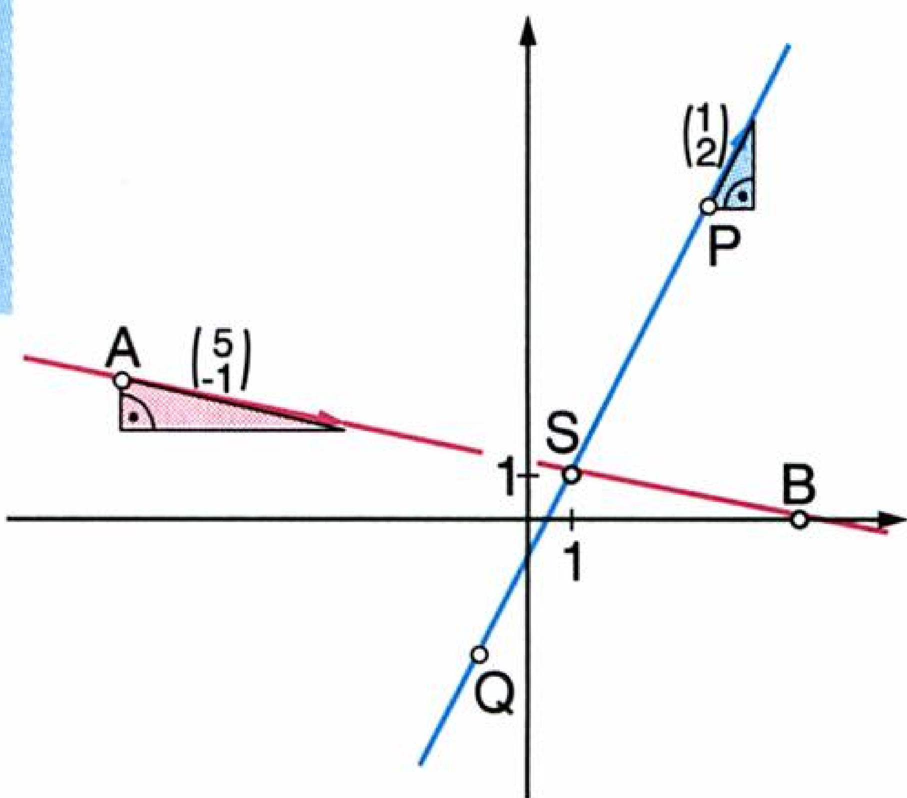
Nochmals: Normalvektoren und Richtungsvektoren darf man verlängern oder verkürzen. Ihre Länge ist unbedeutend. Gilt das auch für Ortsvektoren?

Beispiel:

Der Schnittpunkt der Geraden g [A(−9, 3), B(6, 0)] und h [P(4, 7), Q(−1, −3)] ist zu bestimmen.

Lösung:

Zuerst bestimmen wir die Gleichung der Geraden in Parameterform.



[1]) Unter dem Begriff **„Parameter“** (Zweite Silbe betonen!) versteht man eine konstante oder unbestimmt gelassene Hilfsgröße.

$\overrightarrow{AB} = \binom{15}{-3} = 3\binom{5}{-1}$ g: $\vec{x} = \binom{-9}{3} + \lambda\binom{5}{-1}$

$\overrightarrow{PQ} = \binom{-5}{-10} = -5\binom{1}{2}$ h: $\vec{x} = \binom{4}{7} + \mu\binom{1}{2}$

Bemerkung: Für verschiedene Geraden müssen auch verschiedene Parameter verwendet werden (hier: λ, μ). Wir suchen jenen Punkt beider Geraden, an dem sowohl x- als auch y-Koordinaten übereinstimmen:

$$\binom{-9}{3} + \lambda\binom{5}{-1} = \binom{4}{7} + \mu\binom{1}{2}$$

$$\begin{array}{rcl|l} -9 + 5\lambda &=& 4 + \mu & +9 \\ 3 - \lambda &=& 7 + 2\mu & -3 \\ \hline 5\lambda &=& 13 + \mu & \cdot(-2) \\ -\lambda &=& 4 + 2\mu & \\ \hline -10\lambda &=& -26 - 2\mu & \\ -\lambda &=& 4 + 2\mu & + \\ \hline -11\lambda &=& -22 & \\ \lambda &=& 2 & \end{array}$$

In dieser Vektorgleichung können nun die Parameter eliminiert werden. Man nennt dies auch **„parameterfrei machen“**.

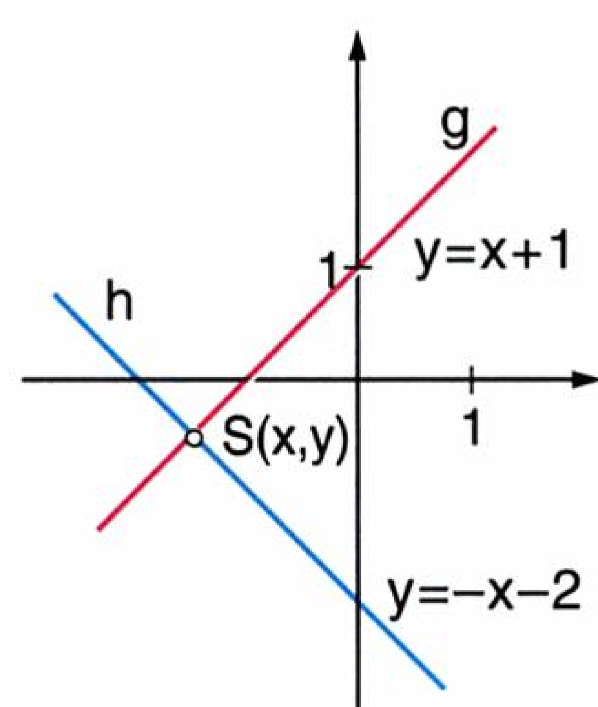
Das lineare Gleichungssystem wird jetzt wie gewohnt gelöst, z. B. mit dem Eliminationsverfahren usw.

Es genügt, einen der beiden Parameter zu berechnen. Dieser wird in die zu ihm gehörende Geradengleichung eingesetzt.

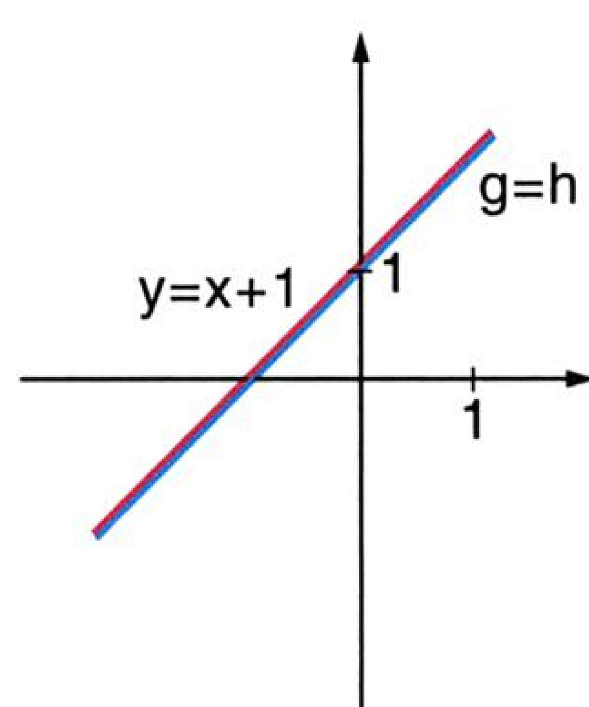
g: $\vec{x} = \binom{-9}{3} + 2\binom{5}{-1} = \binom{-9}{3} + \binom{10}{-2} = \binom{1}{1} \Rightarrow$ **S(1, 1)**

Im letzten Beispiel waren die Schnittpunkte zweier Geraden zu bestimmen. Müssen zwei Gerade eigentlich immer einen Schnittpunkt haben? Die folgende Figur beantwortet diese Frage:

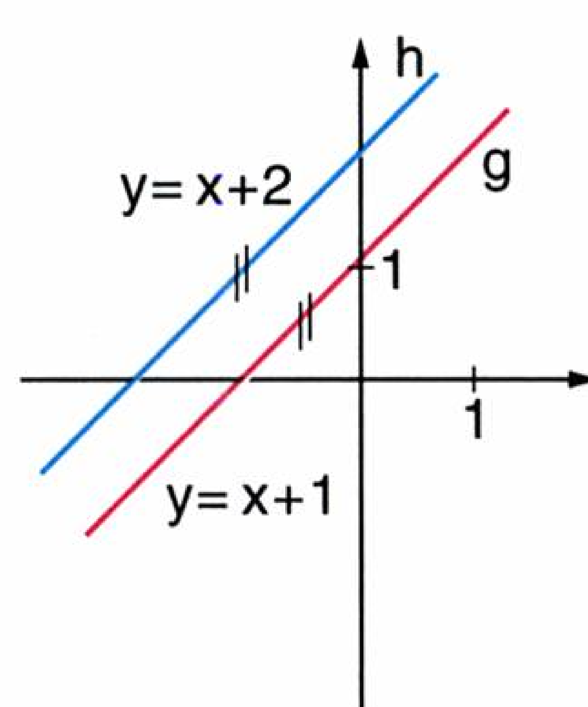
Fall 1



Fall 2



Fall 3



Lösungsschema für den Schnitt zweier Geraden g und h:

Fall 1

Konkretes Ergebnis, $g \cap h = \{S\}$

Fall 2

Wahre Aussage, $g = h$

Fall 3

Falsche Aussage, $g \parallel h$ $(g \neq h)$

Es ist klar: Wenn zwei Geraden identisch (Fall 2) oder parallel (Fall 3) sind, haben sie **nicht genau einen Schnittpunkt**. Wie erkennt man diese Fälle in der Rechnung?

Haben die beiden Geraden genau **einen Schnittpunkt,** so erhält man (wie im letzten Beispiel) ein konkretes Ergebnis, z. B. $\lambda = 2$. In Fall 2 kommt man auf eine wahre Aussage (z. B. $3 = 3$), der Fall 3 führt schließlich auf einen Widerspruch (z. B. $2 = 5$).

Wir wissen bereits, dass es verschiedene Gleichungen für ein und dieselbe Gerade gibt ($2x - 3y = 7$ oder $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$). Besteht ein Zusammenhang zwischen Vektorgleichung und parameterfreier Form?

Geradengleichungen:

$y = kx + d$

$ax + by = c$

$ax + by - c = 0$

Beispiel:

Die Gleichung g: $\vec{x} = \binom{-1}{2} + \lambda\binom{5}{3}$ ist in parameterfreier Form darzustellen.

Lösung:

Für jeden Vektor $\vec{x}$ kann man schreiben: $\vec{x} = \binom{x}{y}$

$$\binom{x}{y} = \binom{-1}{2} + \lambda\binom{5}{3}$$

$$\begin{array}{rl} x = -1 + 5\lambda & |\cdot 3 \\ y = 2 + 3\lambda & |\cdot(-5) \\ \hline 3x = -3 + 15\lambda & \\ -5y = -10 - 15\lambda & \} + \\ \hline \mathbf{3x - 5y = -13} & \end{array}$$

Durch Elimination des Parameters λ entsteht eine Gleichung in x und y.

Lineare Gleichung:

$ax + by = c$ .... Gerade g

$\Rightarrow \binom{a}{b}$ ist Normalvektor auf g

Normalvektoren von $\vec{a} = \binom{x_1}{y_1}$:

$\vec{n}_l = \binom{-y_1}{x_1}$ $\vec{n}_r = \binom{y_1}{-x_1}$

Betrachten wir Parameterform und parameterfreie Form:

$$\vec{x} = \binom{-1}{2} + \lambda\binom{5}{3} \Leftrightarrow 3x - 5y = -13$$

Die **Koeffizienten** von **x** und **y** in der Koordinatenform sind die **Koordinaten** eines **Normalvektors** zur Geraden:

$$\vec{n} = \binom{3}{-5}$$

Wie kann man den Vorgang umkehren? Wie wird aus einer parameterfreien Geradengleichung eine Parameterdarstellung?

Beispiel:

Eine vektorielle Darstellung der Geraden g: $2x + 3y = 5$ ist zu ermitteln.

Lösung:

1. Variante

Wir ermitteln Zahlenpaare, welche die Gleichung erfüllen.

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$

$2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 5$

$2 \cdot 3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 5$

$2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 5$

x	y
1	1
2	$\frac{1}{3}$
3	$-\frac{1}{3}$
4	−1

Wir haben nun vier Punkte, die auf der Geraden g liegen.

$A(1, 1)$, $B\left(2, \frac{1}{3}\right)$, $C\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $D(4, -1)$

A und D haben die günstigsten Koordinaten:

$$\overrightarrow{AD} = \binom{3}{-2} \Rightarrow \vec{x} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{3}{-2}$$

2. Variante

Wir drücken zuerst allgemein eine Variable explizit aus:

$$2x + 3y = 5 \Leftrightarrow 2x = 5 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{5 - 3y}{2}$$

Nun setzen wir für y beliebige Terme, die den Parameter λ enthalten, ein:

$$y = \lambda \Rightarrow x = \frac{5 - 3\lambda}{2}$$

oder: $y = 2\lambda \Rightarrow x = \frac{5 - 6\lambda}{2}$

oder: $y = 2\lambda + 1 \overset{1)}{\Rightarrow} x = \frac{5 - 3(2\lambda + 1)}{2} = \frac{5 - 6\lambda - 3}{2} = \frac{2 - 6\lambda}{2} = 1 - 3\lambda$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{-3}{2}$$

[1]) Hier wurde für y ein Term gewählt, bei dem sich für x ein bruchfreier Term ergibt.

3. Variante

$2x + 3y = 5$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor zum Richtungsvektor.

Folglich ist dieser z. B. $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ – vgl. Randspalte auf Seite 22.

Ein Punkt wird **systematisch** eruiert: $x = 1 \Rightarrow y = 1$: $P(1,\ 1) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Man kann die Lagebeziehung von zwei Geraden auch direkt in der parameterfreien Form bestimmen.

Beispiel:

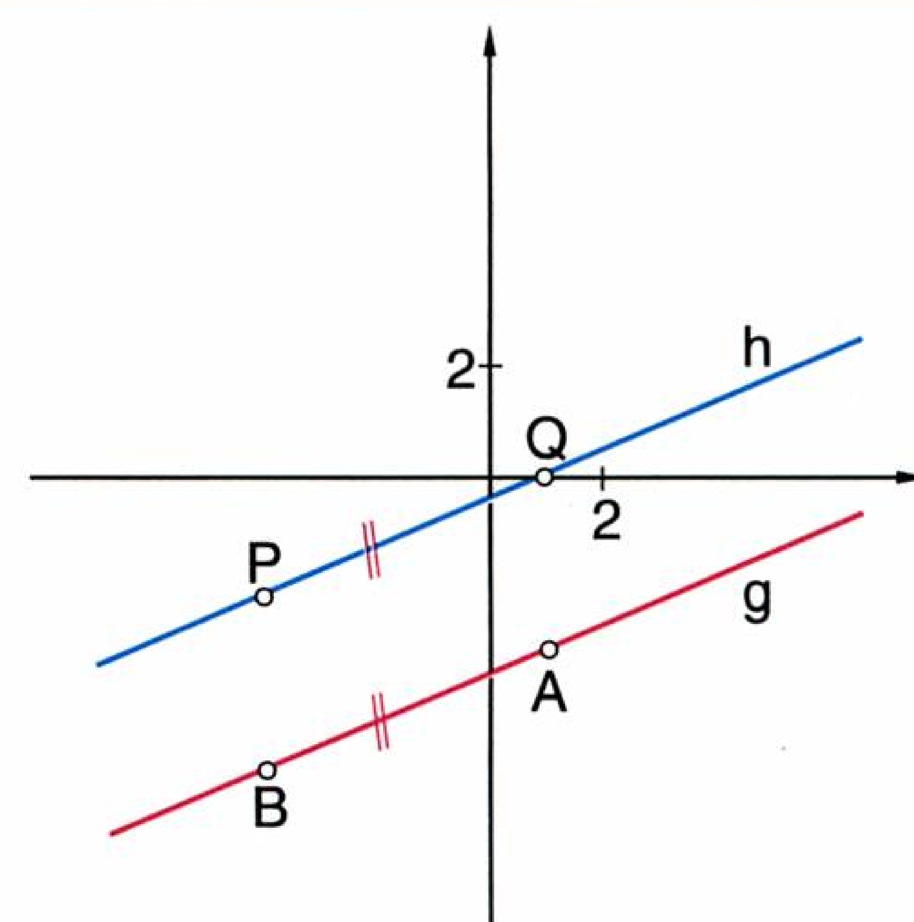
Die Lagebeziehung der Geraden g: $2x - 5y = 17$ und h: $4x - 10y = 4$ ist zu ermitteln.

Lösung:

Die Richtungsvektoren beider Geraden sind: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, somit haben g und h die gleiche Richtung.

Ob g und h identisch oder bloß parallel sind, soll **ein** Punkt klären, z. B. $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} g\colon\ y = \frac{-17}{5} \\ h\colon\ y = \frac{-2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow g \neq h \quad (g \parallel h)$$



Bemerkung: Wer kann die Koeffizienten der Geraden so abändern, dass die beiden Geraden genau **einen** Schnittpunkt haben?

Auch wenn die Geraden „gemischt" gegeben sind, ist es nicht notwendig, eine Gleichung in eine andere Form überzuführen, um den Schnittpunkt zu berechnen.

Beispiel:

Die Lagebeziehung der Geraden g: $5x - 4y = -3$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist zu ermitteln.

Lösung:

Für die grafische Darstellung von g benötigen wir Punkte: g [A(5, 7), B(−3, −3)].

Bei der Berechnung wird die Gerade h zunächst „umgeschrieben":

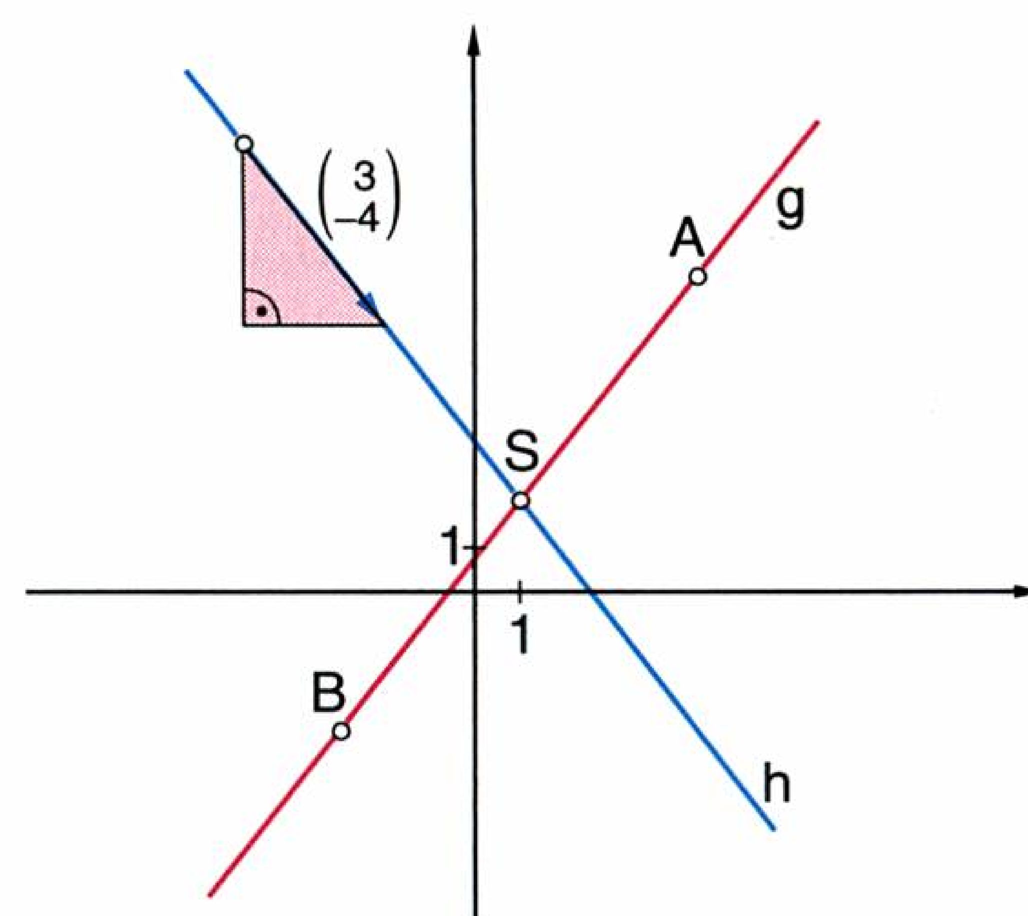
$$h\colon \begin{cases} x = -5 + 3\lambda \\ y = 10 - 4\lambda \end{cases}$$

Nun wird in g: $5\,x - 4\,y = -3$ eingesetzt:

$$5\,(-5 + 3\lambda) - 4\,(10 - 4\lambda) = -3$$

$$\vdots$$

$$\lambda = \mathbf{2}$$

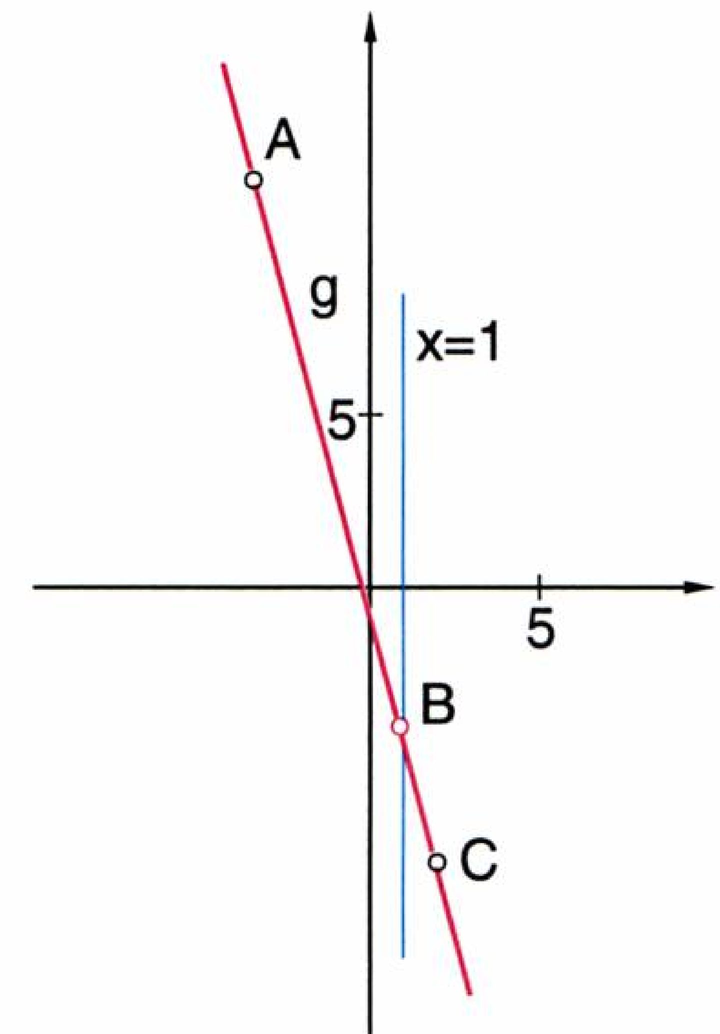


Dieser Wert wird wieder in h eingesetzt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ **S(1, 2)**

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte A(−3, 12), B(1, y_2), C(2, −8). y_2 ist so zu bestimmen, dass A, B und C auf **einer** Geraden liegen.

Lösung:



1. Variante

Wir bestimmen die Geradengleichung durch AC in Parameterform.

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$g: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 12 - 4\lambda \end{cases}$

Wir kennen die x-Koordinate von B:

$1 = -3 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 4$

$y = 12 - 4\lambda = 12 - 4 \cdot 4 = 12 - 16 = -4 \Rightarrow$ **B(1, −4)**

2. Variante

Wir bestimmen die Geradengleichung durch AC in parameterfreier Form: $y = kx + d$

Bestimmung des Anstiegs k:

$k = \frac{-8-12}{2-(-3)} = -4$

Bestimmung des Abschnitts d auf der y-Achse:

$y = -4x + d \Leftrightarrow d = y + 4x = -8 + 4 \cdot 2 = 0$

$\Rightarrow$ **y = −4x**

Nun setzen wir die x-Koordinate von B ein:

$y = -4 \cdot 1 = -4 \Rightarrow$ **B(1, −4)**

3. Variante

Drei allgemeine Punkte A, B, C bilden ein Dreieck. Wenn sie allerdings auf einer Geraden liegen, ist der Flächeninhalt dieses „Dreiecks" null.

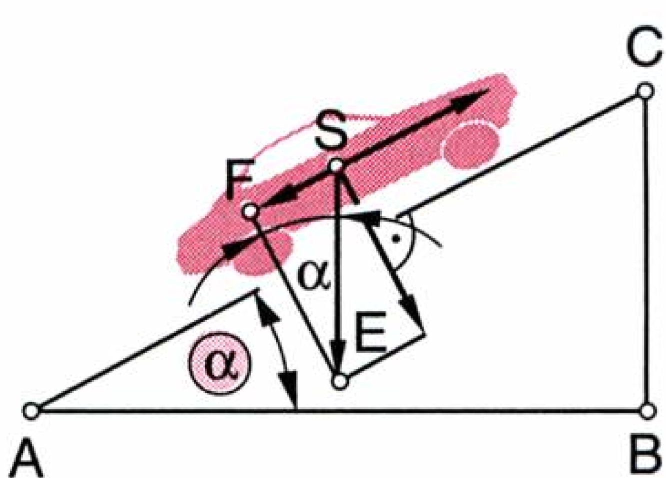
$A = \left|\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]\right|$

$0 = \frac{1}{2}[-3(y_2 + 8) + 1(-8 - 12) + 2(12 - y_2)]$

$0 = -3y_2 - 24 - 20 + 24 - 2y_2$

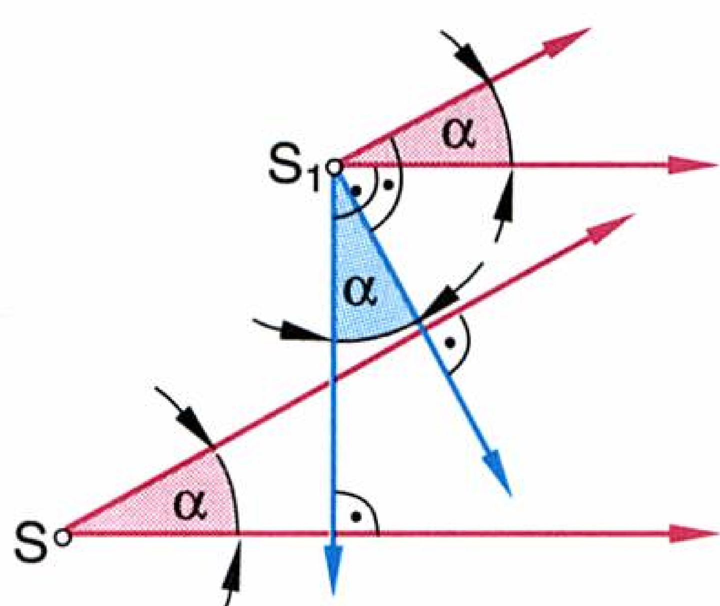
$0 = -5y_2 - 20 \Leftrightarrow 5y_2 = -20 \Rightarrow y_2 = -4 \Rightarrow$

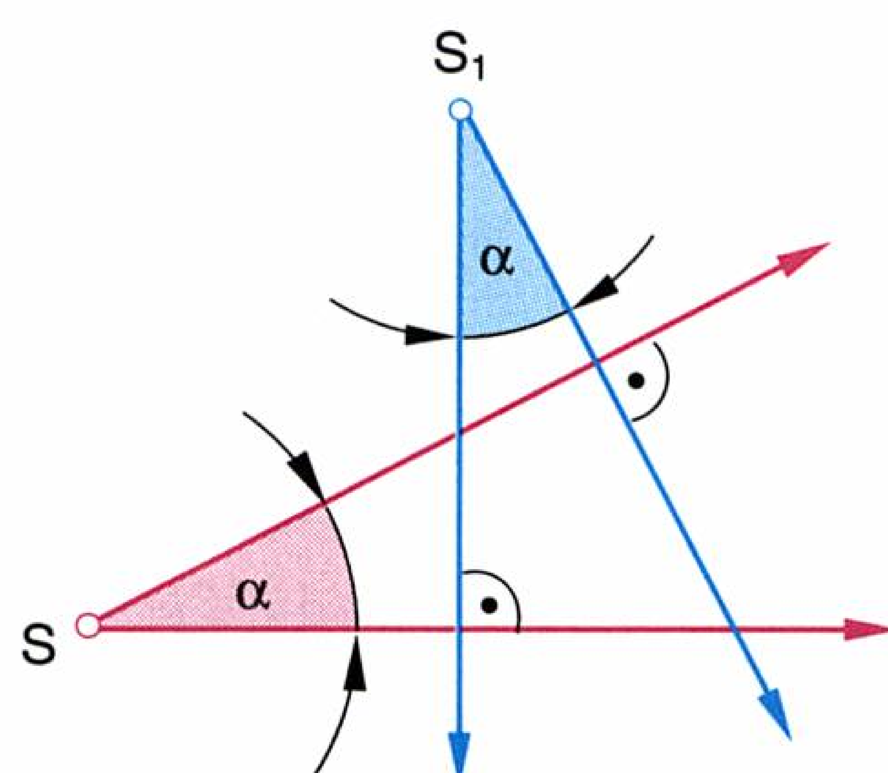
$\Rightarrow$ **B(1, −4)**

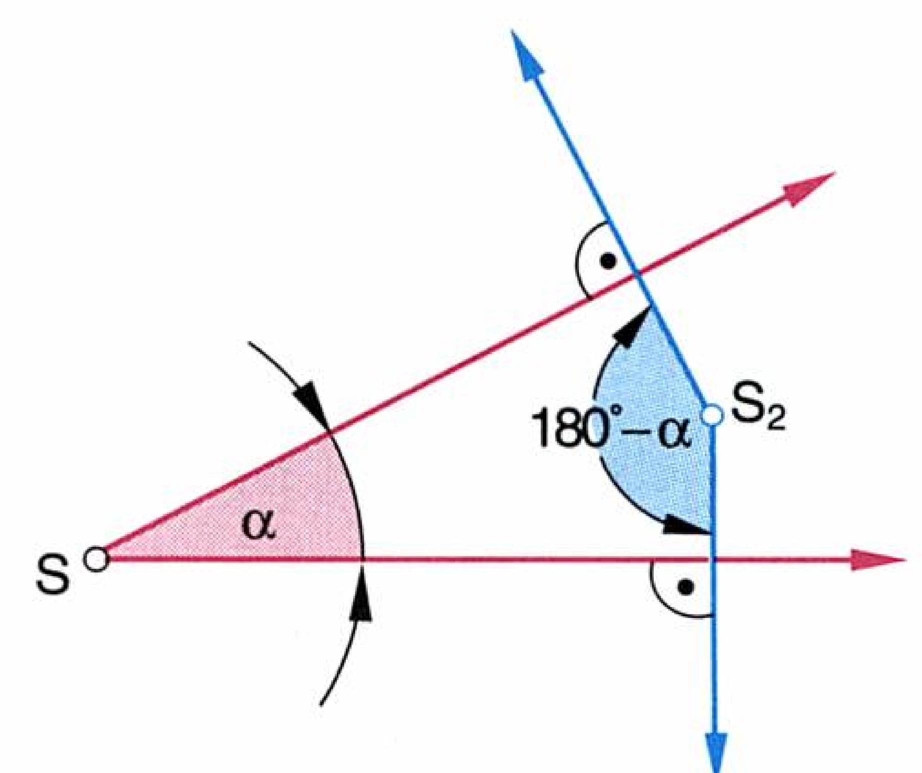


„Die schiefe Ebene ist eine Vorrichtung, um Lasten emporzubefördern." Dieses oder ähnliches kann man in manchen Physikbüchern lesen. Schematisch wird eine schiefe Ebene in der Außenspalte dargestellt. Interessant ist Folgendes: Ein und derselbe Winkel α ist im Dreieck ABC und im Dreieck ESF zu finden! Zufall? Sicherlich nicht — denn es gilt der sogenannte **Normalwinkelsatz**:

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander normal stehen, heißen **Normalwinkel**.

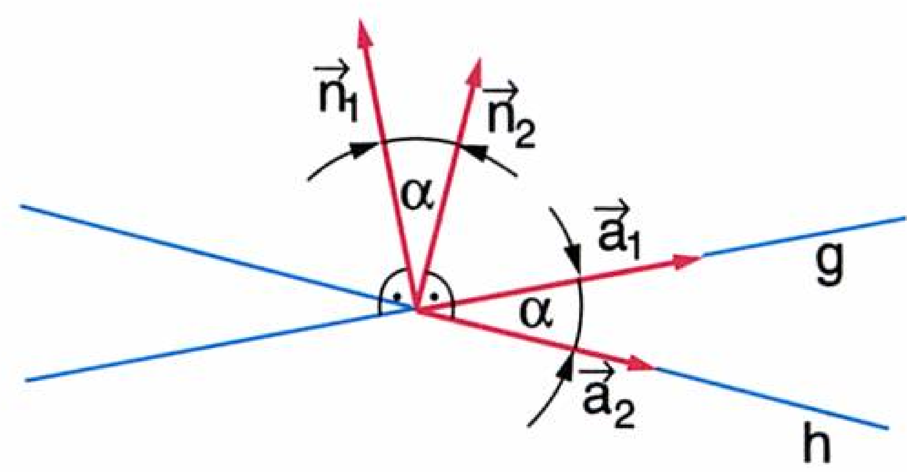






Normalwinkel sind gleich groß oder supplementär.

Nach diesem Exkurs in die Planimetrie jetzt wieder zurück zur Vektorrechnung.



Wie könnte man den Winkel berechnen, den die links dargestellten Geraden g und h einschließen?
$\sphericalangle(g, h) = ?$

— Entweder wird der Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ oder
— der Winkel zwischen den Normalvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ bestimmt.

Denn nach dem Normalwinkelsatz muss $\sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ gelten!

Winkel zwischen zwei Geraden:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|} = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

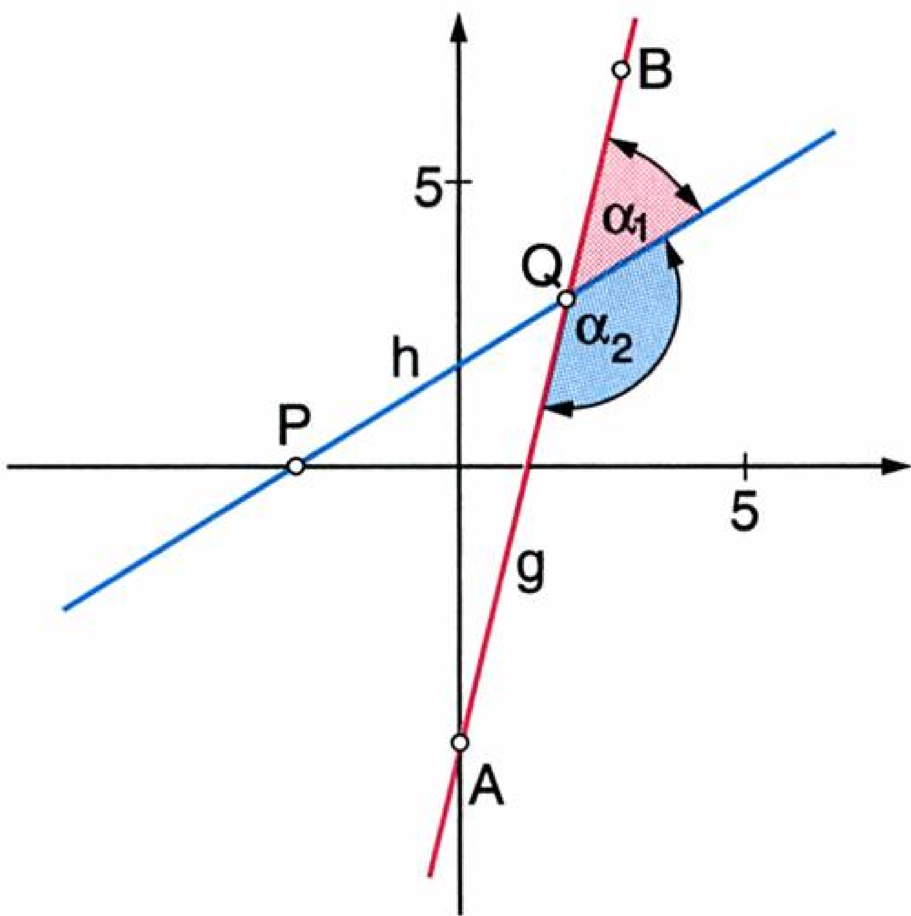
Beispiel:
Der Winkel zwischen g: $4x - y = 5$ und h: $-3x + 5y = 9$ ist zu bestimmen.

Lösung:

g [A(0, −5), B(3, 7)], h [P(−3, 0), Q(2, 3)]

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{9+144}\,\sqrt{25+9}} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = $ **45°** $\qquad \alpha_1 = $ **45°**



Zwei einander schneidende Geraden schließen immer zwei Paar Winkel ein.

Das zweite Winkelpaar erhält man, indem der gefundene Winkel von 180° abgezogen wird: 180° − 45° = 135° (Begründung?) $\qquad \alpha_2 = $ **135°**

Meistens wird als Lösung der kleinere Winkel angegeben. ⇒ **g und h schließen einen Winkel von 45° ein.**

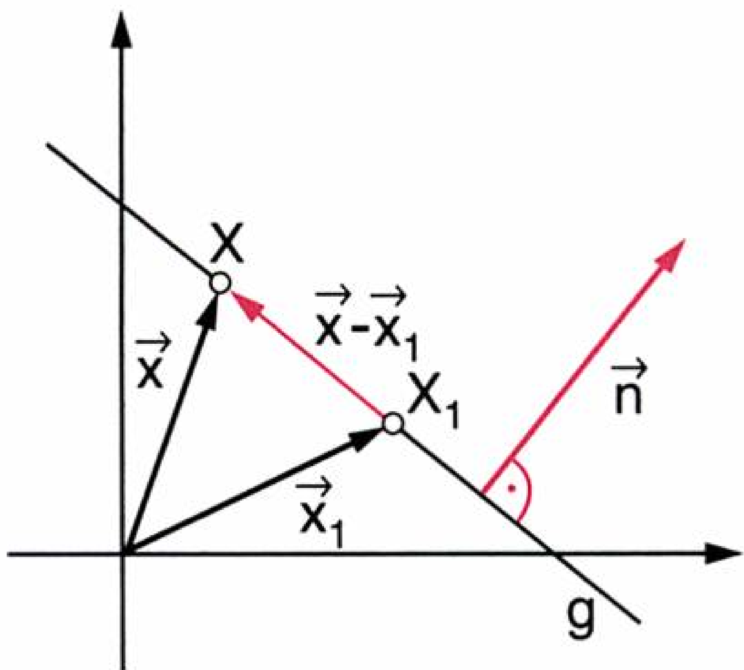
Wie würde übrigens beim obigen Beispiel die Lösung aussehen, wenn Normalvektoren verwendet werden?

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \ldots$$

Normalvektoren von $\vec{a} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$:

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix}-y_1\\x_1\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_r = \begin{pmatrix}y_1\\-x_1\end{pmatrix}$$

Betrachten wir die nachstehende Figur:



$\vec{n}$ ist ein Normalvektor auf die Gerade g,

$\vec{x}_1$ ist der Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden g.

Normalvektorform der Geradengleichung:

$$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_1) = 0$$

$\vec{n}$ ..... Normalvektor
$\vec{x}$ ..... Variable
$\vec{x}_1$ ..... Punkt auf g

Für welchen Vektor $\vec{x}$ gilt folgende Aussage?

$$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_1) = 0$$

Das Produkt $\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_1)$ ist genau dann 0, wenn $\vec{x}-\vec{x}_1$ normal auf $\vec{n}$ steht, d. h. wenn $\vec{x}-\vec{x}_1$ in Richtung der Geraden liegt. Das ist nur dann möglich, wenn $\vec{x}$ der Ortsvektor eines Punktes der Geraden ist.

Beispiel:

Die Gleichung der Streckensymmetrale zwischen P(1, 3) und Q(−4, 8) ist in Normalvektorform zu ermitteln und sofort in parameterfreie Form umzurechnen.

Lösung:

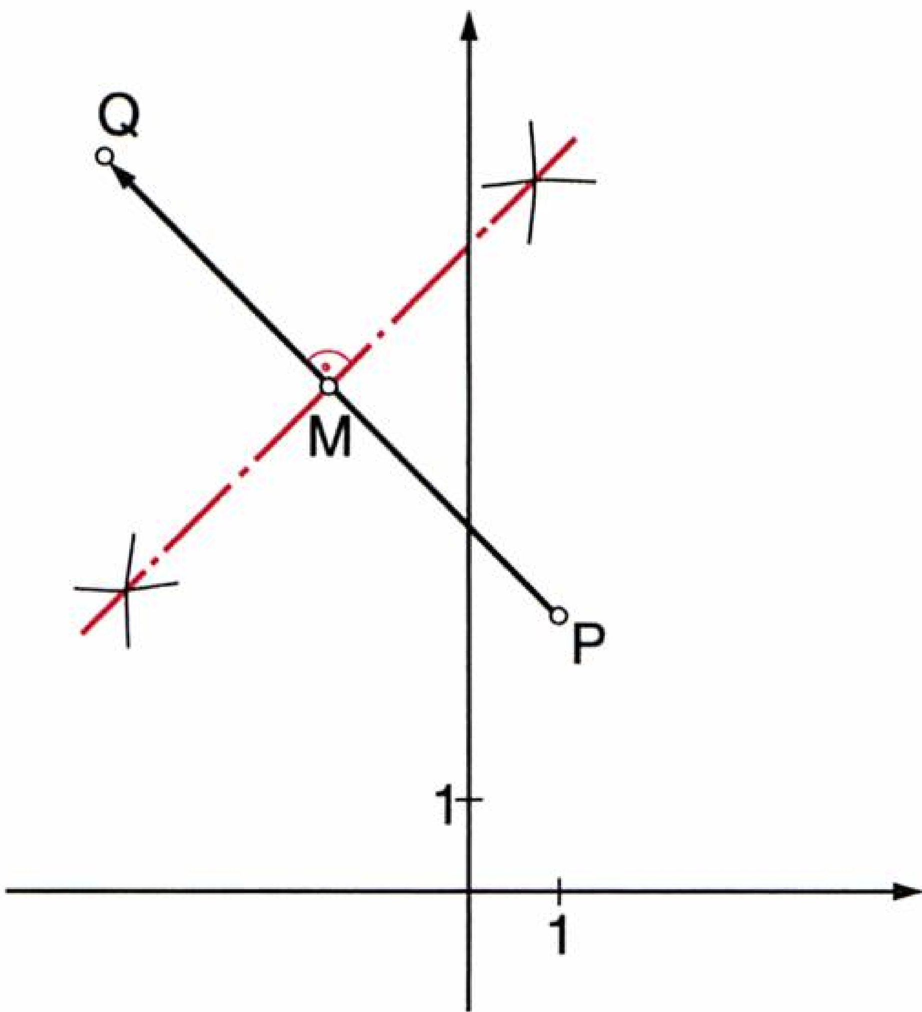
Zunächst wird eine entsprechende Zeichnung angefertigt. Es gilt, die Gleichung der rosa dargestellten Geraden — der Streckensymmetrale — zu bestimmen!

Um die Gleichung einer Geraden in Normalvektorform aufzustellen, benötigt man einen Normalvektor und einen Punkt dieser Geraden.

$\overrightarrow{PQ}$ ist bereits Normalvektor auf die Streckensymmetrale von $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Auch ein Punkt der Streckensymmetrale ist nicht schwer zu finden — denken wir an den Mittelpunkt der Strecke PQ!

$$\overrightarrow{0M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0P} + \overrightarrow{0Q}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}$$



Damit können wir in unsere Normalvektorform der Geradengleichung einsetzen:

$$\vec{n}\cdot(\vec{x} - \vec{x}_1) = 0$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{11}{2}\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}$$ .... Die Normalvektorform kann man sofort in Koordinatenform umrechnen, wenn man bedenkt, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ gilt.

$$-x + y = \frac{3}{2} + \frac{11}{2}$$

$$\mathbf{-x + y = 7}$$ .... Gleichung der Streckensymmetrale in Koordinatenform.

Kurzform der Normalvektorform:

$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{x}_1$

Man kann die im letzten Beispiel durchgeführten Umformungen auch allgemein machen. Das ergibt die sogenannte **„Kurzform der Normalvektorform“**:

$$\vec{n}\cdot(\vec{x} - \vec{x}_1) = 0$$
$$\vec{n}\cdot\vec{x} - \vec{n}\cdot\vec{x}_1 = 0$$
$$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{x}_1$$

HESSEsche Normalform:

$\vec{n}_0\cdot(\vec{x} - \vec{x}_1) = 0$

In der Gleichung $\vec{n}\cdot(\vec{x} - \vec{x}_1) = 0$ ist $\vec{n}$ irgendein Normalvektor der Geraden. Wenn der Normalvektor zugleich Einheitsvektor ist, heißt die Gleichung **HESSEsche Normalform (HNF)**.

Beispiel:

Die Gleichung der Geraden g [P(−2, 5), Q(3, 11)] ist in HNF zu bestimmen.

Lösung:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{36+25}}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\right]}{\sqrt{61}} = \mathbf{0}$$

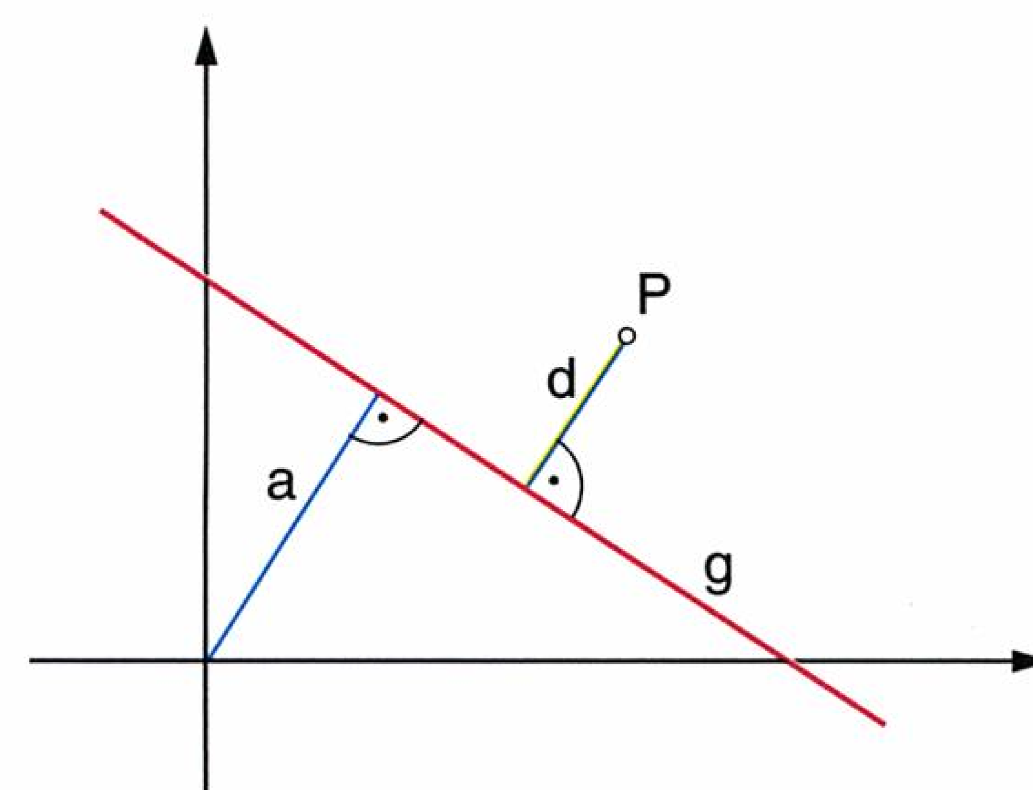
Wozu braucht man die HNF?

Auf diese Frage gibt es zwei Antworten:

(1) Die rechte Seite der HNF in der Form $\vec{n}_0\vec{x} = \vec{n}_0\vec{x}_1$ ist der **Normalabstand a der Geraden g vom Ursprung**: $a = |\vec{n}_0\vec{x}_1|$.

(2) Setzt man in $\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1)$ für $\vec{x}$ den Ortsvektor $\vec{p}$ eines **beliebigen** Punktes P ein, so erhält man $\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{x}_1)$ — und das Ergebnis dieses Terms ist der **Normalabstand d des Punktes P von der Geraden g**:

$$d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{x}_1)|.$$

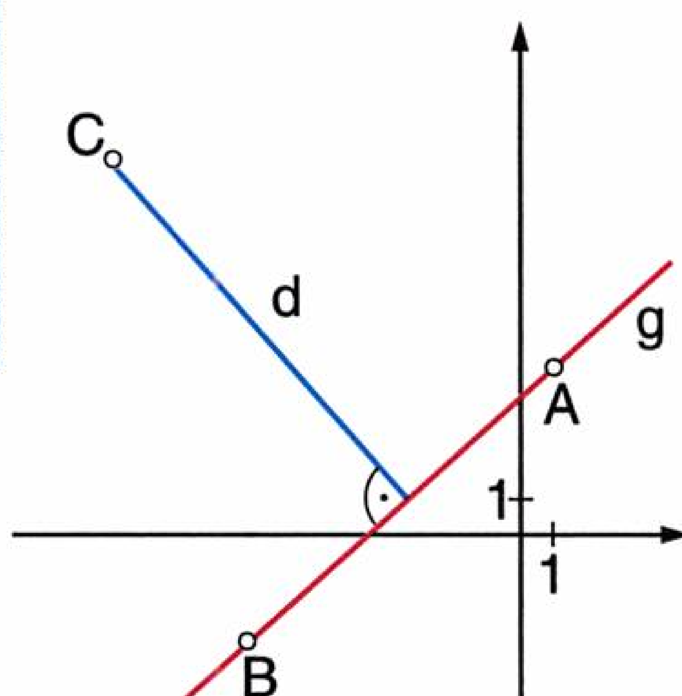


Abstand d eines Punktes P von einer Geraden g:

$$d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{x}_1)|$$

Beispiel:

Der Abstand des Punktes C(−12, 11) von der Geraden g [A(−8, −3), B(1, 5)] ist zu bestimmen.



Lösung:

$d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{x}_1)|$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$d = \left| \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -12 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right]}{\sqrt{64+81}} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{145}} \right| = \left| \frac{104+54}{\sqrt{145}} \right| = \ldots = 13{,}1 \qquad \mathbf{d = 13{,}1}$$

Man beachte den Unterschied:

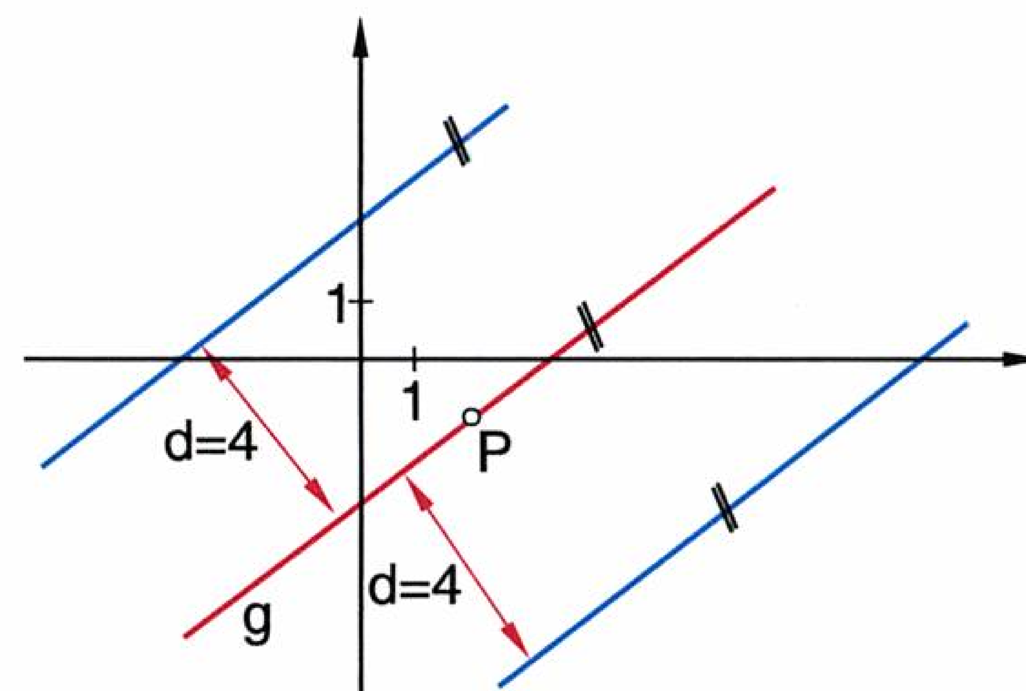
$|-12| = 12$

$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

Was bedeutet $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = 4$? Eine schwierige Frage. Gehen wir systematisch vor. Die obige Formel erinnert an $d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{x}_1)|$ — also den Normalabstand d des Punktes mit dem Ortsvektor $\vec{p}$.

$\vec{n}_0 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ ..... Normalvektor, der zugleich Einheitsvektor ist

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ..... Ortsvektor des Punktes P(2, −1)



Ist nun $\vec{p}$ der Ortsvektor **eines** Punktes? Sicherlich nicht nur. Denn zur Geraden g mit $\vec{n}_0 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und P(2, −1) gibt es unendlich viele Punkte, die in „ihrer Gesamtheit" zwei zu g parallele Geraden mit dem Abstand 4 bilden.

Die HNF kann auch dazu verwendet werden, eine zur gegebenen Geraden **parallele Gerade** sofort anzuschreiben.

Einige historische Bemerkungen zur Vektorrechnung und zur analytischen Geometrie:

— Welche Koordinaten hat der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC [A(0, 0), B(5, 2), C(6, 4)]?

— Wie lautet die Gleichung der Winkelsymmetralen der Geraden g und h, wenn deren Funktionsgleichungen gegeben sind?

Diese Aufgabenstellungen sind Thema der sogenannten **analytischen Geometrie**, in der also geometrische Untersuchungen mit rechnerischen Methoden vorgenommen werden. Mit anderen Worten: In der analytischen Geometrie erfolgt eine „Verschmelzung" geometrischen mit algebraischen Denkens.

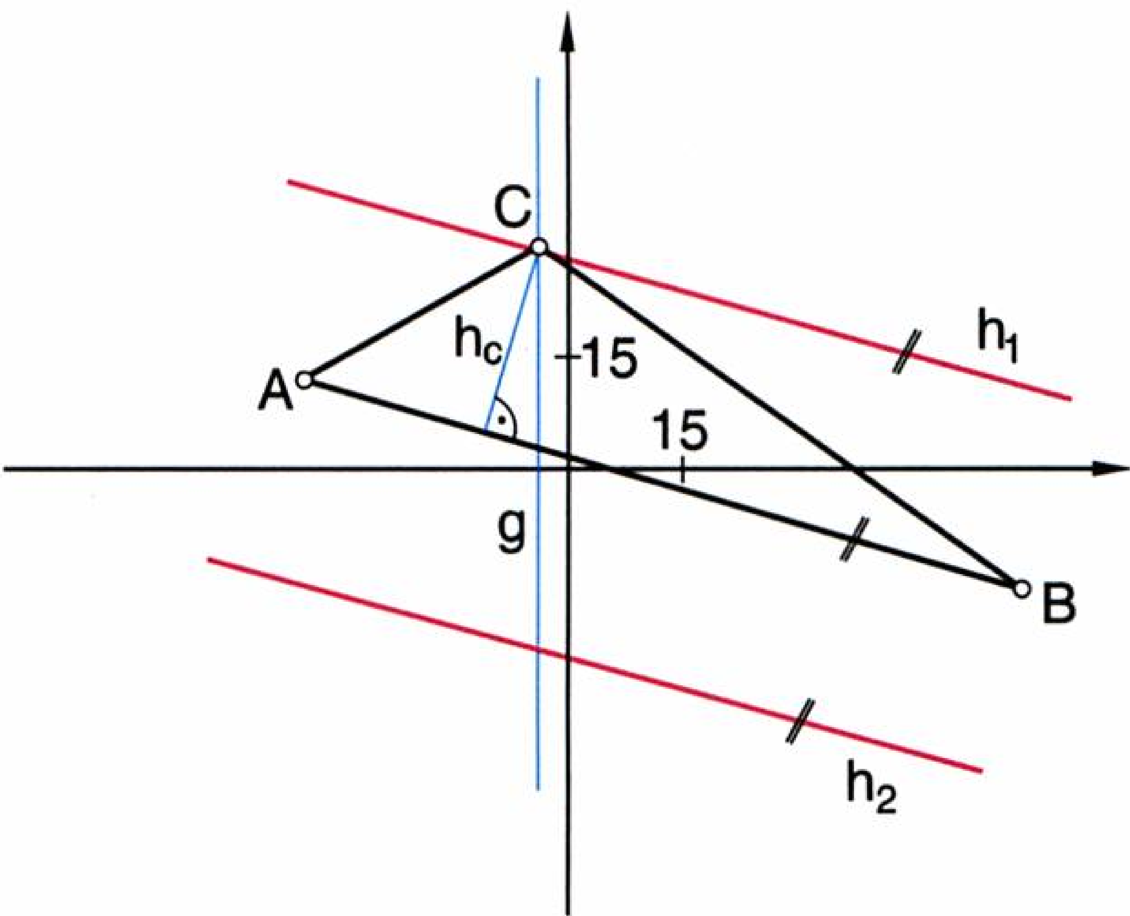
Die Vektorrechnung wird erst seit den Sechzigerjahren des 20. Jahrhunderts an den Höheren Schulen Österreichs gelehrt. Mit den Rechenverfahren der Vektorrechnung werden die Problemstellungen der analytischen Geometrie bedeutend vereinfacht. Die eingangs gestellten Fragen wären ohne Vektorrechnung, also mit den traditionellen Methoden der analytischen Geometrie, nur mit sehr großem Aufwand lösbar.

Die HESSEsche Normalform ist nach dem deutschen Mathematiker **Ludwig Otto HESSE** (1811—1874) benannt. HESSE wurde 1840 in Königsberg zum Professor berufen. Später war er in Halle, Heidelberg und München tätig und verfasste wichtige Arbeiten zum Thema „Analytische Geometrie" (vgl. Hauptspalte).

Beispiel:

Im Dreieck ABC [A(−35, 12), B(61, −16), C(−4, y > 0)] sei $h_c = 25$. Die fehlende Koordinate ist zu bestimmen.

Lösung:



Wir kennen die x-Koordinate von C ⇒ g.

C hat von AB den Abstand 25 ⇒ C liegt auf h_1 oder h_2.

Wir berechnen zuerst die Geraden h_1 und h_2 mit Hilfe der HNF.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 96 \\ -28 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 24 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$h_{1,2}: \left| \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -35 \\ 12 \end{pmatrix}\right]}{\sqrt{49+576}} \right| = 25$$

$$\left| \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -35 \\ 12 \end{pmatrix}}{\sqrt{625}} \right| = 25$$

$$\left| \frac{7x + 24y - (-245 + 288)}{25} \right| = 25$$

$$\left. \left| \frac{7x + 24y - 43}{25} \right| = 25 \right\}$$ Beim Eliminieren eines Betrags gibt es immer zwei Möglichkeiten:

$$h_1: \frac{7x + 24y - 43}{25} = +25 \qquad h_2: \frac{7x + 24y - 43}{25} = -25$$

$$7x + 24y - 43 = 625 \qquad 7x + 24y - 43 = -625$$

$$7x + 24y = 668 \qquad 7x + 24y = -582$$

Nun wird in beiden Gleichungen $x = -4$ eingesetzt:

$$7(-4) + 24y = 668 \qquad 7(-4) + 24y = -582$$

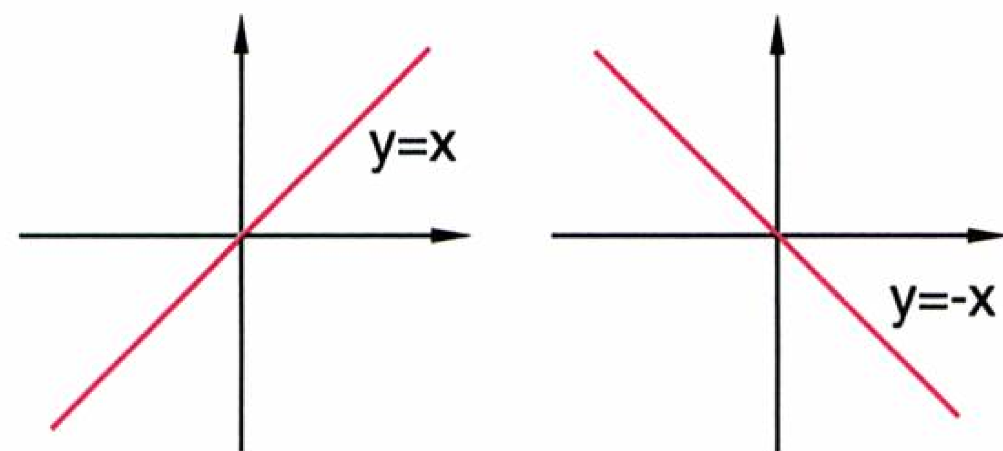
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y = 29 \qquad y = -\frac{277}{12}$$

Laut Angabe muss y positiv sein ⇒ **C(−4, 29)**

Besondere Lagen:

$x = a$:	Parallele zur y-Achse im Abstand a
$x = 0$:	y-Achse
$y = a$:	Parallele zur x-Achse im Abstand a
$y = 0$:	x-Achse
$y = x$:	1. Mediane
$y = -x$:	2. Mediane
$y = kx$:	Gerade durch den Ursprung mit der Steigung k
$\vec{x} = \lambda\vec{a}$:	Gerade durch den Ursprung mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$



Beispiel:

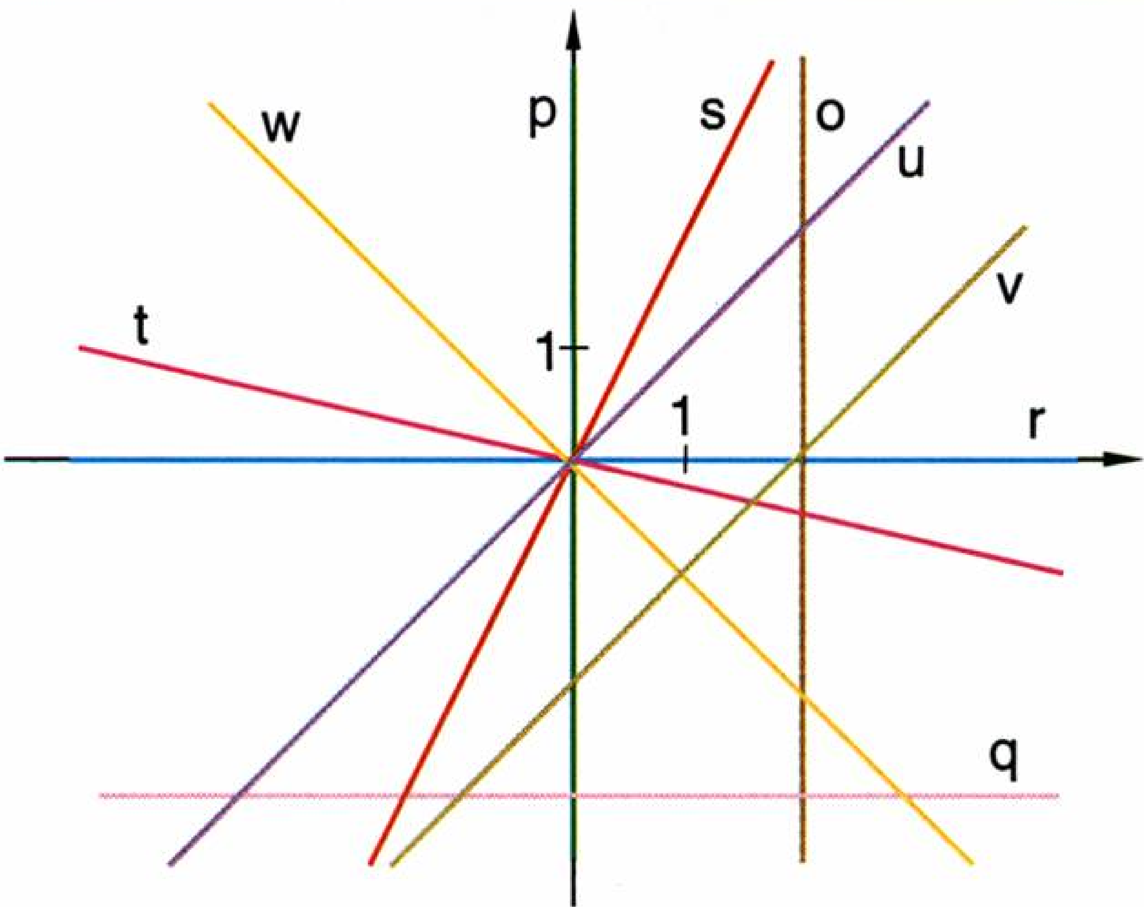
Die folgenden Geraden sind zu zeichnen:

o: $x = 2$ p: $x = 0$ q: $y = -3$

r: $y = 0$ s: $y = 2x$ t: $\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

u: $y = x$ v: $y = x - 2$ w: $y = -x$

Lösung:



3. Einige merkwürdige Dreieckspunkte

Wer weiß...

- in welchem Punkt sich die Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden?
- wie man den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks konstruiert?
- wie der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks definiert wird?
- in welchem Verhältnis der Schwerpunkt die Schwerlinien teilt?

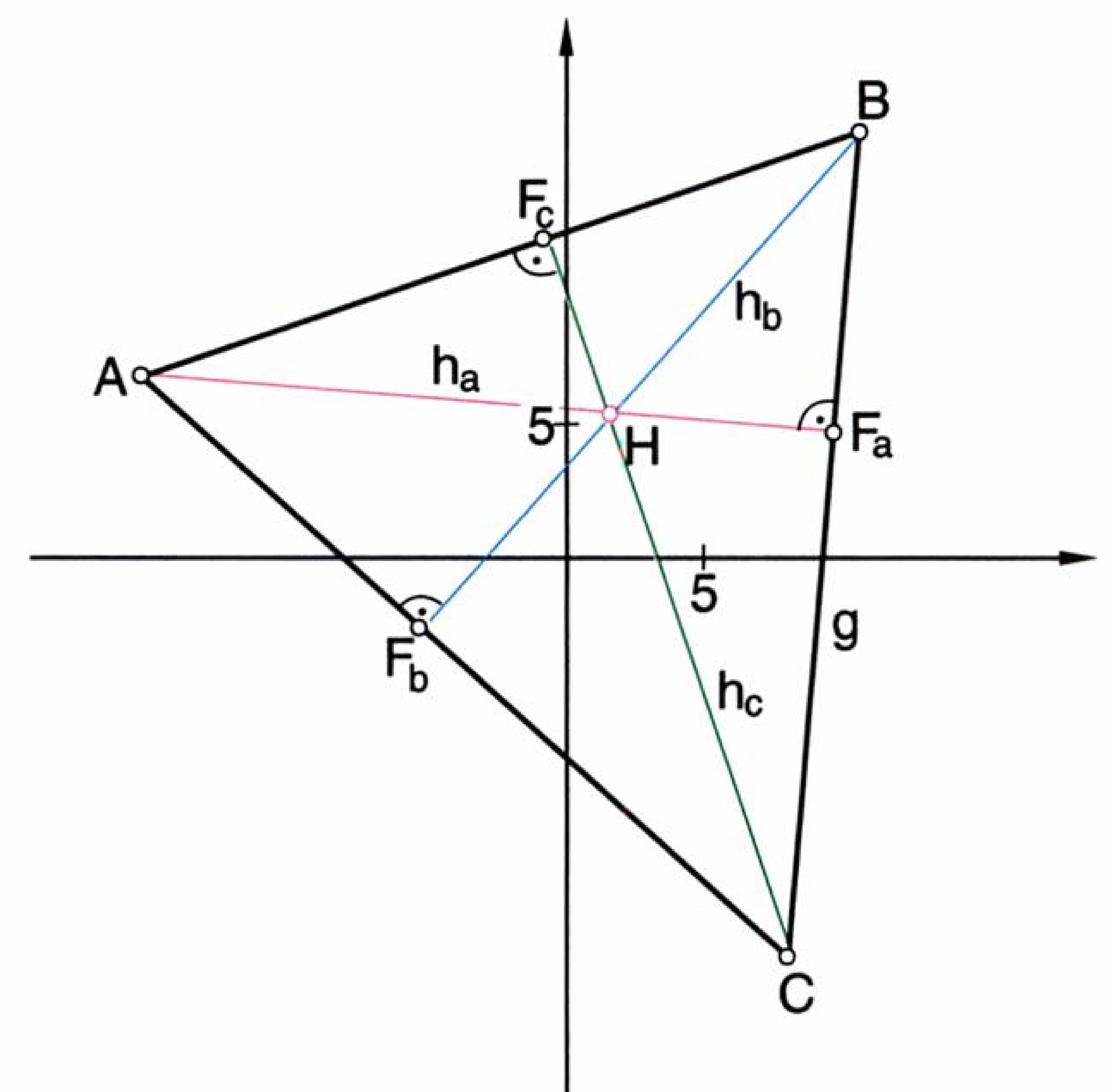
Wenn jemand nur eine einzige der obigen Fragen **nicht** beantworten kann, ist eine Wiederholung des Kapitels **„Planimetrie/5. Dreieck/Einige merkwürdige Punkte“** (vgl. Band 1, Seite **172f.**) notwendig, um die folgenden Ausführungen zu verstehen.

Beispiel:

Gegeben ist das Dreieck ABC [A(−16, 7), B(11, 16), C(8, −15)]. Man berechne den Höhenschnittpunkt H und die Längen der auf der Höhe h_a liegenden Höhenabschnitte.

Lösung:

Von den drei möglichen Höhen greifen wir willkürlich zwei heraus. Eine Höhe in besonderer Lage (z. B. parallel zur x-Achse) wäre besonders günstig.



h_a: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-3\\-31\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}3\\31\end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-16\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}31\\-3\end{pmatrix} \Big| \cdot \begin{pmatrix}3\\31\end{pmatrix}$

h_b: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}24\\-22\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}12\\-11\end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}11\\12\end{pmatrix} \Big| \cdot \begin{pmatrix}12\\-11\end{pmatrix}$

$$3x + 31y = 169$$
$$12x - 11y = -44$$
$$\vdots$$
$$y = \frac{16}{3}$$
$$h_b\text{: } 12x - 11 \cdot \frac{16}{3} = -44$$
$$\vdots$$
$$x = \frac{11}{9} \Rightarrow H\left(\frac{11}{9}, \frac{16}{3}\right)$$

Für die Höhenabschnitte benötigen wir den Fußpunkt F_a. Dazu müssen wir die Trägergerade der Höhe h_a mit g, der Trägergeraden der Seite $\overline{BC}$, schneiden.

h_a: $3x + 31y = 169$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix}3\\31\end{pmatrix}$

$$3(11 + 3\omega) + 31(16 + 31\omega) = 169$$
$$\vdots$$
$$\omega = -\frac{36}{97}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix} - \frac{36}{97}\begin{pmatrix}3\\31\end{pmatrix} = \ldots \approx \begin{pmatrix}9{,}8866\\4{,}4948\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F_a(9{,}9,\ 4{,}5)}$

Nun können wir die gesuchten Höhenabschnitte bestimmen.

$$|\overrightarrow{AH}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{11}{9}\\\frac{16}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-16\\7\end{pmatrix}\right| = \ldots \approx 17{,}3 \Rightarrow |\overrightarrow{AH}| = \mathbf{17{,}3}$$

$$|\overrightarrow{HF_a}| = \left|\begin{pmatrix}9{,}8866\\4{,}4948\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{11}{9}\\\frac{16}{3}\end{pmatrix}\right| = \ldots \approx 8{,}7 \Rightarrow |\overrightarrow{HF_a}| = \mathbf{8{,}7}$$

Bemerkung: Die Höhe h_a lässt sich bestimmen, indem man die beiden Höhenabschnitte addiert. Eine andere Möglichkeit wäre es, die HNF zu verwenden.

Beispiel:

Gegeben ist das Dreieck ABC [A(2, −6), B(14, 3), C(2, 8)]. Umkreismittelpunkt U und Umkreisradius r?

Lösung:

m_a: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{0M_a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$

m_b: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{0M_b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0C}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

m_a: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

m_b: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

m_a: $\quad 12x - 5y = \frac{137}{2}$

m_b: $\quad y = 1$

m_a: $\quad 12x - 5 \cdot 1 = \frac{137}{2}$

$\vdots$

$x = \frac{49}{8} \Rightarrow U\left(\frac{49}{8}, 1\right)$

Image: Koordinatensystem mit Dreieck ABC, Umkreis und den Mittelsenkrechten.

Den Umkreisradius r erhält man nach einem der folgenden Ansätze:

$r = |\overrightarrow{UA}| = |\overrightarrow{UB}| = |\overrightarrow{UC}|$

$r = |\overrightarrow{UA}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{49}{8} \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{33}{8} \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(-\frac{33}{8}\right)^2 + 49} = \sqrt{\frac{1089 + 49 \cdot 64}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{1089 + 3136} = \frac{1}{8}\sqrt{4225} = \frac{65}{8}$

$r = \frac{65}{8}$

EULERsche Gerade e:

$\{S, H, U\} \subset e$

$-2\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{SH}$

Image: Dreieck ABC mit der EULERschen Geraden durch H, S und U.

Wenn man in einem Dreieck S, H und U einzeichnet, bemerkt man, dass sie auf einer Geraden liegen. Diese wird als **EULERsche Gerade** bezeichnet.

Noch eine interessante Eigenschaft lässt sich beweisen: Der Schwerpunkt S liegt zwischen H und U und teilt die Strecke HU innen 2 : 1.

Beispiel:

Gegeben sind S(1, 5) und U(3, 9) eines Dreiecks. Der Höhenschnittpunkt H und die Gleichung der EULERschen Geraden e sind zu ermitteln.

Lösung:

$\overrightarrow{0H} = \overrightarrow{0S} + 2\overrightarrow{US} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ **H(−3, −3)**

$\overrightarrow{SU} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad$ e: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Image: Koordinatensystem mit der Geraden e durch H, S und U.

Beispiel:

Gegeben ist das Dreieck ABC [A(14, 0), B(2, 9), C(−10, −7)]. Inkreismittelpunkt I und Inkreisradius ρ sind zu bestimmen.

Lösung:

Der Inkreismittelpunkt I ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_α und w_β:

w_α: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + \lambda(\overrightarrow{AB}_0$[1] $+ \overrightarrow{AC}_0)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -24 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{144+18} = 15 \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{576+49} = 25$$

$$\overrightarrow{AB}_0 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}_0 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -24 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{24}{25} \\ -\frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}_0 + \overrightarrow{AC}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} - \frac{24}{25} \\ \frac{3}{5} - \frac{7}{25} \end{pmatrix} = \ldots = \frac{4}{25}\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_\alpha}: \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

w_β: $\vec{x} = \overrightarrow{0B} + \mu(\overrightarrow{BA}_0 + \overrightarrow{BC}_0)$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{144+81} = 15 \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{144+256} = 20$$

$$\overrightarrow{BA}_0 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}_0 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

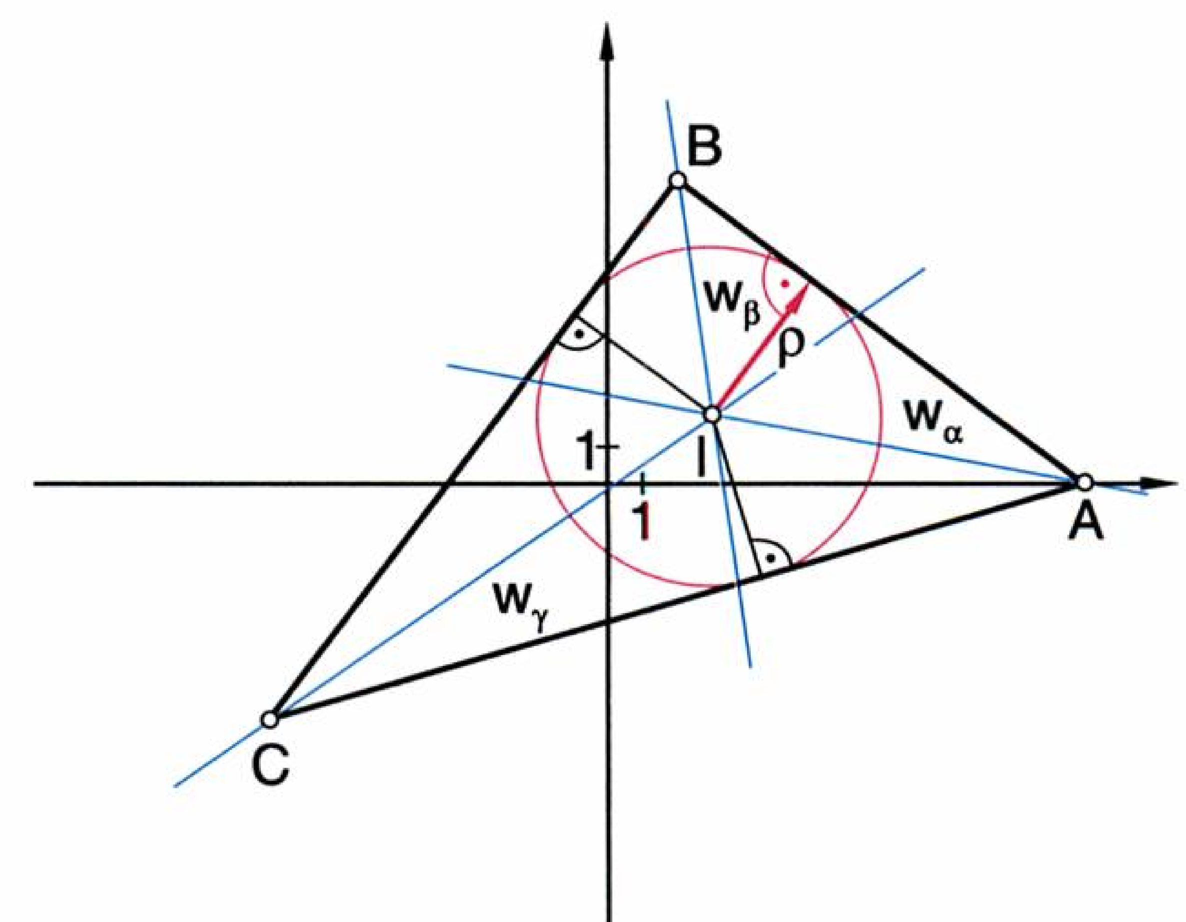
$$\overrightarrow{BA}_0 + \overrightarrow{BC}_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \ldots = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w_\beta}: \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Wir drücken eine Winkelsymmetrale in Parameterform und die andere in Normalvektorform aus:

$$w_\alpha: \begin{cases} x = 14 - 11\lambda \\ y = \quad\;\; 2\lambda \end{cases} \qquad w_\beta: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{7x+y = 14+9 = 23}$$



Der Schnittpunkt der zwei Geraden ist nun leicht zu berechnen:

$$7x + y = 23$$
$$7(14 - 11\lambda) + 2\lambda = 23$$
$$\vdots$$
$$\lambda = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x &= 14 - 11 = 3 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{I(3,\ 2)}$$

Den Inkreisradius ρ berechnet man am schnellsten mit der HNF einer Seite. Der Inkreisradius ist ja der kürzeste Abstand (Normalabstand!) des Inkreismittelpunkts von jeder Dreieckseite. Wir wählen die Seite $\overline{AB}$:

$$\rho = \left|\frac{\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}\right]}{15}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}}{5}\right| = \left|\frac{-33+8}{5}\right| = \left|\frac{-25}{5}\right| = 5 \Rightarrow \boldsymbol{\rho = 5}$$

[1]) Mit $\overrightarrow{AB}_0$ wird der **Einheitsvektor** des Vektors $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.

4. Geraden- und Ebenendarstellung im Raum

Die Parameterform der Geradengleichung im Raum unterscheidet sich von der Parameterform der Geradengleichung in der Ebene nur durch die dritte Koordinate.

Eine Gerade im Raum ist, genauso wie in der Ebene, durch zwei Punkte eindeutig festgelegt. Mit diesen Punkten kann man nun wieder den Orts- und Richtungsvektor bestimmten und in die Vektorgleichung $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$ der Geraden einsetzen.

Beispiel:
Die Gleichung der durch die Punkte A(−4, 3, 1) und B(2, 1, 6) gehenden Geraden ist in Parameter- und Koordinatenform anzugeben.

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-4) \\ 1-3 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -4+6\lambda \\ y &= 3-2\lambda \mid \cdot 3 \quad \cdot 5 \\ z &= 1+5\lambda \qquad\quad \cdot 2 \end{aligned}$$

(erste und zweite Gleichung: +; zweite und dritte Gleichung: +)

$$x + 3y = 5$$
$$5y + 2z = 17$$

Die beiden Gleichungen beschreiben in Koordinatenform eindeutig die Gerade. Der Versuch, die Beziehung durch eine Gleichung darzustellen, scheitert an der Eindeutigkeit.

Bemerkung: Es gibt im Raum keine Geradengleichung in Koordinatenform. Wenn wir die Gerade mit zwei Koordinatengleichungen beschreiben, sind das zwei Ebenen, die einander in einer Geraden schneiden.

Parameterform der Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

- $\vec{x}$: Variable, hier wird nichts eingesetzt
- $\vec{x}_1$: beliebiger Punkt der Ebene
- λ, μ: Parameter, hier wird nichts eingesetzt
- $\vec{a}, \vec{b}$: beliebige Vektoren in Richtung der Ebene (Richtungsvektoren), dürfen nicht parallel sein

Parameterfreie Koordinatenform der Ebenengleichung:

$$ax + by + cz = d$$

oder

$$ax + by + cz + d = 0$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten, x, y, z Variable.

Eine Ebene im Raum ist durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte eindeutig festgelegt. Mit diesen Punkten kann man den Ortsvektor und zwei nicht parallele Richtungsvektoren bestimmen und in die Vektorgleichung $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ der Ebene einsetzen.

Beispiel:
Die Gleichung der durch die Punkte A(4, −1, 10), B(−5, 1, 13) und C(10, 4, 9) gehenden Ebene ist in Parameter- und Koordinatenform anzugeben.

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5-4 \\ 1-(-1) \\ 13-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10-4 \\ 4-(-1) \\ 9-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 4-9\lambda+6\mu \\ y &= -1+2\lambda+5\mu \\ z &= 10+3\lambda-\mu \quad \mid \cdot 6 \quad \mid \cdot 5 \end{aligned}$$

(erste und dritte Gleichung: +; zweite und dritte Gleichung: +) Wir eliminieren zuerst μ

$$\begin{aligned} x + 6z &= 64 + 9\lambda \mid \cdot 17 \\ y + 5z &= 49 + 17\lambda \mid \cdot (-9) \end{aligned}$$

(+) dann λ

$$17x - 9y + 57z = 647$$

AUFGABEN

26. Gegeben sind P und Q. Die Gleichung der Geraden durch P und Q ist in Parameterform zu bestimmen.

a) P(22, –7), Q(–3, –5) **b)** P(–2, –3), Q(3, 5)
c) P(4, 2), Q(11, –7) **d)** P(3, 7), Q(–9, –1)

27. Die folgenden Geraden sind zu zeichnen:

a) $\vec{x}=\binom{-7}{10}+\lambda\binom{5}{4}$ **b)** $\vec{x}=\binom{2}{9}+\lambda\binom{-8}{3}$

28. Gegeben sind P und g. Man bestimme in Parameterform die Gleichungen der Geraden durch P, die normal bzw. parallel zu g sind.

a) P(–3, 14), g: $\vec{x}=\binom{-8}{-2}+\lambda\binom{8}{3}$ **b)** P(4, 5), g: $\vec{x}=\binom{10}{-1}+\lambda\binom{-14}{6}$

c) P(2, –5), g: $\vec{x}=\binom{3}{7}+\lambda\binom{1}{2}$ **d)** P(3, –3), g: $\vec{x}=\binom{2}{5}+\lambda\binom{1}{-3}$

29. Die Lagebeziehung der Geraden g und h ist zu ermitteln.

Bemerkung: Es ist festzustellen, ob die Geraden parallel oder identisch sind. Falls vorhanden, ist der Schnittpunkt S zu bestimmen.

a) g: $\vec{x}=\binom{7}{5}+\lambda\binom{1}{3}$
h: $\vec{x}=\binom{3}{7}+\mu\binom{2}{4}$

b) g: $\vec{x}=\binom{3}{2}+\lambda\binom{1}{3}$
h: $\vec{x}=\binom{7}{13}+\mu\binom{-2}{-6}$

c) g: $\vec{x}=\binom{-4}{5}+\lambda\binom{-7}{3}$
h: $\vec{x}=\binom{-1}{8}+\mu\binom{2}{-3}$

d) g[A(1, 1), B(–2, –2)]
h[P(2, 4), Q(7, –1)]

e) g[A(–5, –2), B(1, 10)]
h[P(–3, 2), Q(2, 12)]

f) g[A(4, 2), B(6, –3)]
h[P(5, 4), Q(11, –7)]

30. Gegeben sind die Trägergeraden eines Dreiecks: $g_1[P_1(0, 5), P_2(4, -7)]$, $g_2[P_3(-6, -1), P_4(6, 5)]$ und $g_3[P_5(-4, -3), P_6(3, 4)]$. Gesucht sind Eckpunkte, Umfang, Flächeninhalt und Innenwinkel des Dreiecks.

Anleitung: Unter Trägergeraden versteht man jene Geraden, auf denen die Dreieckseiten liegen $\Rightarrow g_1 \cap g_2=\{C\}$, $g_1 \cap g_3=\{B\}$, $g_2 \cap g_3=\{A\}$.

31. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P(–1, 2) geht und zur Geraden g: $3x+y=1$ **a)** parallel **b)** normal ist?

32. Die Gerade g ist in parameterfreier Koordinatenform darzustellen. (2 Varianten!)

a) g: $\vec{x}=\binom{7}{3}+\lambda\binom{1}{-3}$ **b)** g: $\vec{x}=\binom{3}{5}+\lambda\binom{2}{-8}$
c) g[A(3, 5), B(2, 7)] **d)** g[P(–2, 3), Q(5, –7)]

33. Die Gerade g ist in vektorieller Parameterform darzustellen. (2 Varianten!)

a) $-3x-5y=8$ **b)** $2x+7y=12$
c) $x-3y=-4$ **d)** $x-14y=-6$

34. Die Lagebeziehung der Geraden g und h ist zu ermitteln.

a) g: $4x-7y=-68$, h: $3x+5y=31$ **b)** g: $3x-7y=10$, h: $3x-7y=14$

c) g: $-3x+y=-16$, h: $-4x+2y=2$ **d)** g: $2x-5y=9$, h: $-4x+10y=-18$

35. Die Lagebeziehung der Geraden g und h ist zu ermitteln.

a) g: $x+5y=-8$, h: $\vec{x}=\binom{3}{1}+\lambda\binom{1}{3}$

b) g: $4x-3y=14$, h: $\vec{x}=\binom{5}{2}+\lambda\binom{-2}{-1}$

c) g: $-5x+7y=2$, h: $\vec{x}=\binom{-3}{2}+\lambda\binom{7}{5}$

d) g: $x+y=11$, h: $\vec{x}=\binom{5}{6}+\lambda\binom{3}{-2}$

36. Gegeben sind g_1: $2x-7y=33$, g_2: $10x-3y=-59$ und g_3: $2x+y=-7$. Die Geraden sind Trägergeraden zweier Seiten und einer Diagonale eines Parallelogramms: $AB \in g_1$, $AD \in g_2$, $BD \in g_3$. Die Summe der Längen der Diagonalen ist zu bestimmen.

37. Gegeben sind die Punkte A, B und C. Die fehlende Koordinate ist so zu bestimmen, dass A, B und C auf einer Geraden liegen. (3 Varianten!)

a) $A(1, y_1)$, $B(2, 1)$, $C(-1, -2)$

b) $A(6, -1)$, $B(x_2, -3)$, $C(-4, -5)$

c) $A(1, -8)$, $B(5, -5)$, $C(x_3, -2)$

d) $A(-6, -3)$, $B(4, 5)$, $C(-1, y_3)$

38. Liegen die Punkte A, B, C auf einer Geraden?

a) A(17, 1), B(2, −12), C(10, −5)

b) A(3, 7), B(−2, 1), C(−5, −4)

c) A(11, −8), B(−2, 5), C(4, −2)

d) A(−5, −2), B(1, −1), C(13, 1)

39. Liegt P auf g?

a) P(2, −5), g: $4x-11y=-47$

b) P(−3, 6), g: $12x+17y=66$

c) P(−4, 5), g: $\vec{x}=\binom{3}{2}+\lambda\binom{-7}{3}$

d) P(10, −1), g: $\vec{x}=\binom{4}{5}+\lambda\binom{14}{-6}$

40. Der Winkel zwischen g und h ist zu bestimmen:

a) g: $\vec{x}=\binom{-2}{3}+\lambda\binom{-5}{1}$, h: $\vec{x}=\binom{-1}{6}+\mu\binom{-4}{-3}$

b) g: $\vec{x}=\binom{-1}{8}+\lambda\binom{1}{2}$, h: $\vec{x}=\binom{3}{-3}+\mu\binom{-2}{-4}$

c) g: $3x-5y=16$, h: $x+y=5$

d) g: $-2x+7y=12$, h: $3x+4y=21$

e) g: $\vec{x}=\binom{-10}{-3}+\lambda\binom{7}{2}$, h: $5x+3y=-8$

f) g: $\vec{x}=\binom{8}{-5}+\lambda\binom{4}{-1}$, h: $x+4y=25$

41. Die Gleichung der Geraden durch P und Q ist in Normalvektorform aufzustellen und in parameterfreie Form umzurechnen.

a) P(12, −4), Q(1, −5)

b) P(2, 7), Q(−3, 5)

c) P(7, 3), Q(−5, 3)

d) P(11, 3), Q(−7, 5)

42. Die Gleichung der Streckensymmetrale zwischen A und B ist in Normalvektorform aufzustellen und in parameterfreie Form umzurechnen.

a) A(−6, −2), B(2, 3)

b) A(3, 4), B(−1, −6)

c) A(−6, −1), B(6, 1)

d) A(−3, 9), B(−3, 2)

43. Gesucht ist die Gleichung der Normalen durch P(2, 2) auf die Gerade g: $\vec{x}=\binom{1}{-5}+\lambda\binom{6}{3}$.

44. Die Gleichung der Geraden g[P, Q] ist in HNF aufzustellen.

a) P(13, −7), Q(5, 9)

b) P(11, −2), Q(11, 12)

c) P(−9, 4), Q(12, 11)

d) P(17, −13), Q(−11, −5)

45. Abstand des Punktes P von der Geraden g?

a) P(11, −14), g: $\vec{x}=\binom{-3}{2}+\lambda\binom{4}{5}$

b) P(1, −18), g: $7x-2y=9$

c) P(17, 12), g[A(−1, 6), B(3, −4)]

d) P(−4, −8), g[A(−3, 9), B(4, −2)]

46. Wie lang sind im Parallelogramm ABCD [A(−3, −2), B(5, −4), C, D(−1, 2)] die Höhen?

47. C(−4, 9) ist die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ABC, dessen Basis auf der Geraden g: $2x - 5y = 34$ liegt. Die Länge der Basis beträgt $\frac{2}{3}$ der Höhe auf c. Fehlende Koordinaten der Eckpunkte?

48. Welcher Punkt der Strecke AB [A(5, 6), B(7, −2)] hat von der Geraden g[C(−4, 2), D(3, −5)] den Normalabstand $\sqrt{50}$?

49. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \binom{3}{10} + \lambda\binom{1}{-1}$ und h: $\vec{x} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{10}{1}$. Wie lauten die Koordinaten der Mittelpunkte jener Kreise mit dem Radius $r = \frac{44}{\sqrt{101}}$, die auf g liegen und h berühren?

50. Gegeben sind g[P(−6, −5), Q(10, −9)], h: $\vec{x} = \binom{4}{2} + \lambda\binom{7}{3}$, ℓ: $6x + 5y = -4$ und $h_c = \frac{19}{\sqrt{17}}$. Die Geraden g, h, ℓ sind Trägergeraden des Trapezes ABCD mit der Höhe h_c ($AB \subset g$, $AD \subset h$, $BC \subset \ell$). Flächeninhalt des Trapezes? (2 Lösungen!)

51. A(−5, −6), D(1, 2) sind Eckpunkte einer Raute ABCD, deren Seite a parallel zur Geraden g: $\vec{x} = \binom{0}{-5} + \lambda\binom{4}{3}$ liegt. Man bestimme die Koordinaten von B und C? (2 Lösungen!)

52. Die folgenden Geraden sind auf alle möglichen Arten darzustellen.

a) $3x - 2y = 7$ **b)** $\vec{x} = \binom{1}{5} + \lambda\binom{1}{7}$ **c)** g [A(−1, 2), B(3, 2)]

53. Die Strecke AB [A(x_1, 1), B(x_2, y_2)] mit der Länge 20 ist Basis des gleichschenkeligen Dreiecks ABC und liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \binom{-2}{-5} + \lambda\binom{4}{-3}$. C liegt auf der y-Achse. Umfang u des Dreiecks? (2 Lösungen!)

54. Im Dreieck ABC liegen die Seiten a, b, c auf der Geraden $g_{(a)}$: $\vec{x} = \binom{4}{-5} + \lambda\binom{-1}{5}$, $g_{(b)}$: $\vec{x} = \binom{-3}{-2} + \mu\binom{5}{7}$, $g_{(c)}$: $\vec{x} = \binom{4}{-5} + \omega\binom{7}{-3}$. Koordinaten von A, B und C?

55. Im Dreieck ABC [A(6, −2), B(0, 2), C(5, −10)] sind die Längen der Höhen zu bestimmen.

56. AC [A(−5, −2), C(4, 1)] ist die Diagonale eines Quadrats ABCD. Man bestimme die Koordinaten von B und D?

57. Der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC ist auf zwei Arten zu berechnen.

a) A(−3, 1), B(1, −2), C(2, 4) **b)** A(7, −12), B(1, 1), C(4, 2)

Anleitung: Der Schwerpunkt lässt sich auch mit Hilfe der Schwerlinien berechnen.

Schwerpunkt:

$\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C})$

58. Gegeben ist das Dreieck ABC. Koordinaten des Höhenschnittpunkts H?

a) A(−4, −1), B(4, −1), C(−2, 5) **b)** A(−3, 1), B(2, −4), C(4, 0)

59. Gegeben ist das Dreieck ABC. Man bestimme die Längen der Höhen h_a, h_b und h_c.

a) A(−2, −1), B(2, −1), C(0, 3) **b)** A(−1, −3), B(5, 5), C(−4, 1)

60. Gegeben ist das Dreieck ABC. Man berechne die Längen der Höhenabschnitte auf der Seite c.

a) A(−1, −3), B(5, 5), C(−4, 1) **b)** A(−3, 3), B(2, −2), C(1, 3)

61. Gegeben ist das Dreieck ABC. Koordinaten der Fußpunkte der Höhen?

a) A(−3, 1), B(−2, 5), C(2, −4) **b)** A(−6, −3), B(9, 5), C(−4, 6)

62. Gegeben ist das Dreieck ABC. Man berechne die durch die Fußpunkte der Höhen bestimmten Seitenabschnitte.

a) A(−7, 5), B(2, −5), C(6, 3) **b)** A(−4, 5), B(−8, −5), C(−1, −2)

63. Es ist zu zeigen, dass das Dreieck ABC rechtwinkelig ist. Länge der Seiten, Länge der Hypotenusenabschnitte?

a) A(−1, −2), B(3, 1), C(1, 2) **b)** A(−2, −1), B(4, 1), C(2, 3)

64. Gegeben ist das Dreieck ABC. Umkreismittelpunkt U und Umkreisradius r?

a) A(2, 1), B(−3, 2), C(−1, 1) **b)** A(−3, 1), B(3, −3), C(1, 3)

65. Gegeben ist das Dreieck ABC. Wie viel Prozent der Umkreisfläche werden von der Dreiecksfläche eingenommen?

a) A(−5, 1), B(−1, 5), C(1, −1) **b)** A(−4, −3), B(2, −5), C(−2, 1)

66. Gegeben ist das Dreieck ABC. Man bestimme S, H, U und die Gleichung der EULERschen Gerade e.

a) A(−2, −3), B(6, −3), C(−4, 3) **b)** A(−1, −1), B(3, −1), C(1, 1)

Anleitung: Zuerst sollen S und H bestimmt werden. Dann wird mit Hilfe der Beziehung $-2\,\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{SH}$ der Umkreismittelpunkt U berechnet.

67. Die Trägergeraden eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c sind gegeben: a: $3x - 4y = 25$, b: $5x + 12y = 65$, c: $8x + 15y = 6 - 85$. Mittelpunkt I und Radius ρ des Inkreises?

68. Gegeben ist das Dreieck ABC. Inkreismittelpunkt I und Inkreisradius ρ?

a) A(−3, −5), B(9, 4), C(−3, 9) **b)** A(−1, −1), B(3, −1), C(1, 1)

69. Gegeben ist das Dreieck ABC. Die Koordinaten der Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten sind zu berechnen.

a) A(−2, −1), B(2, −1), C(0, 3) **b)** A(−1, −3), B(5, 5), C(−4, 1)

70. Die Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B ist in Parameterform und in parameterfreier Koordinatenform darzustellen.

a) A(7, −2, 9), B(−11, 4, 1) **b)** A(13, −5, 21), B(7, 15, −3)

c) A(28, −13, 24), B(69, 40, −71) **d)** A(−120, 42, 66), B(120, −42, −66)

71. Die Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C ist in Parameterform und in parameterfreier Koordinatenform darzustellen.

a) A(3, −1, 4), B(0, 1, 2), C(−2, 2, 5) **b)** A(−7, −3, −5), B(1, −2, 9), C(−4, 12, −3)

b) A(28, 9, 86), B(15, 48, 21), C(20, 1, 78) **d)** A(44, −23, 30), B(19, 7, −5), C(35, −5, −6)

72. Aus einem Hausübungsheft (Die Gleichung der Ebene durch die Punkte P, Q und R war zu bestimmen.):

P(3, −2, 11), Q(8, −3, 4), R(4, 5, 0)

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Was ist davon zu halten?

Vermischte Aufgaben

73. Gegeben sind der Punkt P (2, 0, 4) und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

a) Es ist zu zeigen, dass P nicht auf g liegt.

b) Die Ebene ε enthält P und g. Man gebe eine Koordinatengleichung von ε an.

c) Welchen Abstand hat der Punkt $Q\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ von der Geraden g ?

74. Gegeben sind die Punkte P (–2, –2, 1), Q (3, 2, 3) und R (–1, 2, –5).

a) Die Gerade g geht durch die Punkte P und Q, die Gerade h durch die Punkte Q und R. Geradengleichungen?

b) Man stelle eine Koordinatengleichung der Ebene ε auf, die den Punkt P und die Gerade h enthält.

75. Gegeben sind die Punkte P (9, 0, 0), $Q\left(0, \frac{9}{2}, 0\right)$ und $R\left(0, 0, \frac{9}{2}\right)$ sowie die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

a) Die Punkte P, Q und R liegen in der Ebene ε. Man stelle eine Koordinatengleichung dieser Ebene auf.

b) Die Gerade g schneidet die Ebene ε im Punkt S. Man bestimme die Koordinaten von S.

76. Die Ebene ε_1 enthält die Punkte A(1, 1, 3), B(0, –2, 7) und C(4, –4, 12). Die Punkte D(1, 2, 3), E (2, –1, 3) und F(3, 0, 2) liegen auf der Ebene ε_2.

a) Man bestimme je eine Koordinatengleichung von ε_1 und ε_2.

b) Man bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden g von ε_1 und ε_2.

77. Gegeben sind die Punkte A (3, 1, 3), B (0, 2, 4) und C (–6, 5, 5), die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ und die Ebene $\varepsilon_1: 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0$. Die Ebene ε_2 enthält die Punkte A, B und C.

a) Man berechne die Koordinaten des Schnittpunkts von g und ε_1.

b) Man bestimme eine Koordinatengleichung von ε_2.

c) Man untersuche die Lage von g zu ε_2.

d) Die Ebene ε_2 schneidet die x-Achse in S_x, die y-Achse in S_y und die z-Achse in S_z. Die Koordinaten von S_x, S_y, S_z sind anzugeben.

78. Gegeben sind die Punkte A (4, 3, 4), B (5, 4, 4) und C (4, 4, 6) sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

a) Man stelle eine Koordinatengleichung der durch A, B und C gehenden Ebene ε auf.

b) Man bestimme den Schnittpunkt S von g und ε.

c) Man berechne den Abstand des Punktes D (6, –6, 9) von der Ebene.

d) Welchen Abstand hat der Punkt D von der Geraden g?

79. Gegeben sind die Ebene $\varepsilon_1: 5x + 4y + 3z = -20$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Die Ebene ε_2 enthält die Punkte A (3, 8, 1), B (3, 5, 5) und D (8, 4, –2).

a) Man untersuche, ob der Punkt A auf der Geraden g liegt.

b) Man bestimme den Schnittpunkt von g und ε_1.

c) Es ist zu zeigen, dass die Ebenen ε_1 und ε_2 parallel sind.

80. Das Rechteck ABCD besitzt die Eckpunkte A (x, 4, 0), B (– 5, 3, – 1) und C (– 6, 1, 1).

a) Es ist die fehlende Koordinate des Eckpunkts A zu bestimmen.

b) Wie groß ist der Flächeninhalt von ABCD?

81. Gegeben ist der Rhombus ABCD [(0, 1, 2), B (2, 1, 6) und D (2, 5, 2)].

a) Man berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts.

b) Wie groß ist der Flächeninhalt von ABCD?

82. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel in C kennt man A (– 2, y, – 5), B (1, 5, 5) und C (4, 2, – 2). Dieses Dreieck ist die Basis eines geraden Prismas mit der Höhe $h = \frac{1}{10}\sqrt{3082}$.

a) Man berechne die fehlende Koordinate des Eckpunktes A der Prismagrundfläche.

b) Man berechne die Oberfläche dieses Prismas.

c) Man berechne das Volumen dieses Prismas.

83. Das Dreieck ABC [A (2, 6, 0), B (2, – 2, 0), C (– 5, – 1, – 2)] bildet die Grundfläche einer geraden dreiseitigen Pyramide mit der Höhe h = 5. Wie groß ist **a)** die Oberfläche O **b)** das Volumen V dieser Pyramide?

84. Eine dreiseitige Pyramide ist durch die Punkte A (– 5, 2, – 3), B (20,17, 0), C (14, 9, – 7) und S (16, 11, 21) festgelegt und wird von der Ebene ε: 7x + 3y + 8z = d geschnitten, die durch den Punkt B geht.

a) Wie lauten die Koordinaten der Punkte X und Y, in denen die Pyramidenkanten und die Ebene einander schneiden?

b) Man berechne Länge der Strecke XY.

85. Das Dreieck ABC [A (1, 2, 3), B (5, – 2, 1), C (3, 6, – 1)] ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide. Die Höhe beträgt 6 Längeneinheiten. Man berechne das Volumen der Pyramide.

86. Von einem Rechteck ABCD kennt man die Koordinaten der Eckpunkte A (4, – 6, 14), B (x > 0, – 2, 12) und C (2, 2, 16). Dieses Rechteck ist die Grundfläche eines Quaders mit der Höhe $h = \sqrt{18}$.

a) Man berechne die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte der Grundfäche.

b) Wie verhalten sich Länge und Breite des Quaders zueinander?

c) Man berechne das Volumen des Quaders.

87. Von einem Rechteck ABCD kennt man A (2, – 3, 7), B (0, – 1, 6) und C (1, 1, z). Dieses Rechteck ist die Basis einer Pyramide mit der Höhe $h = \frac{9}{4}$.

a) Man berechne die Koordinaten von C und D.

b) Wie groß ist das Volumen dieser Pyramide?

88. Das Dreieck ABC [A (– 4, 0, 7), B (2, – 12, – 5), C (– 2, 14, 12)] ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S (14, – 3, 19). Man ermittle

a) die Gleichung der die Punkte A, B und C enthaltenden Ebene ε in Parameterdarstellung und in parameterfreier Form,

b) die Koordinaten des Höhenfußpunktes H_F der Pyramide und

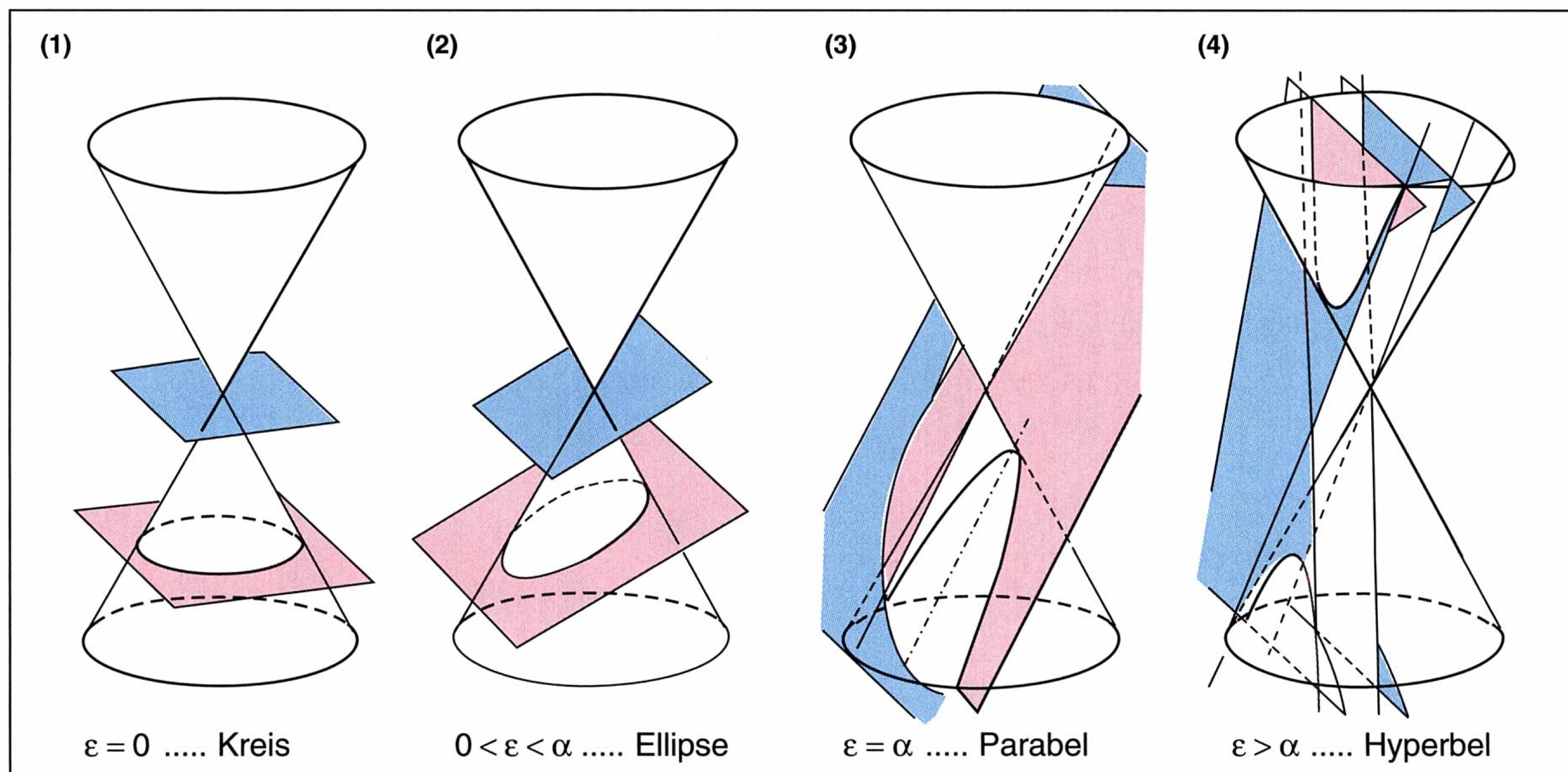
c) das Volumen der Pyramide.

KEGELSCHNITTE

Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel werden **Kegelschnitte** genannt, weil man sie — wie die folgenden Figuren zeigen — als Schnitte einer Ebene mit einem Drehkegel erhält.

Zur Klassifizierung der Kegelschnitte ist es hinreichend, den jeweiligen Neigungswinkel ε der Schnittebene mit dem Basiswinkel α des Kreiskegels, das ist der Neigungswinkel der Mantellinie gegenüber der Basis, zu vergleichen.

Wie die Figuren zeigen ist es der Schnittebene in den Fällen **(1)** bis **(3)** unmöglich, den oberen Kegel zu durchdringen. Daher können Kreis, Ellipse und Parabel niemals einen „zweiten" Ast haben. Der obere Kegel ist daher erst bei Fall **(4)** (Hyperbel) von Bedeutung.



$\varepsilon = 0$ ..... Kreis $0 < \varepsilon < \alpha$ ..... Ellipse $\varepsilon = \alpha$ ..... Parabel $\varepsilon > \alpha$ ..... Hyperbel

1. Kreis

Mittelpunktsgleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Aus der Mittelpunktsgleichung des Kreises erhält man durch Umformung:

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ..... für den oberen Halbkreis

$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ ..... für den unteren Halbkreis

Definition:

Die Menge k aller Punkte der Ebene, welche von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben, heißt **Kreis** mit Mittelpunkt M und Radius r:

$k = \{X \mid \overline{XM} = r\}$

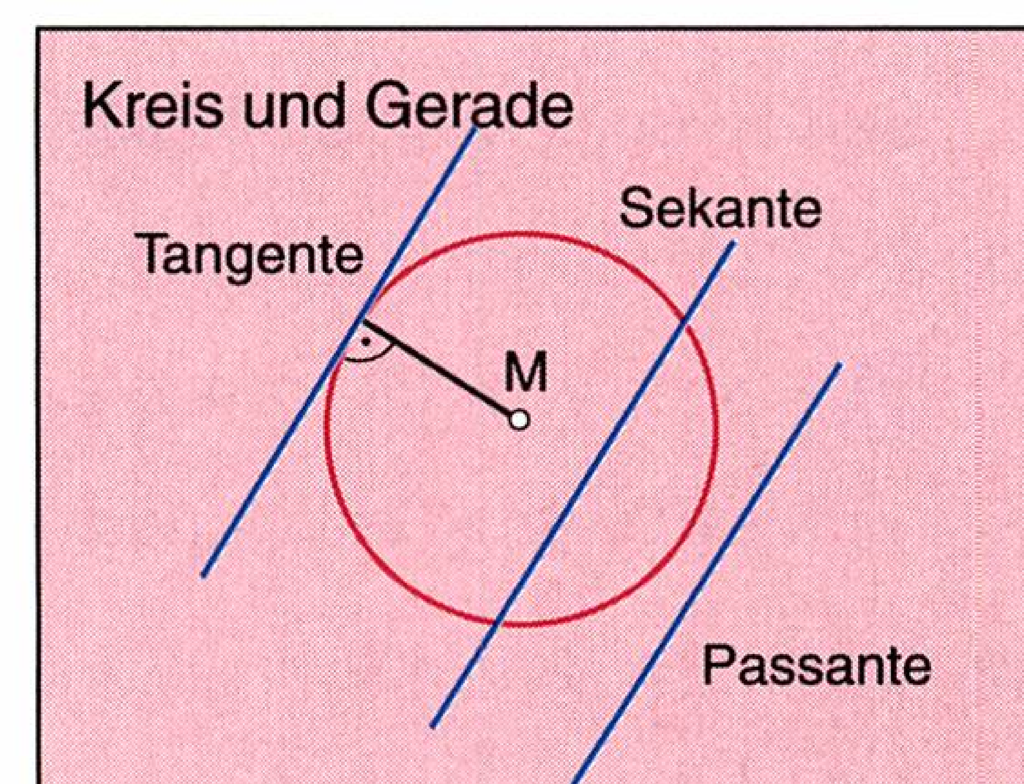
Für jeden Winkel φ gilt $x = r \cdot \cos\varphi$ bzw. $y = r \cdot \sin\varphi$.
Wir können für den Kreis daher folgende Parameterdarstellung angeben:

$$k: \begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

Wir wollen nun nachstehende Fragen klären:

— Wie steht es mit der Lagebeziehung Kreis–Gerade ?

— Gibt es eine Möglichkeit, ein Instrumentarium, diese Lagebeziehung rasch und allgemeingültig abzuklären ?



Beispiel:

Gegeben sind der Kreis $k: x^2 + y^2 = r^2$ und die Gerade $g: y = kx + d$.

a) Man leite die Beziehung zwischen t, k, d her, sodass $k \cap g$ genau zwei Elemente, genau ein Element bzw. kein Element enthält.

b) Weiters ist die Bedingung für genau zwei Schnittpunkte, genau einen Schnittpunkt (= Berührungspunkt) bzw. keinen Schnittpunkt anzugeben.

Lösung:

a) (1) $x^2 + y^2 = r^2$

(2) $y = kx + d \Rightarrow y^2 = k^2x^2 + 2dkx + d^2$

Gleichung (2) wird in Gleichung (1) eingesetzt :

$x^2 + k^2x^2 + 2dkx + d^2 - r^2 = 0$

$(1 + k^2)\,x^2 + 2dkx + d^2 - r^2 = 0$

Es liegt nun die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ vor.

$(a = 1 + k^2,\ \ b = 2dk,\ \ c = d^2 - r^2)$

Die Diskriminante $b^2 - 4ac$ entscheidet über die Anzahl der Lösungen.

Diskriminante:

$4k^2d^2 - 4(1 + k^2)(d^2 - r^2) = 4(\cancel{k^2d^2} - d^2 - \cancel{k^2d^2} + r^2 + r^2k^2)$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems hat

zwei Elemente für: $r^2(1+k^2) - d^2 > 0$

ein Element für: $r^2(1+k^2) - d^2 = 0$

kein Element für: $r^2(1+k^2) - d^2 < 0$

b) Die Bedingung für die Existenz von genau zwei Schnittpunkten lautet:

$r^2\,(1+k^2) > d^2 \Rightarrow g$ ist Sekante

Die Bedingung für die Existenz von genau einem Schnittpunkt (Berührbedingung) lautet:

$r^2\,(1+k^2) = d^2 \Rightarrow g$ ist Tangente

Die Bedingung, dass kein Schnittpunkt existiert, lautet:

$r^2\,(1+k^2) < d^2 \Rightarrow g$ ist Passante

AUFGABEN

89. Liegt der Punkt **a)** $P_1(1, 2)$, **b)** $P_2(-2, 0)$ auf dem Kreis $k: x^2 + y^2 = 4$? (Rechnerische Begründung!)

90. Man ermittle die Gleichung jenes Mittelpunktskreises, der durch den Punkt **a)** A (3, – 4), **b)** B (– 8, – 15) geht.

Bemerkung: Mittelpunktskreise sind Kreise, deren Mittelpunkte im Ursprung liegen.

91. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 des Kreises k mit der Geraden g sind zu bestimmen.

a) $k: x^2 + y^2 = 34,\ g: 4y + x - 17 = 0$

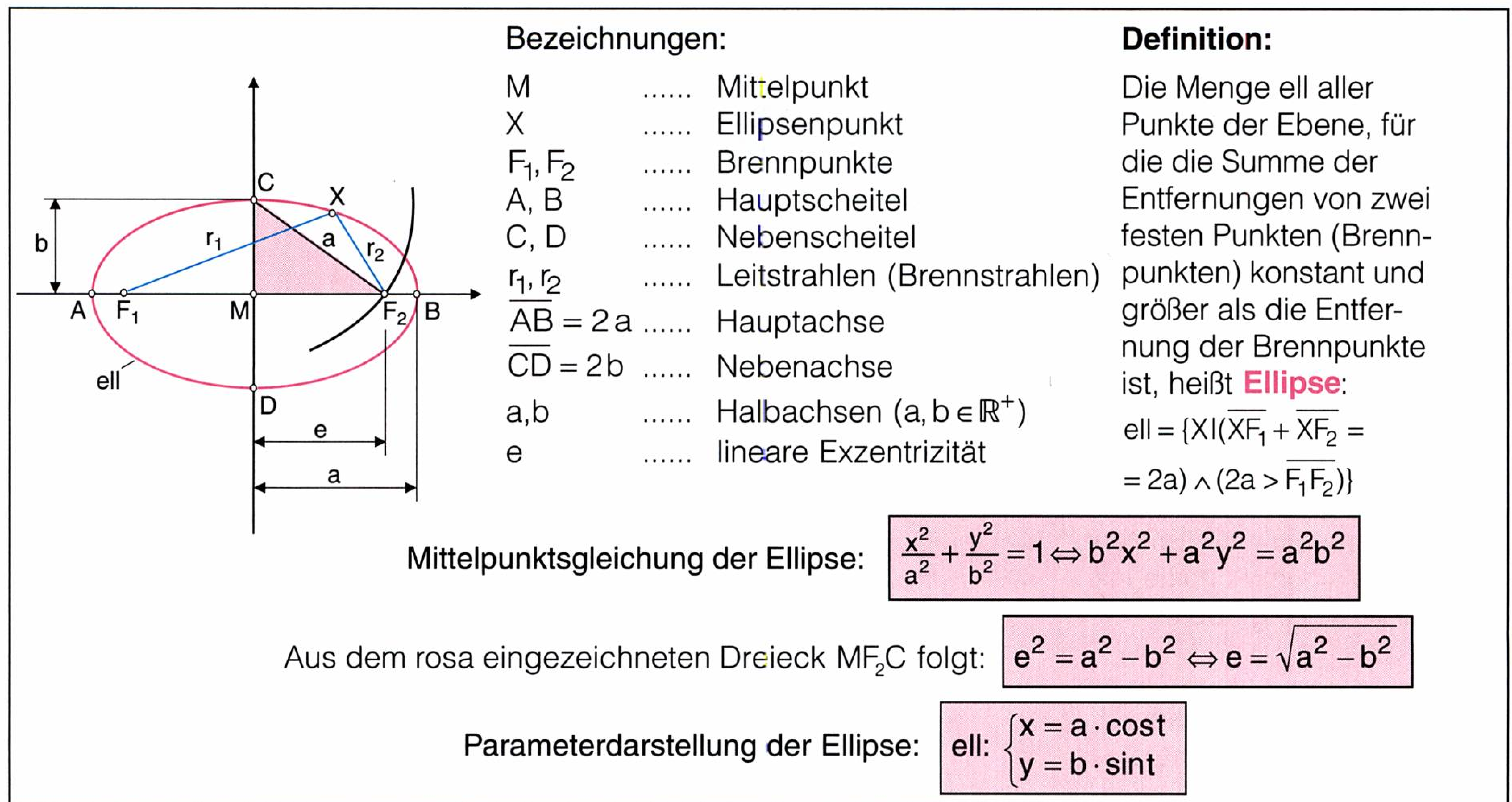
b) $k: x^2 + y^2 = 1369,\ g: 23y - 47x = 136$

c) $k[M(0,0), r = 25],\ g: 9y = -13x + 125$

d) $k: x^2 + y^2 = 61,\ g\,[X(4, 17), Y(7, -16)]$

92. Durch den Punkt $P_1(-7, y > 0)$ des Kreises $k: x^2 + y^2 = 65$ ist eine Sehne zu ziehen, welche den Anstieg $k = -1$ hat. Die Gleichung der Sehne und die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts sind zu berechnen.

2. Ellipse



Bezeichnungen:

M	......	Mittelpunkt
X	......	Ellipsenpunkt
F_1, F_2	......	Brennpunkte
A, B	......	Hauptscheitel
C, D	......	Nebenscheitel
r_1, r_2	......	Leitstrahlen (Brennstrahlen)
$\overline{AB} = 2a$	......	Hauptachse
$\overline{CD} = 2b$	......	Nebenachse
a,b	......	Halbachsen ($a, b \in \mathbb{R}^+$)
e	......	lineare Exzentrizität

Definition:

Die Menge ell aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten (Brennpunkten) konstant und größer als die Entfernung der Brennpunkte ist, heißt **Ellipse**:

$ell = \{X \mid (\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a) \wedge (2a > \overline{F_1F_2})\}$

Mittelpunktsgleichung der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Aus dem rosa eingezeichneten Dreieck MF_2C folgt: $e^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2}$

Parameterdarstellung der Ellipse: ell: $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$

Herleitung der Mittelpunktsgleichung:

$$\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$$

$$\underbrace{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}_{r_1} = 2a - \underbrace{\sqrt{(x+e)^2 + y^2}}_{r_2} \quad \text{| Quadrieren, vgl. (1)}$$

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = a^2 + ex \quad \text{| Quadrieren, vgl. (2)}$$

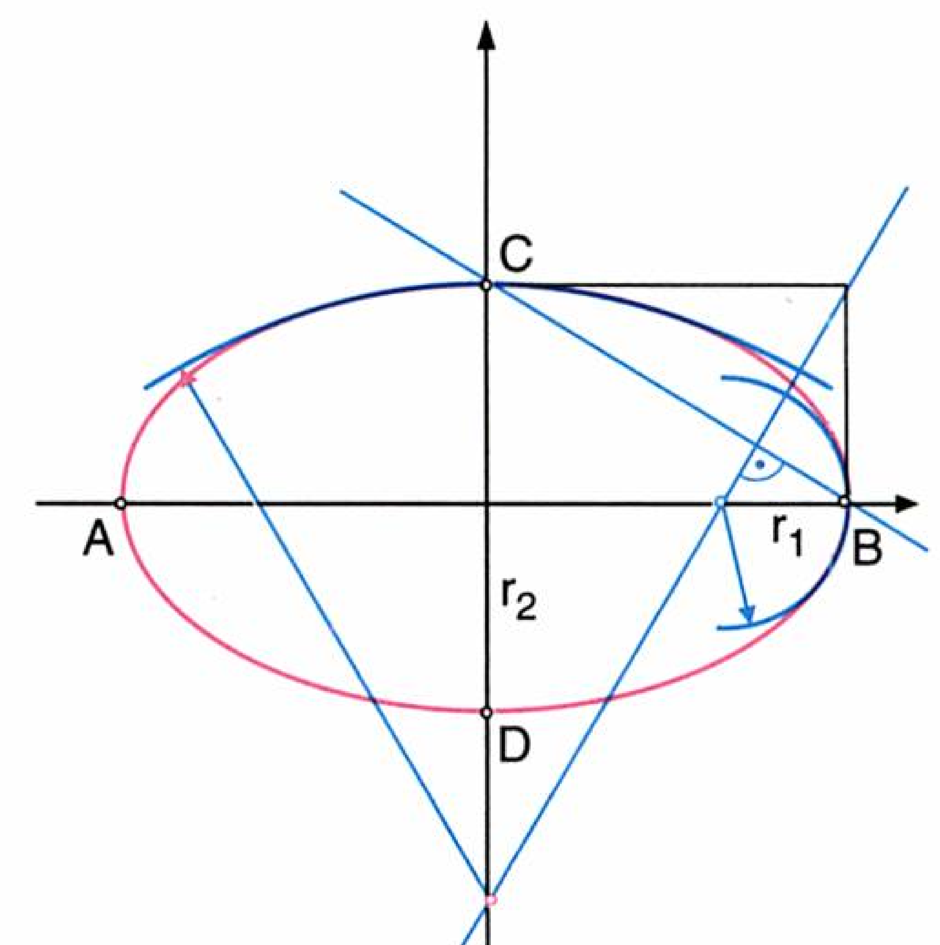
$$a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) = a^4 + 2a^2ex + e^2x^2$$

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad \text{| Es gilt: } a^2 - e^2 = b^2 \text{ für } a > b$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Um eine Ellipse zu zeichnen ist es vorteilhaft, die sogenannten **Krümmungskreise** zu konstruieren – vgl. die in der nachstehenden Figur blau gekennzeichneten Linien:



Durch Umformung ergibt sich die explizite Form der Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ für die obere Ellipsenhälfte und $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ für die untere Ellipsenhälfte.

Man beachte dass Quadrieren keine Aquivalenzumformung ist. Es sind daher zur obigen Herleitung noch folgende Überlegungen anzustellen:

(1) $T_L = r_1 > 0$, $T_R = 2a - r_2$, weil $2a = r_1 + r_2 \Rightarrow 2a > r_2$

(2) $T_L = a \cdot r_2 > 0$, weil $a > 0$ und $r_2 > 0$

Es muss daher gelten: $T_R = a^2 + ex \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{a^2}{e}$

Dies ist für $x \geqslant -a$ erfüllt, da $x \geqslant -a \geqslant -\frac{a}{e} \cdot a \quad \left(\frac{a}{e} > 1\right)$

Erst mit den nebenstehenden Überlegungen ist bewiesen, dass die Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ genau dann erfüllt ist, wenn die Punkte X(x, y) auf der Ellipse ell liegen.

Ellipse und Gerade

Tangente — Sekante — M — Passante

Die Bedingung für die Existenz von genau zwei Schnittpunkten lautet:

$a^2k^2 + b^2 > d^2$

Die Bedingung für die Existenz von genau einem Schnittpunkt (Berührbedingung) lautet:

$a^2k^2 + b^2 = d^2$

Die Bedingung, dass kein Schnittpunkt existiert, lautet:

$a^2k^2 + b^2 < d^2$

Beispiel:

Gegeben sind die Ellipse ell: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und die Gerade $g: y = kx + d$

Man leite die Beziehung zwischen a, b, k, d her, sodass ell $\cap$ g genau zwei Elemente, genau ein Element bzw. kein Element enthält.

Lösung:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

(2) $y = kx + d \Leftrightarrow y^2 = k^2x^2 + 2kdx + d^2$

Gleichung **(2)** wird in Gleichung **(1)** eingesetzt:

$(b^2 + a^2k^2)\,x^2 + 2a^2kdx + a^2d^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (b^2 + a^2k^2 \neq 0)$

Diskriminante: $4a^4d^2k^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2d^2 - a^2b^2) =$

$= 4a^2b^2[b^2 + a^2k^2 - d^2]$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems hat

zwei Elemente für : $a^2k^2 + b^2 - d^2 > 0$

ein Element für : $a^2k^2 + b^2 - d^2 = 0$

kein Element für : $a^2k^2 + b^2 - d^2 < 0$

AUFGABEN

93. Liegt der Punkt **a)** K(6, 4) **b)** L(4, –3) auf der Ellipse ell: $4x^2 + 7y^2 = 256$? (Rechnerische Begründung!)

94. Man ermittle die Gleichung der Ellipse, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt:

a) $a = 5, b = 8$ **b)** $b = 4, e = 3$

95. Man berechne die lineare Exzentrizität e:

a) ell: $9x^2 + 25y^2 = 900$ **b)** ell: $25x^2 + 81y^2 = 2025$

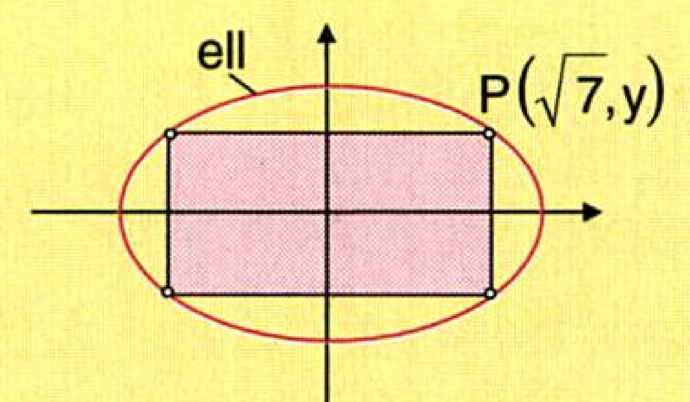
c) ell [M (0, 0), $a = 2\sqrt{5}$, P(4, 1)] **d)** ell [M (0,0), $b = \frac{10}{3}$, Q(–4, 2)]

96. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Ellipse ell mit der Geraden g sind zu bestimmen!

a) ell: $4x^2 + y^2 = 100$, g: $y = 14x - 50$ **b)** ell: $x^2 + 4y^2 = 169$, g: $3y = -x + 13$

c) ell: $x^2 + 4y^2 = 25$, g[Q(1, 0), k = – 0,5] **d)** ell: $4x^2 + y^2 = 100$, g[P_1(0,0), P_2(–3, –8)]

97. Der Ellipse ell: $9x^2 + 16y^2 = 144$ ist ein Rechteck mit der Seitenlänge $a = 2\sqrt{7}$ einzuschreiben. **a)** Flächeninhalt A **b)** Umfang u des Rechtecks?



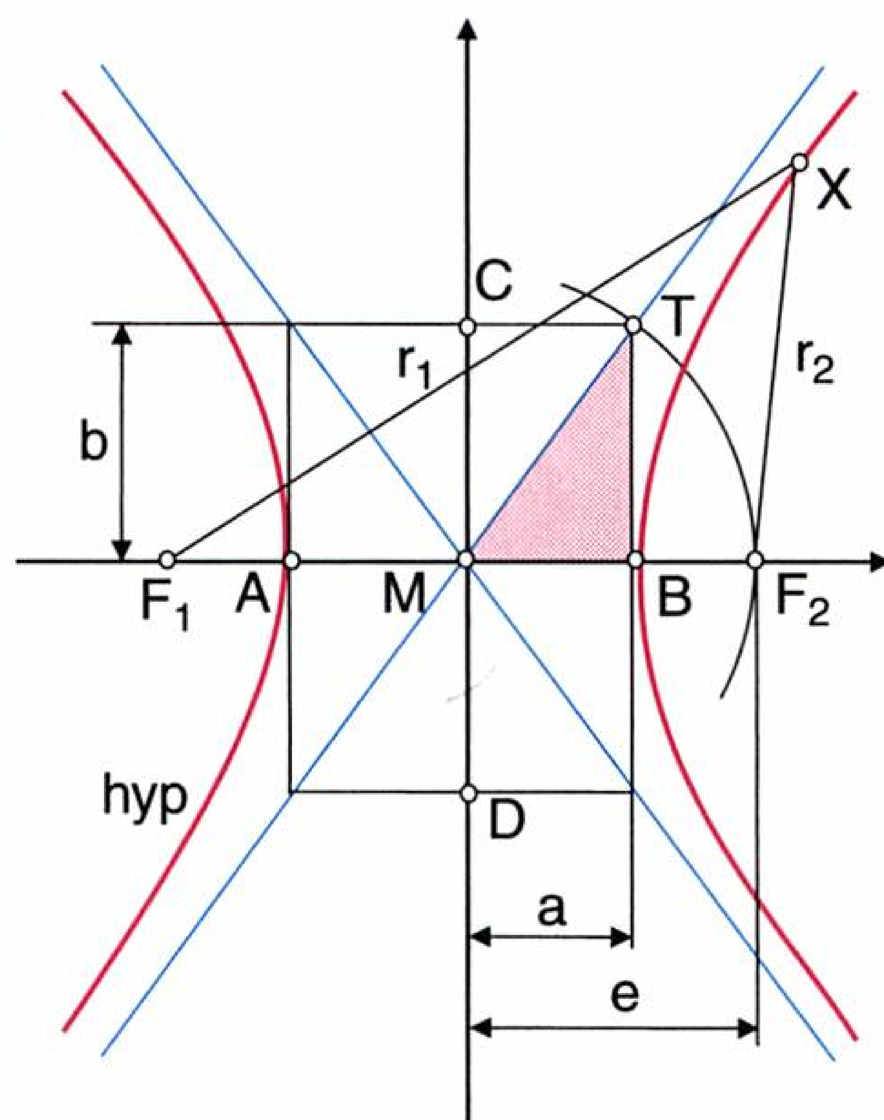
98. Der Ellipse ell: $2x^2 + 3y^2 = 20$ ist ein Quadrat einzuschreiben. **a)** Flächeninhalt A **b)** Umfang u des Quadrats?

99. Die Schnittpunkte des Kreises k: $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ellipse ell [M (0, 0) a = 6, b = 2)] sind zu berechnen.

100. Wie lautet die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, die durch die Punkte A (15, 16) und B(20, 12) geht?

Bemerkung: Der Mittelpunkt der gesuchten Ellipse soll im Ursprung liegen.

3. Hyperbel



Bezeichnungen:

M	.....	Mittelpunkt
X	.....	Hyperbelpunkt
F_1, F_2	.....	Brennpunkte
A,B	.....	Hauptscheitel
C,D	.....	Endpunkte der Nebenachse
r_1, r_2	.....	Leitstrahlen (Brennstrahlen)
$\overline{AB} = 2a$	.....	Hauptachse
$\overline{CD} = 2b$	.....	Nebenachse
a,b	.....	Halbachsen ($a, b \in \mathbb{R}^+$)
e	.....	lineare Exzentrizität

Definition:

Die Menge hyp aller Punkte der Ebene, für die der Betrag der Differenz der Entfernung von zwei festen Punkten (Brennpunkten) konstant und kleiner als die Entfernung der Brennpunkte ist, heißt **Hyperbel**:

$$\text{hyp} = \{X \mid (|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a) \wedge (2a < \overline{F_1F_2})\}$$

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Aus dem rosa eingezeichneten Dreieck MBT folgt: $e^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2}$

Parameterdarstellung der Hyperbel:[1] $\text{hyp: } \begin{cases} x = a \cdot \cosh t \\ y = b \cdot \sinh t \end{cases}$

Herleitung der Mittelpunktsgleichung:

$$|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2}\right| = 2a$$

$$(1)\ \sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$$

$$\vee\ (2)\ \sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = -2a$$

ad (1)
$$\underbrace{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}_{\geq 0} = \underbrace{2a}_{>0} + \underbrace{\sqrt{(x+e)^2 + y^2}}_{\leq 0} \quad |\text{Quadrieren}$$

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2$$

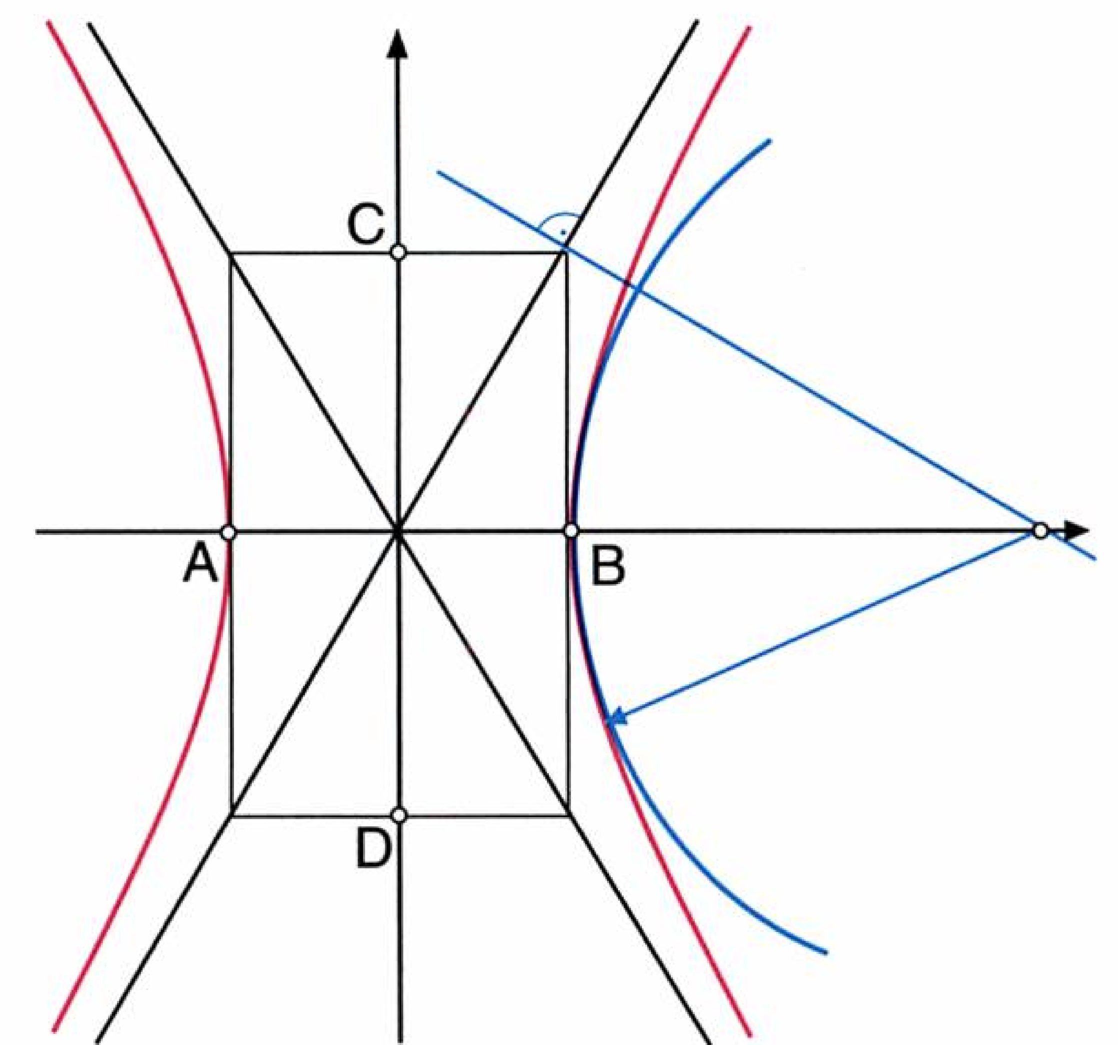
$$\underbrace{-a\sqrt{(x+e)^2 + y^2}}_{\leq 0} = a^2 + ex \text{ [2]} \quad |\text{Quadrieren}$$

$$a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2) = a^4 + 2a^2ex + e^2x^2$$

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad |a^2 - e^2 = -b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Auch für das Zeichnen einer Hyperbel sind **Krümmungskreise** hilfreich:



Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ad **(2)** wird analog für $x \geq a$ bestimmt. Durch Umformung ergibt sich die explizite Form der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ für den oberen Teil der Hyperbel und $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ für den unteren Teil der Hyperbel.

Man beachte auch hier, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Es sind daher analoge Überlegungen wie bei der Herleitung der Ellipsengleichung anzustellen.

[1]) In dieser Parameterdarstellung treten **Hyperbelfunktionen** auf.

[2]) $a^2 + ex \leq 0$ für $x \leq a$ erfüllt: $x \leq a \leq -a\frac{a}{e} \leq -\frac{a^2}{e}$ $\left(\frac{a}{e} < 1\right)$.

Wir wollen an dieser Stelle als Exkurs die sogenannten **Hyperbelfunktionen** und deren Umkehrung[1] besprechen:

Hyperbelsinus (Sinus hyperbolicus)

Definition:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Funktion mit der Gleichung $y = \sinh x$, der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, der Wertemenge $W = \mathbb{R}$ (ungerade Funktion).

Hyperbelkosinus (Cosinus hyperbolicus)

Definition:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Funktion mit der Gleichung $y = \cosh x$, der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, der Wertemenge $W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ (gerade Funktion).

Hyperbeltangens (Tangens hyperbolicus)

Definition:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Funktion mit der Gleichung $y = \tanh x$, der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, der Wertemenge $W =]-1, 1[$ (ungerade Funktion).

Man beachte: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Weiters gilt folgender Zusammenhang:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Ableitung von Hyperbelfunktionen:

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Integration von Hyperbelfunktionen:

$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$

$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\tanh x} + C$

$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$

Beispiel:

Es sind die Werte x in den nachstehenden Gleichungen zu ermitteln:
a) $x = \sinh 3{,}8$ **b)** $x = \cosh 1$ **c)** $x = \tanh(-1{,}8)$

Lösung:

a) $x = \sinh 3{,}8 = \frac{e^{3,8} - e^{-3,8}}{2} = 22{,}3394$ $x = 22{,}3394$

b) $x = \cosh 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = 1{,}5431$ $x = 1{,}5431$

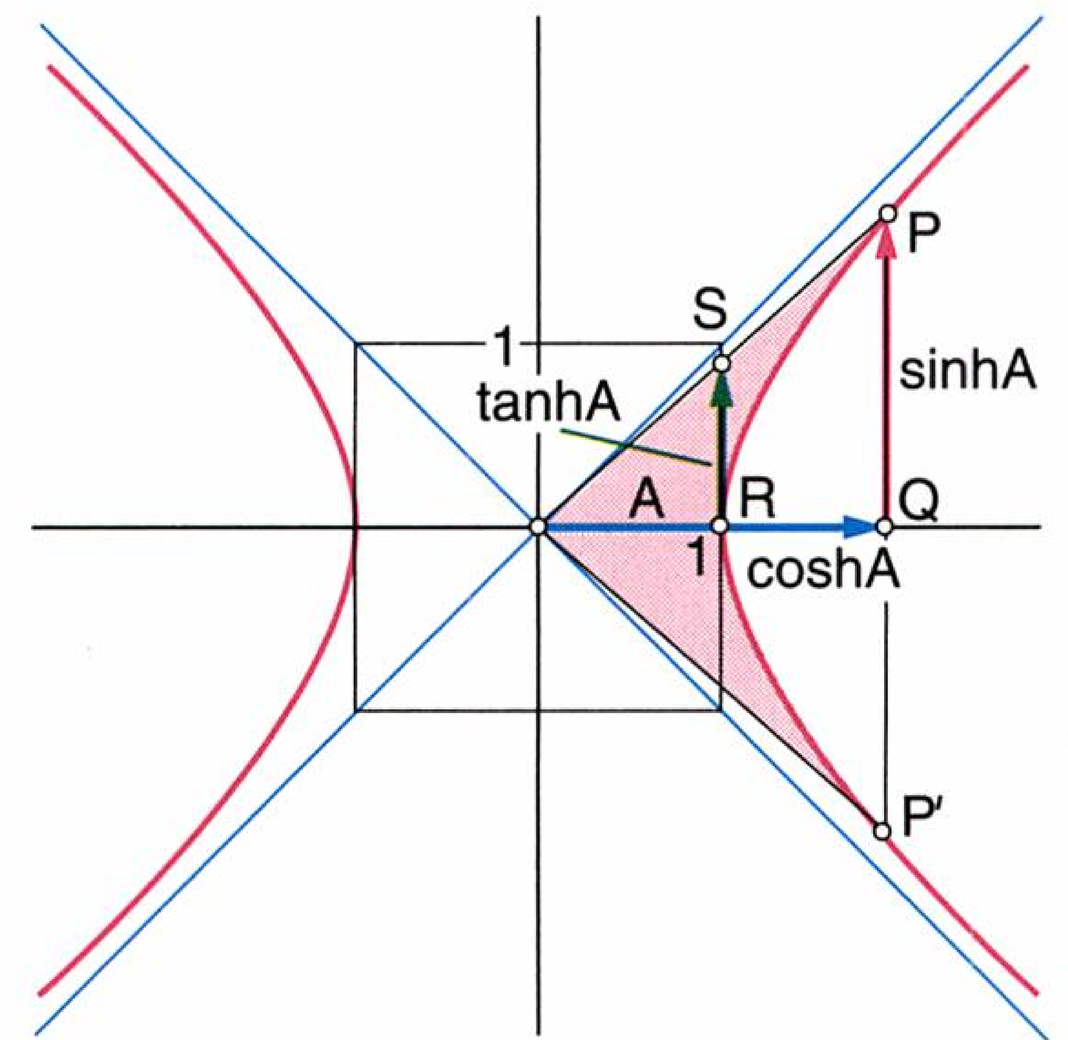
c) $x = \tanh(-1{,}8) = \frac{e^{-1,8} - e^{-(-1,8)}}{e^{-1,8} + e^{-(-1,8)}} = -0{,}9468$ $x = -0{,}9468$

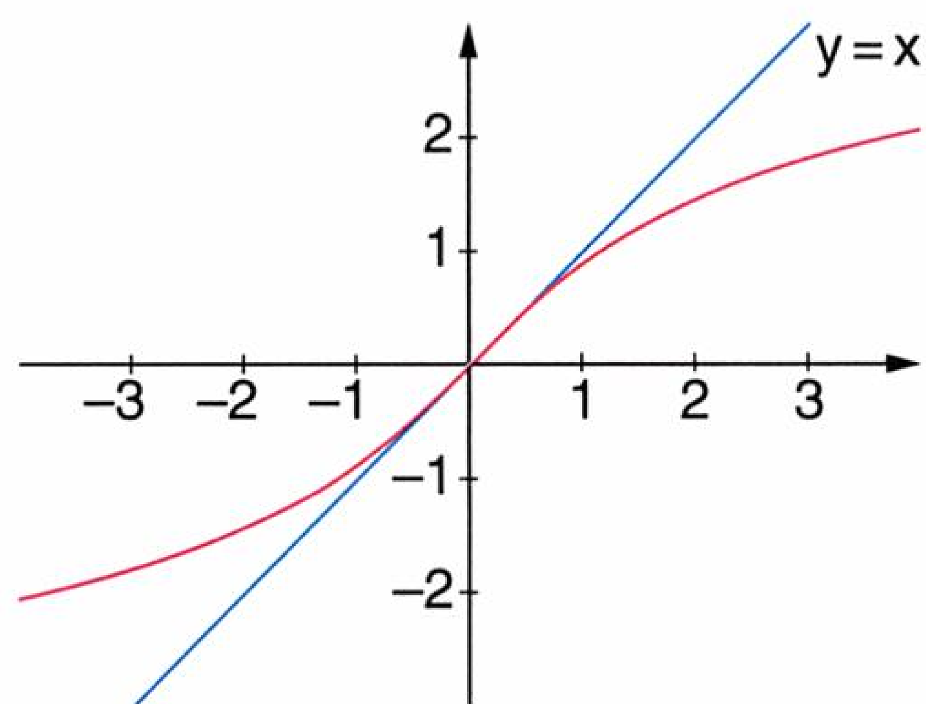
Die in der Außenspalte dargestellten Ableitungs- bzw. Integrationsformeln lassen sich mit den bekannten Regeln herleiten.

[1] Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen **Areafunktionen**.

Für die geometrische Deutung der Hyperbelfunktionen gehen wir von der sogenannten **Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$** aus. (Ihr Name rührt daher, dass die zugehörigen Halbachsen a bzw. b die Länge 1 haben.) Wählen wir einen beliebigen Punkt P auf ihr und berechnen wir die in der nebenstehenden Figur rosa unterlegte Fläche A, so bemerken wir, dass sie eine ähnliche Rolle spielt wie bei den Kreisfunktionen der Winkel φ im Einheitskreis:

Es lässt sich zeigen, dass der rosa eingezeichneten Strecke $\overline{QP}$ an der Hyperbel der Funktionwert sinh A, der blau eingezeichnerten Strecke $\overline{0Q}$ der Funktionswert cosh A und der grün eingezeichneten Strecke $\overline{RS}$ der Funktionswert tanh A zugeordnet werden kann. (Auf den Beweis wollen wir verzichten.)



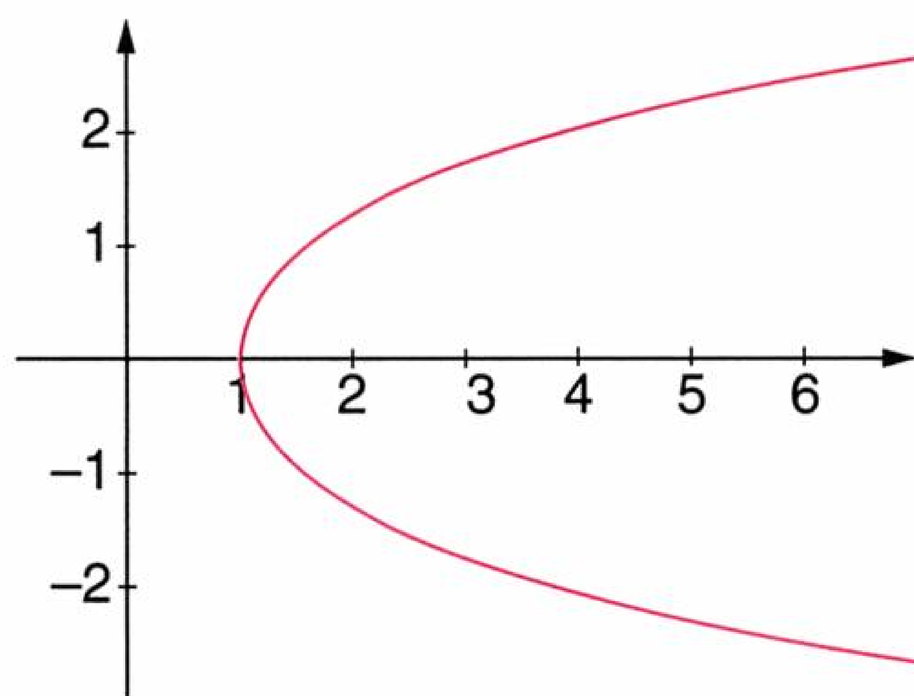


Umkehrung des Hyperbelsinus (Area sinus hyperbolicus)

Definition:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

y = arsinh x ist die Umkehrung der Funktion mit y = sinh x.
$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$

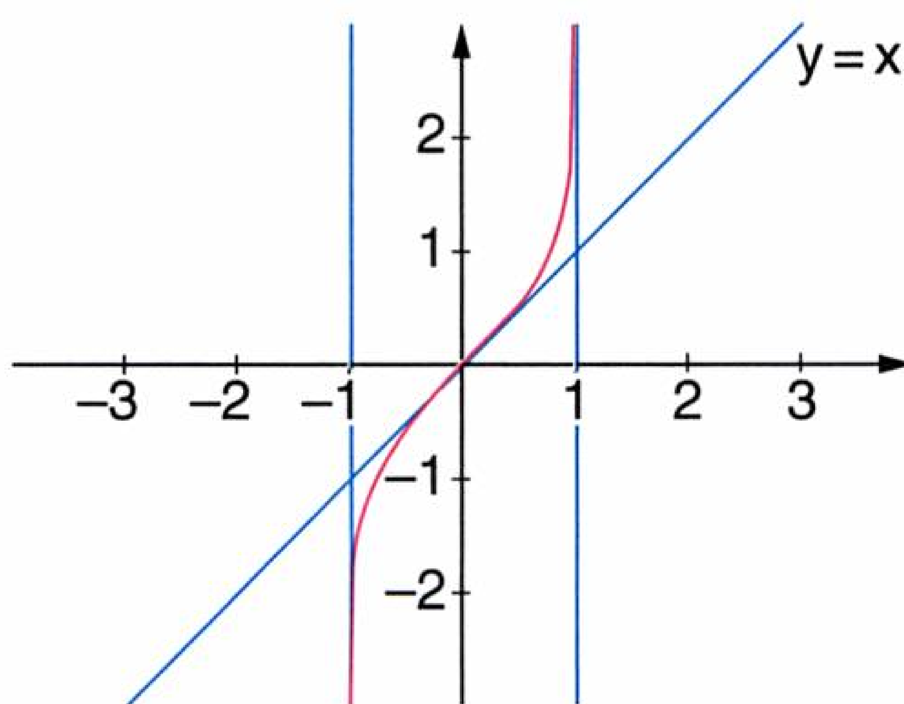


Umkehrung des Hyperbelkosinus (Area cosinus hyperbolicus)

Definition:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1)$$

y = arcosh x ist die Umkehrung der Funktion mit y = cosh x.
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$, $W = \mathbb{R}_0$



Umkehrung des Hyperbeltangens (Area tangens hyperbolicus)

Definition:

$$\operatorname{artanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

y = artanh x ist die Umkehrung der Funktion y = tanh x.
$D =]-1,1[$, $W = \mathbb{R}$

Beispiel:

Es sind die Werte x in den nachstehenden Gleichungen zu ermitteln:
a) x = arsinh 1 **b)** x = arcosh 3 **c)** x = artanh 0

Lösung:

a) $x = \operatorname{arsinh} 1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 0{,}8814$ **x = 0,8814**

b) $x = \operatorname{arcosh} 3 = \ln\left(3+\sqrt{3^2-1}\right) = \ln\left(3+\sqrt{8}\right) = 1{,}7628$ **x = 1,7628**

c) $x = \operatorname{artanh} 0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$ **x = 0**

Es gilt:

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

AUFGABEN

101. Liegt der Punkt **a)** $P(-4{,}5)$ **b)** $Q(3\sqrt{13}, 6)$ auf der Hyperbel hyp: $4x^2 - 9y^2 = 144$? (Rechnerische Begründung!)

102. Man ermittle die Gleichung der Hyperbel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt:

a) $a = 3,\ b = 7$ **b)** $a = 12,\ b = 8$

103. Aus den gegebenen Mittelpunktsgleichungen der Hyperbel hyp sind die Länge der Halbachsen und die Koordinaten der Brennpunkte zu ermitteln!

a) hyp: $9x^2 - 16y^2 = 144$ **b)** hyp: $64x^2 - 225y^2 = 14400$

c) hyp: $576x^2 - 49y^2 = 1764$ **d)** hyp: $1{,}69x^2 - 70{,}56y^2 = 119{,}2464$

104. Die Menge S der Schnittpunkte der Hyperbel hyp mit der Geraden g ist zu bestimmen!

a) hyp: $4x^2 - 5y^2 = 64$, g: $6x - 5y - 16 = 0$ **b)** hyp: $x^2 - y^2 = 16$, g: $y - 7x - 32 = 0$

c) hyp: $x^2 - 9y^2 = 144$, g: $3y + x = 0$ **d)** hyp: $x^2 - y^2 = 64$, g: $y - x + 16 = 0$

105. Dem einen „Ast" der Hyperbel hyp: $x^2 - 3y^2 = 1$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck ($c = 8$) derart einzuschreiben, dass die Dreiecksspitze im Hauptscheitel liegt und die Basis c parallel zur y-Achse verläuft. Flächeninhalt des Dreiecks?

106. Die Gleichung der Hyperbel ist aufzustellen:

a) $M(0,0)$, $a = 5$, $P(7,3)$ **b)** $M(0,0)$, $F_1(-10,0)$, $P(4, 8\sqrt{2})$

c) $M(0,0)$, $P\left(5, \frac{3}{2}\right)$, $Q(4,0)$ **d)** $M(0,0)$, $X(5,3)$, $Y\left(-\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$

107. Es sind die Werte x in den nachstehenden Gleichungen zu ermitteln:

a) $x = \sinh(-2{,}1)$ **b)** $x = \cosh 3{,}4$ **c)** $x = \tanh 0$

d) $x = \operatorname{arsinh}(-2)$ **e)** $x = \operatorname{arcosh} 5$ **f)** $x = \operatorname{artanh} 0{,}5$

4. Parabel

Parabel

Bezeichnungen:
A ..... Scheitel
X ..... Parabelpunkt
F ..... Brennpunkt
ℓ ..... Leitlinie
a ..... Parabelachse
p ..... Parameter

Definition:
Die Menge par aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt (Brennpunkt) und einer Geraden (Leitlinie) gleichen Abstand haben, heißt **Parabel**:

$$\text{par} = \{X \mid \overline{XF} = \overline{X\ell}\}$$

Scheitelgleichung der links dargestellten Parabel: $y^2 = 2px$

Krümmungskreis:

Herleitung der Scheitelgleichung:

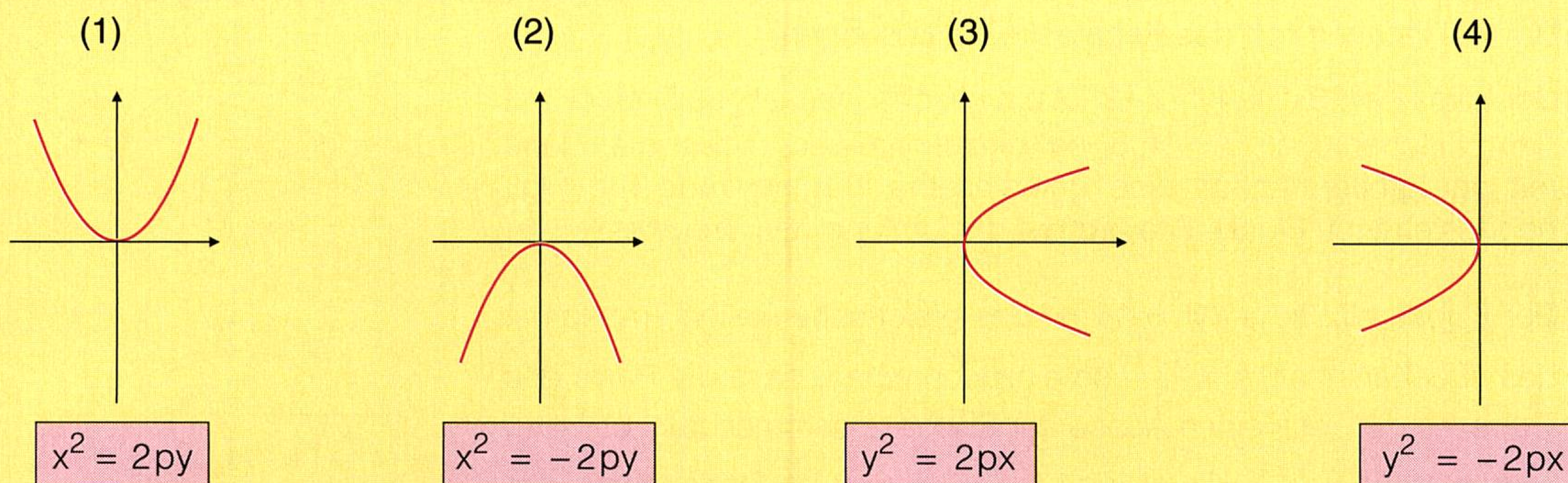
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \qquad \left(x \geqslant -\frac{p}{2}\right)$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$y^2 = 2px$ Scheitelgleichung der Parabel, deren Achse die x-Achse ist!

AUFGABEN

108. Wir unterscheiden folgende Hauptlagen der Parabel:



a) Was geschieht, wenn man **(1)** bzw **(2)** an der Geraden $y = x$ spiegelt?

b) Welcher Hauptlage entspricht die Parabel par $y = -x^2$

c) Wie erhält man algebraisch die „Umkehrparabel" von **(1)** bzw. **(2)**?

109. Liegt der Punkt **a)** $S_1(6,3)$ **b)** $S_2\left(\frac{1}{18}, \frac{2}{3}\right)$ auf der Parabel $x^2 = 12y$? (Rechnerische Begründung!)

110. Die Scheitelgleichung der Parabel mit $S(0,0)$ ist jeweils zu bestimmen:

a) $p = 5$, Parabel rechts offen **b)** $p = 3$, Parabel links offen

c) $p = 1$, Parabel unten offen **d)** $p = 1{,}25$, Parabel oben offen

111. a) Wie lautet die Scheitelgleichung einer Parabel, deren Brennpunkt $F(0, 3)$ ist?

b) Wie lautet die Scheitelgleichung einer Parabel, deren Leitlinie die Gleichung $x = 2$ hat?

Bemerkung: Der Scheitel A der Parabel soll jeweils im Ursprung liegen.

112. Die Gleichung der Parabel, deren Scheitel im Ursprung liegt, ist aufzustellen:

a) $\ell: x = -5$ **b)** $P(-8,5)$ **c)** $F(0,-17)$

113. Die Koordinaten des Brennpunktes der Parabel **a)** $y^2 = 16x$ **b)** $x^2 = 6y$ **c)** $y^2 = 29x$ **d)** $2x^2 = 67y$ sind zu ermitteln!

114. Die Menge S der Schnittpunkte der Parabel par ($y^2 = 2px$) mit der Geraden g ist zu bestimmen!

a) par: $y^2 = 24x$, g: $y + 3x - 6 = 0$ **b)** par: $y^2 = -68x$, g: $70y + 17x = 2091$

c) par $\left[X\left(-4, \frac{4}{7}\right)\right], Y\left(-10, \frac{25}{7}\right)$, g: $4y - x - 14 = 0$ **d)** par $\left[X(3,6),\ Y\left(\frac{4}{3}, -4\right)\right]$, g $\left[A(3,0), B\left(2, \frac{4}{3}\right)\right]$

115. Der Parabel par: $y^2 = 5x$ ist ein Quadrat ABCD derart einzuschreiben, dass seine Diagonale AC auf der x-Achse liegt. Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats?

116. Der Parabel par: $y^2 = 6x$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck ($h = 4$ cm) derart einzuschreiben, dass die Dreiecksspitze im Scheitel der Parabel liegt. Flächeninhalt des Dreiecks?

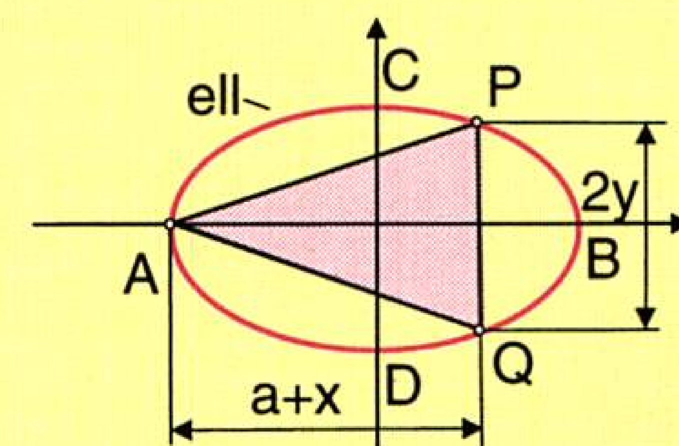
117. Gesucht sind die Schnittpunkte der Ellipse ell: $7x^2 + 2y^2 = 25$ mit der Parabel par: $y^2 = 3x$.

118. Man ermittle die gemeinsamen Punkte der Geraden $g: y = 2x - 6$ und der Parabel par: $y^2 = 16x$ und berechne **a)** die Sehnenlänge s **b)** den Sehnenmittelpunkt P **c)** den Abstand d zwischen Sehne und Brennpunkt.

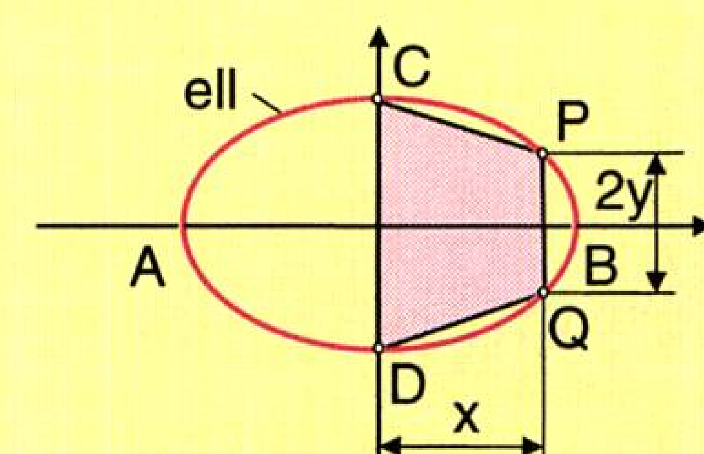
Vermischte Aufgaben

119. Der Ellipse ell: $3x^2 + 4y^2 = 64$ ist ein Rechteck einzuschreiben, dessen Länge doppelt so groß ist wie seine Breite. Flächeninhalt des Rechtecks? (2 Lösungen)

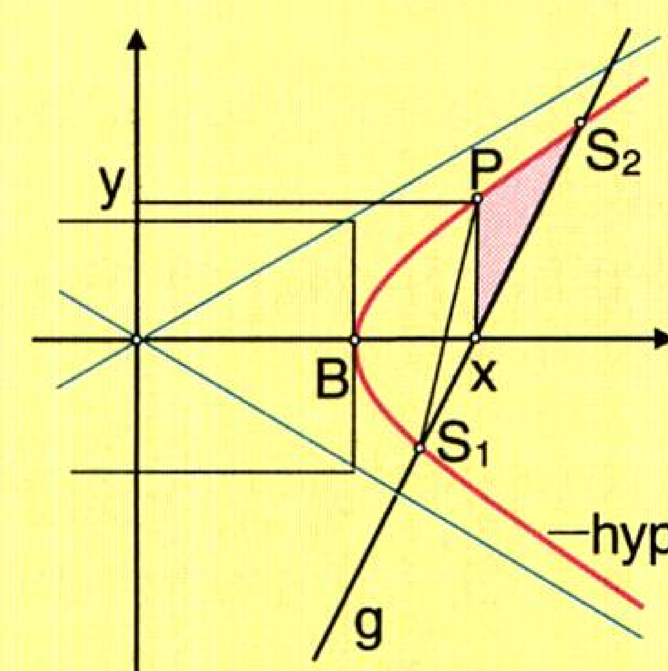
120. Der Ellipse ell: $3x^2 + 4y^2 = 12$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 4,5$ so einzuschreiben, dass die Höhe mit der großen Achse eine gemeinsame Trägergerade hat (vgl. nebenstehende Figur). Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?



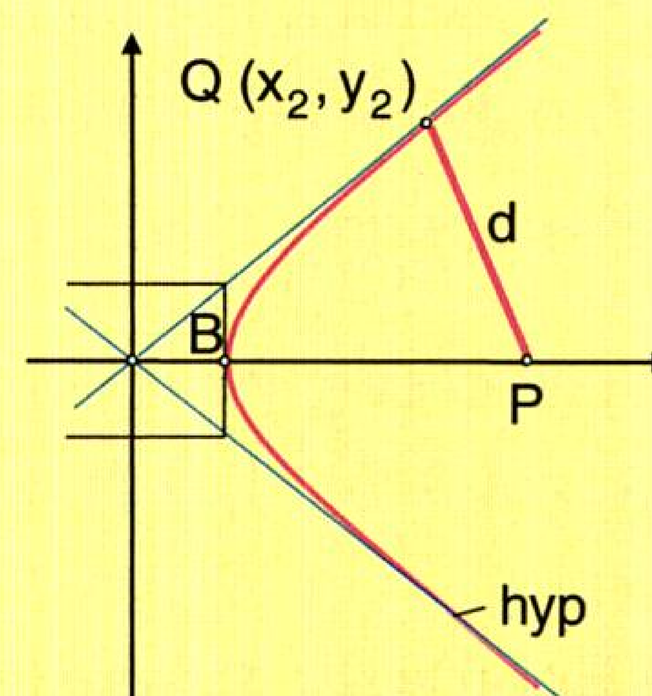
121. Der Ellipse ell: $9x^2 + 4y^2 = 36$ ist das gleichschenkelige Trapez mit dem Flächeninhalt $A = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ so einzuschreiben, dass die Basis des Trapezes mit der kleinen Achse der Ellipse zusammen fällt. Es ist zu zeigen, dass $y_0 = \frac{3}{2}$ die einzige reelle Lösung ist. Der Umfang des Trapezes ist zu berechnen.



122. Die Gerade g : $2x - y = 6$ schneidet die Hyperbel hyp: $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$ in zwei Punkten S_1, S_2 (vgl. nebenstehende Figur). Über der entstehenden Sehne als Basis ist ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = \frac{16(3\sqrt{33} - 11)}{11\sqrt{33}}$ zu errichten, dessen Spitze auf der Hyperbel zwischen S_1 und S_2 liegt. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

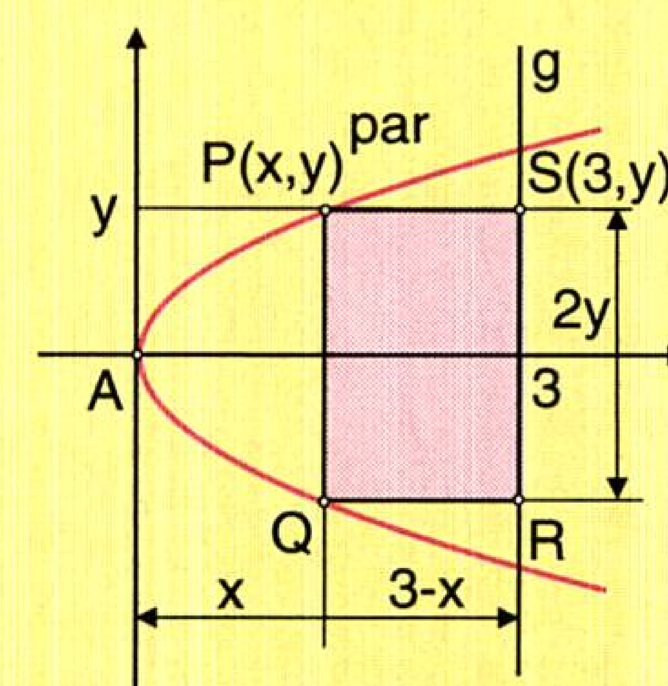


123. Welcher Punkt Q (x_2, y_2) der Hyperbel hyp: $4x^2 - 6y^2 = 11$ hat vom Punkt P (7, 0) den Abstand $d = \sqrt{\frac{533}{30}}$? (2 Lösungen)



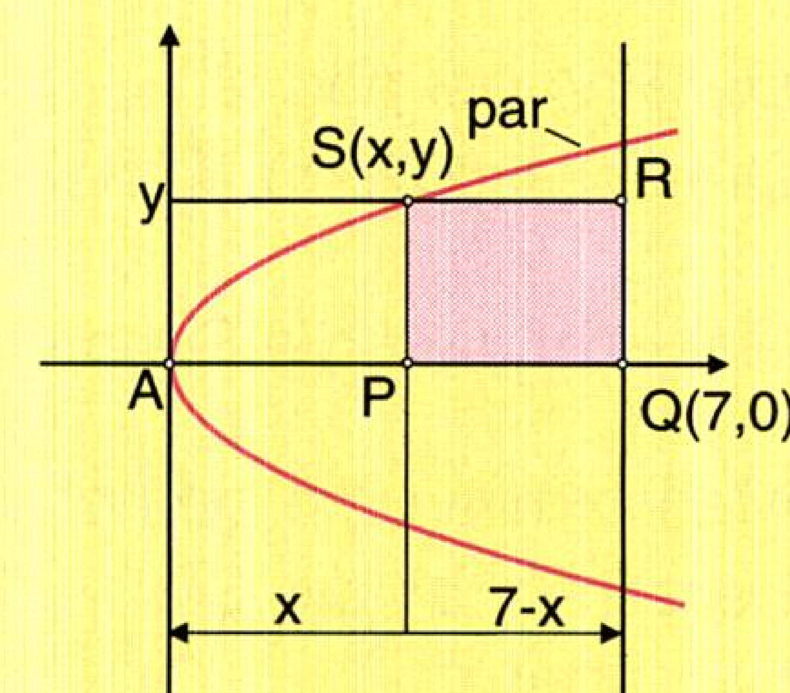
124. Von der Geraden g: $x = 3$ und der Parabel par: $y^2 = 6x$ wird ein Parabelsegment begrenzt, dem ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = 12\sqrt{\frac{2}{3}}$ — wie in nebenstehender Figur gezeigt wird — einzuschreiben ist. Umfang des Rechtecks?

Anleitung: Es ist günstig, y_p zu eliminieren.



125. Die obere Hälfte der Parabel par: $y^2 = 6x$, die x-Achse und die Ordinate des Punktes Q (7, 0) bilden ein Flächenstück. Mit welchen Koordinaten ist ein Punkt S (x, y) ∈ par anzugeben, damit das aus der Parabelfläche herausgeschnittene Rechteck PQRS den Flächeninhalt $A = \frac{14\sqrt{14}}{3}$ annimmt?

Anleitung: Der Punkt S liegt auf der Parabel, also müssen seine Koordinaten $y^2 = 6x$ erfüllen. Für die auf dieser Basis erhaltene Gleichung (y eliminieren!) $x^3 - 14x^2 + 49x - \frac{1372}{27} = 0$ lässt sich zeigen, dass es für x_s nur eine Doppelwurzel und eine 4-mal so große einfache Wurzel gibt.



WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

1. Wiederholung aus Band 2

Die Statistik gliedert sich in

— die **beschreibende Statistik**, die Daten erfasst und diese durch Tabellen, Grafiken und Kennzahlen möglichst übersichtlich beschreibt,

— die **beurteilende Statistik**, die auf Basis der beschreibenden Statistik prognostiziert und vergleicht, sich also z. B. mit der Qualitätssicherung von Produkten beschäftigt.

Die Menge der zu beurteilenden Objekte heiß **Grundgesamtheit**. Die Anzahl ihrer Elemente heißt **Umfang der Grundgesamtheit**.

Eine **Stichprobe** ist eine Menge von Objekten, die einer Grundgesamtheit zufällig (d. h. mit gleicher Chance für jedes Objekt der Grundgesamtheit) entnommen werden. Die Anzahl der Elemente einer Stichprobe heißt **Stichprobenumfang**.

Ist der Ausgang eines Versuches vom Zufall abhängig, sprechen wir von einem **Zufallsexperiment**.

Jedes mögliche Ergebnis eines solchen Zufallsexperiments wird als **Elementarereignis** bezeichnet. Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments bilden die **Menge der Elementarereignisse**. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom **Ereignisraum**. Unter einem **Ereignis** versteht man eine Teilmenge der Menge der Elementarereignisse.

Sind alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich wahrscheinlich, dann lässt sich die **Wahrscheinlichkeit P (A) eines Ereignisses A** nach der von **Pierre Simon de LAPLACE**, (1749–1827) im Jahre 1812 formulierten Formel bestimmen:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Oft steht man vor folgendem Problem: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B unter der Voraussetzung, dass das Ereignis A eingetreten ist. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit** und schreiben $P(B \mid A)$.

Durchaus exakt und wenig anschaulich ist das in der Außenspalte angeführte Axiomensystem von **Andrej N. KOLMOGOROW** (1903–1987). Doch selbst mit diesem Axiomensystem ist keine Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gegeben, die alle Sonderfälle erfasst und die Wahrscheinlichkeit immer berechnen lässt. Die wichtigsten Zusammenhänge sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Wichtige Kenngrößen für die beschreibende Statistik:

Das **arithmetische Mittel $\bar{x}$** (gesprochen: x quer) der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erhält man, indem man die Summe dieser Zahlen durch ihre Anzahl n dividiert:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
$$\text{bzw. } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebige reelle Zahlen mit dem arithmetischen Mittel $\bar{x}$, so berechnen wir die **Varianz s^2** wie folgt:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$
$$\text{bzw. } s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Die Quadratwurzel der Varianz heißt **Standardabweichung**.

Axiomensystem von Andrej N. KOLMOGOROW:

(1) Jedem beliebigen Ereignis A aus der Menge der Elementarereignisse kann eine nichtnegative, reelle Zahl als Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden: $P(A) \in \mathbb{R}_0^+$

(2) Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses S ist gleich 1: $P(S) = 1$

(3) Die Wahrscheinlichkeit des Eintritts von einem von zwei Ereignissen A und B, die einander ausschließen, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B): $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

	abhängige Ereignisse	unabhängige Ereignisse
Gleichzeitiger Eintritt von zwei Ereignissen (Multiplikationssatz) $P(A \cap B)$	$P(A \mid B) \cdot P(B)$ bzw. $P(B \mid A) \cdot P(A)$	$P(A) \cdot P(B)$
Eintritt von einem von zwei Ereignissen (Additionssatz) $P(A \cup B)$[1]	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	

[1]) Für einander ausschließende Ereignisse gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, da $P(A \cap B) = 0$ — vgl. 3. Axiom von KOLMOGOROW.

Definition:
Eine Funktion X, die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsvariable**.

Die Definitionsmenge dieser Funktion ist der Ereignisraum. Die Elemente der Definitionsmenge sind daher Ereignisse. Die Elemente der Wertemenge sind reelle Zahlen.

2. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Es ist schon ein Problem mit den Statistikern: Sie experimentieren, indem sie mit Würfeln spielen oder aus einer großen Anzahl von Personen bzw. Gegenständen einige zufällig auswählen und analysieren, um sodann irgendwelche Gesetzmäßigkeiten durch Wahrscheinlichkeiten auszudrücken.

Wen wundert es, wenn auch einer Variablen ein Wert **zufällig** zugeordnet wird? Ganz so „zufällig" geht es allerdings nun doch nicht zu. Denn die Zuordnung erfolgt nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten, auf die wir noch näher eingehen werden.

Beispiele für Zufallsgrößen:

Zufallsexperiment	Definitionsmenge	diskret/stetig	Wertemenge
Wurf mit einem Würfel	geworfene Augenzahl	diskret	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Kontrolle der Körpergröße	festgestellte Körpergröße in cm	stetig	$[0, +\infty[$ [1]
Wiederholungsprüfung in Mathematik	Anzahl der Schüler, die die Prüfung bestanden haben	diskret	{0, 1, 2, ..., Anzahl der angetretenen Schüler}
Kontrolle von Konserven in Bezug auf das Füllgewicht	festgestelltes Füllgewicht in kg	stetig	$[0, +\infty[$ [1]
Schießen auf eine Zielscheibe	Anzahl der Treffer	diskret	{0, 1, 2, ..., Anzahl der Schüsse}

Von einer **diskreten Zufallsvariablen** spricht man, wenn die Wertemenge abzählbar viele Elemente enthält. Die Wertemenge einer **stetigen Zufallsvariablen** enthält alle Werte innerhalb eines Intervalls.

Spätestens an dieser Stelle erkennt man, dass in der beurteilenden Statistik viele Begriffe verwendet werden, die man bereits von der beschreibenden Statistik kennt. Erinnern wir uns nur an diskrete und stetige Merkmalsausprägungen.

Wir wollen nochmals auf den Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit hinweisen:

Es sei vorausgesetzt, dass ein Zufallsexperiment beliebig oft wiederholbar ist und die Ergebnisse der Experimente voneinander unabhängig sind. Auf lange Sicht wird die relative Häufigkeit eines konkreten Versuchsergebnisses mit dessen Wahrscheinlichkeit überein stimmen.[2]

Wesentlicher Unterschied zur beschreibenden Statistik ist der Ersatz der vorgegebenen Grundgesamtheit durch eine fiktive Grundgesamtheit, die aus (beliebig oft ziehbaren) **Stichproben** der ursprünglichen Grundgesamtheit besteht.

Durch diese beliebig oft wiederholbaren Vorgänge (Zufallsexperimente) kann unsere neue Grundgesamtheit theoretisch unendlich groß werden.

Beispiel:

Ein Würfel ist derart gefälscht, dass an Stelle der Augenzahl 4 ein zweites Mal die Augenzahl 5 aufscheint.

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen „X = geworfene Augenzahl bei einem Wurf" und stelle sie grafisch dar.

b) Unter Verwendung der Häufigkeitsinterpretation ist der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ der geworfenen Augenzahl zu berechnen.[3]

c) Man stelle die aufsummierten Häufigkeiten grafisch dar.

---

1) In der Praxis sind hier sicher Einschränkungen der Wertemenge sinnvoll.

2) Diese Auslegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs stammt von **Richard von MISES** (1883–1953).

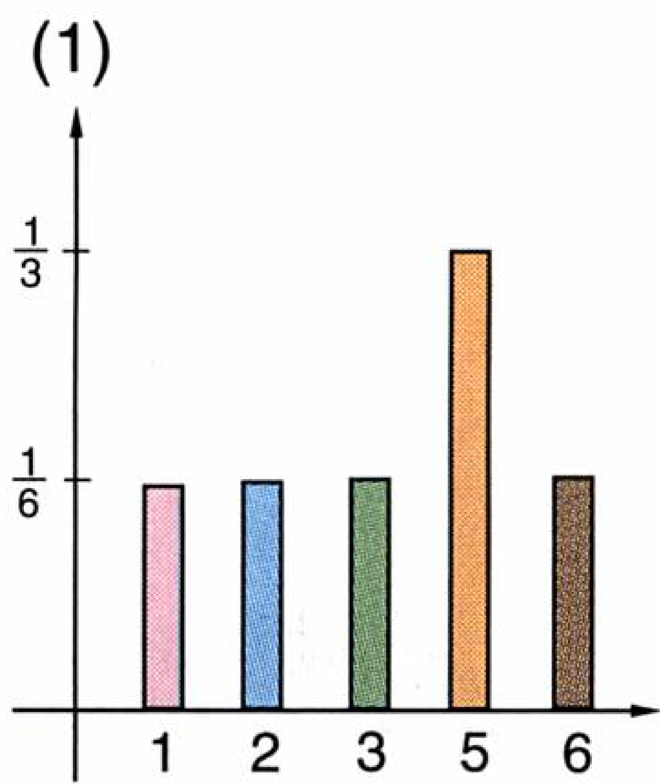
3) In der beurteilenden Statistik verwendet man für Mittelwert und Standardabweichung meist griechische Buchstaben als Symbole, wenn eine Grundgesamtheit im Sinne des vorigen Absatzes vorliegt.

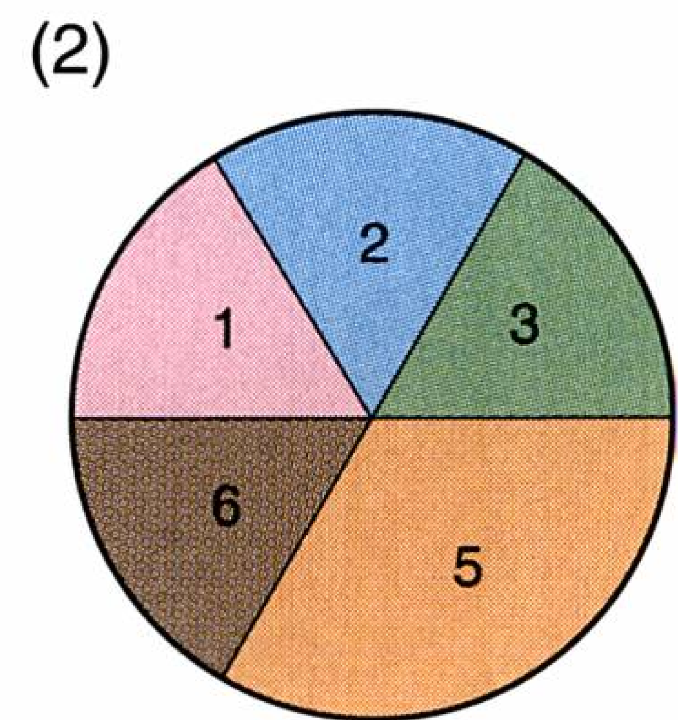
Lösung:

a) Die Zufallsvariable kann folgende Werte annehmen: 1, 2, 3, 5, 6. Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	P(X = k)
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{3}$
6	$\frac{1}{6}$

Wir stellen diese Verteilung als **(1)** Balkendiagramm **(2)** Kreisdiagramm dar:





b) Da die Werte k mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit = Häufigkeit eintreffen, ist das gewogene arithmetische Mittel zu berechnen:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{3} = 3{,}\dot{6}$$

Bemerkung: Der Mittelwert wird auch **Erwartungswert** genannt. Wie könnte man diese Bezeichnung begründen?

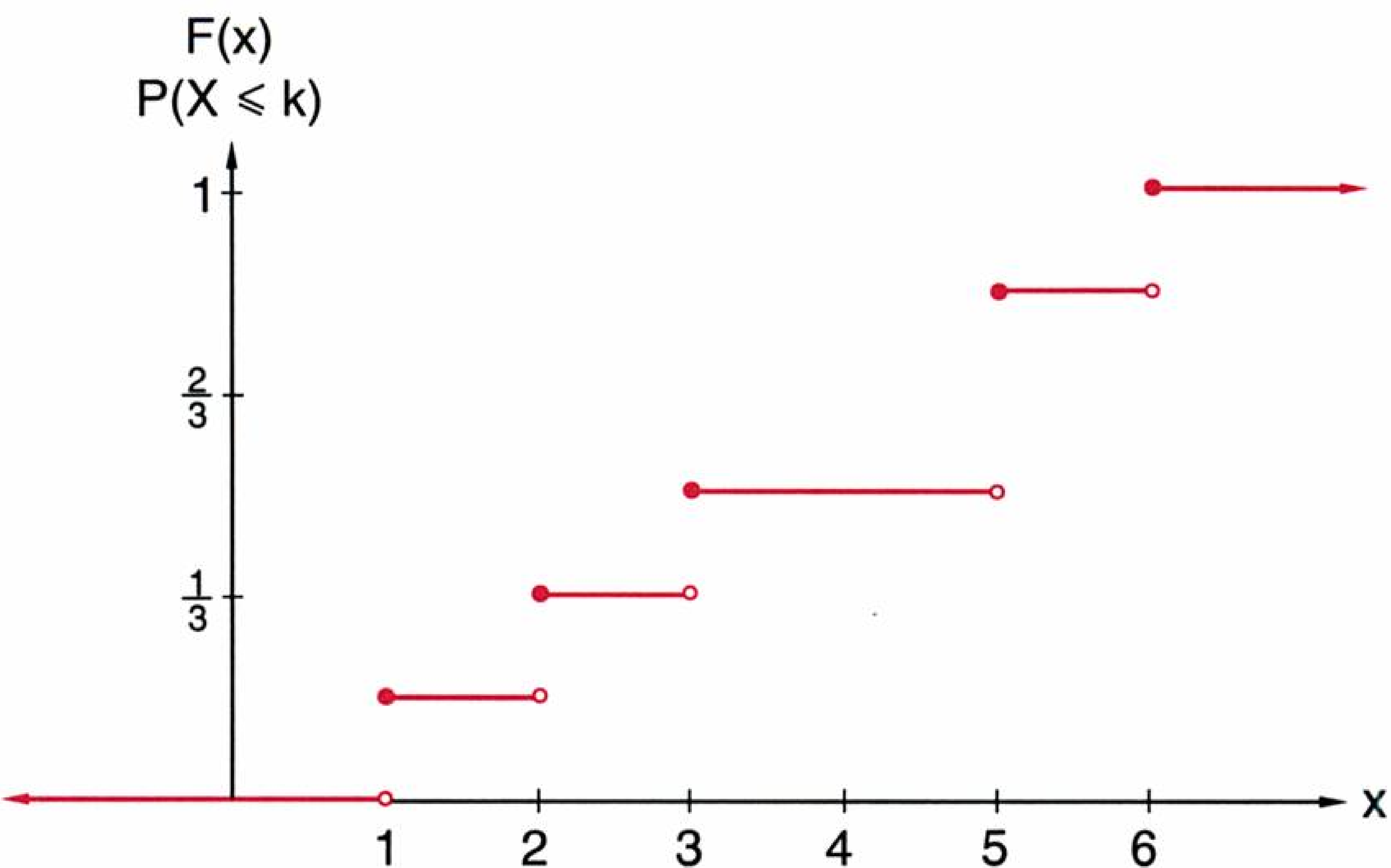
Die Standardabweichung σ berechnen wir wie folgt:

k (1)	P(X = k) (2)	$(k-\mu)$ (3)	$(k-\mu)^2$ (4)	$P(X=k)\cdot(k-\mu)^2$ (5) = (2) · (4)
1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{32}{27}$
2	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{25}{54}$
3	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{27}$
5	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{27}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{49}{54}$
Σ	1			$\sigma^2 = \frac{87}{27}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{87}{27}} = \sqrt{3{,}\dot{2}} = 1{,}795 \qquad \mu = 3{,}\dot{6} \qquad \sigma = 1{,}795$$

c)

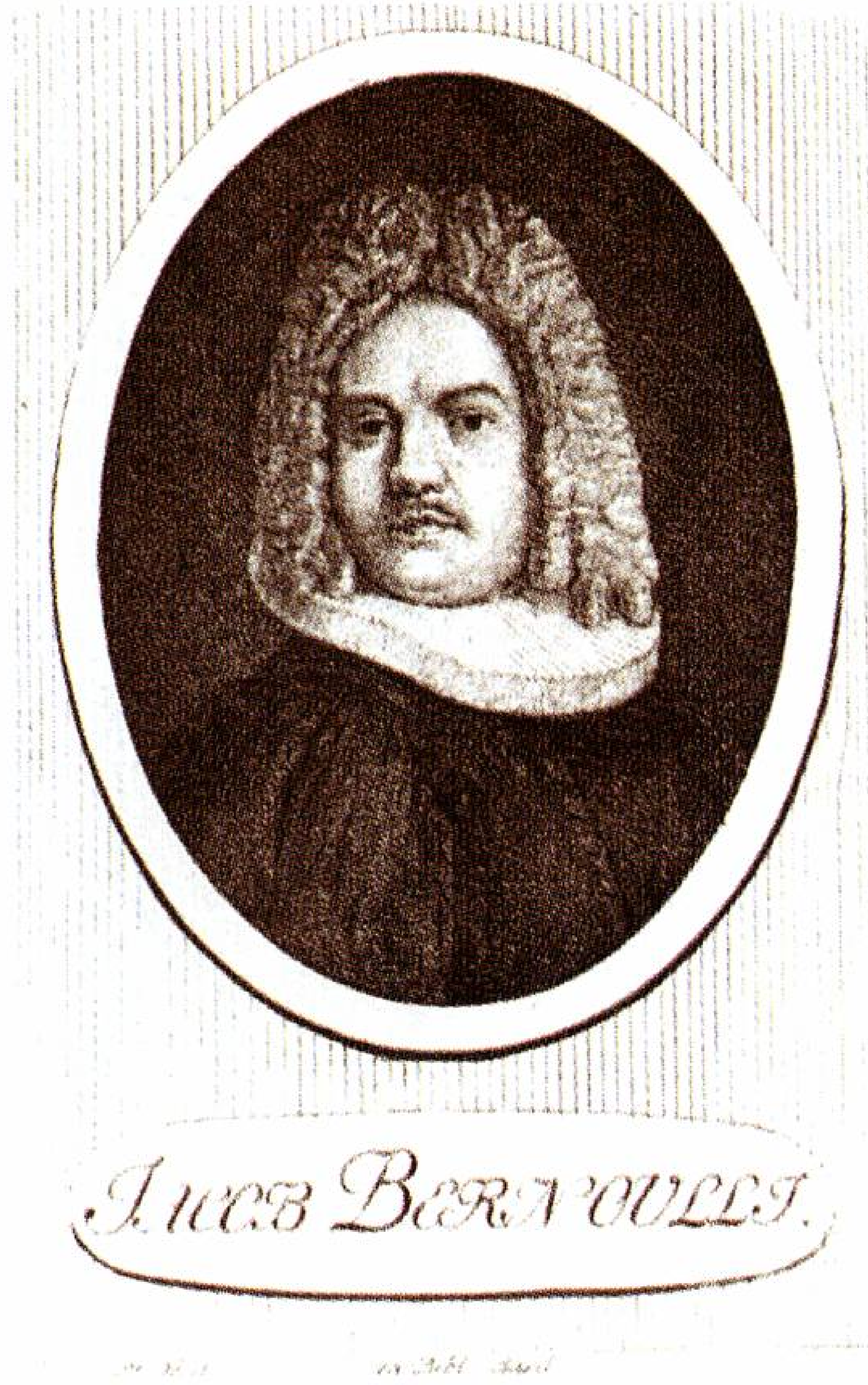
k	P(X ⩽ k)
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{5}{6}$
6	1



Die Funktion $F(x) = P(X \leqslant x)$ heißt **Verteilungsfunktion**. Man beachte: Das Argument ist x und **nicht** die Zufallsvariable X.

Im vorigen Beispiel haben wir Mittelwert und Varianz berechnet, wie wir dies im Kapitel **„Beschreibende Statistik“** (vgl. Band 2, Seite **197ff.**) gelernt haben. Damals hatten diese Werte jedoch nicht nur andere Symbole, sondern auch eine andere Bedeutung.

Was versteht man unter dem **Mittelwert** einer Zufallsvariablen? Hier handelt es sich um genau jenen Wert, der bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments im Durchschnitt auftritt. Da man also bei oftmaliger Wiederholung erwarten kann, dass die Zufallsvariable durchschnittlich genau diesen Wert annimmt, spricht man in diesem Zusammenhang auch vom **Erwartungswert**.



Jakob BERNOULLI
(1654-1705)
Radierung von Heinrich PFENNINGER

Der uns schon aus der beschreibenden Statistik vertraute Begriff der **Varianz** lässt sich auch für Zufallsvariable anwenden, wenn wir in der Definition den Mittelwertbegriff jeweils durch den Erwartungswertbegriff ersetzen: Unter der Varianz einer Zufallsvariablen versteht man den Erwartungswert der Summe der Quadrate der Abweichungen vom Erwartungswert.

In Analogie zur beschreibenden Statistik wollen wir die Quadratwurzel der Varianz der Zufallsvariablen als **Standardabweichung** bezeichnen.

2.1 Binomialverteilung

(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer Familie mit 4 Kindern genau zwei Mädchen gibt?

(2) Ein Spielwürfel wird 4-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man keinen Sechser erhält?

Was ist ein **Erfolg?** Ein Qualitätsprüfer in einer Videorekorder-Fabrik wird es jeweils als Erfolg werten, wenn er einen defekten Videorekorder entdeckt. Das entspricht sicher nicht der üblichen Vorstellung von „Erfolg“. Allerdings kann es durchaus sinnvoll sein, das Auffinden eines fehlerhaften Videorekorders als Erfolg zu definieren, wenn die defekten Geräte gezählt werden sollen.

Die obigen Fragestellungen sind Beispiele für sogenannte **BERNOULLI-Versuche**: Es handelt sich um Zufallsexperimente mit einer bestimmten Anzahl unabhängiger Versuche. In jedem der Fälle **(1)** und **(2)** gibt es genau zwei Möglichkeiten für das Eintreffen eines Ereignisses:

(1) Das Kind ist ein Mädchen. — Das Kind ist kein Mädchen.

(2) Es wurde ein Sechser gewürfelt. — Es wurde kein Sechser gewürfelt.

Das Eintreffen des Ereignisses wird allgemein als Erfolg (E) bezeichnet. Bei Nichteintreffen spricht man von Misserfolg (M).

Werfen wir nochmals einen Blick auf Frage **(2)**. Wenn ein perfekter Würfel n-mal geworfen wird, dann kann dieses Zufallsexperiment z. B. folgendes Ergebnis liefern:

Binomialverteilungen zeichnen sich durch folgende Eigenschaften aus:

1. Bei jedem Versuch gibt es genau zwei Möglichkeiten des Ausgangs: Erfolg oder Misserfolg.
2. Sämtliche der insgesamt n Versuche sind voneinander unabhängig.

$$\underbrace{M, E, E, E, M, M, M, M, E, \ldots}_{n-\text{mal}}$$

In der obigen Zeile ist für $n = 9$ insgesamt 4-mal E aufgetreten. Wir wollen mit X die Zufallsvariable bezeichnen, die einer bestimmten Anzahl von Versuchen die Anzahl der darin enthaltenen Erfolge E zuordnet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer derartigen Zufallsvariablen heißt **Binomialverteilung**.

Nehmen wir an, dass bei n Versuchen genau k-mal ein Erfolg eintritt. Die Anzahl der Misserfolge ist dann $n-k$.

Ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Erfolges $P(E)=p$ bekannt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Misserfolges $P(M)=1-p$. (Gegenwahrscheinlichkeit!)

Die Wahrscheinlichkeit, bei **einer Versuchsserie** insgesamt k Erfolge und $n-k$ Misserfolge zu erzielen, beträgt somit $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Aus der Kombinatorik wissen wir, wie viele Möglichkeiten es gibt, bei n Versuchen genau k Erfolge und $n-k$ Misserfolge zu erzielen: Da wir die einzelnen Erfolge bzw. Misserfolge voneinander nicht unterscheiden, liegt eine **nicht geordnete Auswahl** vor, die mit Hilfe des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ berechnet wird.

Wir erhalten somit folgenden Zusammenhang:

Wiederholung wichtiger Formeln der Kombinatorik:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Wenn ein Erfolg E in einem n-mal unter den selben Bedingungen durchgeführten Versuch mit der Wahrscheinlichkeit p eintritt, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ für genau k Erfolge in n Versuchen

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiel:

Aus gut durchmischten Karten, in denen die Farben Herz, Karo, Pik und Treff in jeweils gleicher Anzahl auftreten, wird jeweils eine Karte gezogen und festgestellt, ob es sich um eine „Herz-Karte“ handelt. Anschließend wird die Karte zurückgelegt. Dann wird neu gemischt und der Versuch wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei Versuchen 2-mal eine Herz-Karte gezogen wird?

Lösung:

Wenn eine Herz-Karte gezogen wird, ist das ein Erfolg, andernfalls ist es ein Misserfolg. Da die gezogene Karte jeweils zurückgelegt wird, sind alle drei Versuche unabhängig. Es liegen daher sämtliche Voraussetzungen für eine Binomialverteilung vor.

Wir setzen in die Formel ein:

$n = 3$ (3 Versuche)

$p = \frac{1}{4}$ (Ein Viertel aller Karten sind Herz-Karten.)

$k = 2$ (k ist die Anzahl der Erfolge — und es soll 2-mal eine Herz-Karte gezogen werden)

Nun wird in die Formel eingesetzt:

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}14 \qquad \mathbf{P(X=2) = 0{,}14}$$

Historische Bemerkung zur Binomialverteilung:

Die Binomialverteilung heißt auch **BERNOULLI-Verteilung** — benannt nach dem schweizerischen Mathematiker **Jakob BERNOULLI** (1654–1705). Die Familie BERNOULLI war mathematisch überaus begabt. Zahlreiche Mitglieder dieser Familie waren bedeutende Mathematiker.

Weiters gilt für binomialverteilte Zufallsvariable:

$$\mu = n \cdot p$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$$

AUFGABEN

126. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ kann auch durch $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{k}$ dargestellt werden.

○ **b)** Jedem beliebigen Ereignis A kann eine nichtnegative reelle Zahl als Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.

○ **c)** $P(A) = 0$ bedeutet: Das Ereignis A kann niemals eintreten.

○ **d)** Zwei Ereignisse sind voneinander unabhängig, wenn sie nicht gleichzeitig eintreffen können.

○ **e)** Eine Zufallsvariable ist das Ergebnis eines Zufallsexperiments.

○ **f)** Die Wertemenge einer diskreten Zufallsvariablen darf nur aus ganzzahligen Elementen bestehen.

○ **g)** Die Verteilungsfunktion von diskreten Zufallsvariablen ist niemals **streng** monoton steigend.

○ **h)** Die Binomialverteilung wurde nach dem italienischen Mathematiker Giuseppe BINOMI (1628–1674) benannt.

127. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Die Anordnung von n verschiedenen Elementen heißt ..... (Variation/Permutation/Kombination).

b) Von n anzuordnenden Elementen sollen zwei nicht voneinander unterschieden werden. Die Anzahl der Anordnungen ist in diesem Fall ..... (gleich/halb so/doppelt so) groß.

c) Jedem beliebigen Ereignis A kann eine im Intervall ..... ($[0, 1[$, $[0, +\infty[$, $[0, 1]$) liegende reelle Zahl als Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.

d) Bei einer ..... (Anordnung von n Elementen/geordneten Auswahl/nicht geordneten Auswahl) ermittelt man die Anzahl der Möglichkeiten mit Hilfe des Binomialkoeffizienten.

e) Die Binomialverteilung wird beim Ziehen einer Stichprobe ..... (mit Zurücklegen/ohne Zurücklegen/unabhängig vom Zurücklegen) angewendet.

f) Die Klassifizierung einer Zufallsvariablen als diskret bzw. stetig ist von der ..... (Grundmenge/Definitionsmenge/Wertemenge) abhängig.

g) Auf lange Sicht stimmt die ..... (absolute/relative/aufsummierte) Häufigkeit eines Versuchsergebnisses mit dessen Wahrscheinlichkeit überein.

h) Wenn p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis nicht eintrifft, ... (p, $1+p$, $1-p$).

128. Wenn eine der beiden obigen Aufgaben für Prüfungszwecke verwendet wird, besteht die Möglichkeit, dass jemand die Prüfung besteht, obgleich die Auswahl einer vorgegebenen Antwort nach dem Zufallsprinzip erfolgt.

a) Wie groß ist in Aufgabe **(1) 126.** bzw. **(2) 127.** die Wahrscheinlichkeit, in allen 8 Fällen die richtige Entscheidung zu treffen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mehr als die Hälfte der Zuordnungen in Aufgabe **(1) 126. (2) 127.** richtig?

Anleitung: Es liegt ein BERNOULLI-Experiment vor, das 8-mal wiederholt wird. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist in Aufgabe **126.** $\frac{1}{2}$, in Aufgabe **127.** $\frac{1}{3}$.

129. Im Bundesstaat New York besteht ein Teil der Fahrprüfung aus einem Test mit Auswahlantworten. Es werden zu 20 Fragen jeweils 4 Antwortmöglichkeiten vorgegeben, von denen **genau eine** richtig ist. Dieser Teil der Prüfung gilt als bestanden, wenn 15 Fragen richtig beantwortet sind.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht jemand, der die Antworten nach dem Zufallsprinzip zuordnet, diesen Teil der Fahrprüfung?

130. In Österreich wurden im Jahre 1995 45419 Knaben und 43250 Mädchen geboren.

Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 12 zufällig ausgewählten in Österreich geborenen Kindern des Jahrgangs 1995 **a)** alle **b)** mindestens 9 **c)** weniger als die Hälfte **d)** genau 4 **e)** eine ungerade Anzahl Mädchen sind.

131. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer österreichischen Familie mit 5 Kindern **a)** genau zwei Knaben **b)** mehr als die Hälfte Knaben sind. Die Wahrscheinlichkeiten für eine Knaben- bzw. Mädchengeburt sind aus Aufgabe **130.** zu entnehmen.

132. Ein Hersteller von Sicherungen kontrolliert seine Erzeugnisse wie folgt: Aus einer Schachtel mit 40 Sicherungen werden drei Stück mit Zurücklegen entnommen. Wird bei diesen Sicherungen kein Defekt festgestellt, gilt die Gesamtmenge als einwandfrei.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Inhalt einer Packung, die 15 defekte Sicherungen enthält, als einwandfrei einzustufen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die einzige defekte Sicherung einer Schachtel bei einer derartigen Stichprobe zu entdecken?

133. Ein Schüler bereitet sich auf eine Englisch-Vokabel-Prüfung vor und stellt fest, dass er 70% der Vokabel beherrscht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er von 30 Vokabeln mindestens 27 weiß und somit ein „Sehr gut" bekommt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er das Pech hat, weniger als die Hälfte der Vokabel zu wissen und somit mit „Nicht genügend" beurteilt werden muss?

134. Nehmen wir an, ein Schütze trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}35$. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze bei 5 Schüssen **a)** genau 3-mal **b)** mindestens 3-mal trifft?

135. Kennen Sie das Glücksspiel „CHUCK-A-LUCK"? Dieses Würfelspiel erfreut sich in den USA großer Beliebtheit. Der Spieler setzt einen bestimmten Geldbetrag und darf dann mit drei Würfeln werfen. Wirft er einen „Sechser", so erhält er das Doppelte des eingesetzten Betrages. Bei zwei „Sechsern" erhält er das Dreifache des eingesetzten Betrages, bei drei „Sechsern" das Vierfache.

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit drei Würfeln **(1)** keinen **(2)** einen **(3)** zwei **(4)** drei Sechser zu würfeln.

b) Man versuche — eventuell in Gruppenarbeit — zu begründen, warum man als Spieler auf lange Sicht einen Verlust zu erwarten hat.

136. Bei den Produkten einer Lampenfabrik liegt der Ausschuss-Anteil im Durchschnitt bei 2,5%. Ein Kunde macht die Annahme einer Lieferung davon abhängig, ob in einer Stichprobe von 40 Stück höchstens eine nicht funktionierende Lampe enthalten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sendung angenommen wird?

137. Bei der Herstellung von Tuben zur Abfüllung von Zahnpasta erweisen sich 5% der Tuben als fehlerhaft. In regelmäßigen Zeitabständen werden Stichproben von je 50 Tuben entnommen. Wenn hier mehr als 3 fehlerhafte Tuben entdeckt werden, erfolgt ein Produktionsstopp zur Überprüfung der Maschine. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

2.2 Hypergeometrische Verteilung

Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Binomialverteilung war die **Unabhängigkeit der einzelnen Versuche**. Diese ist nur dann gegeben, wenn eine Stichprobenentnahme **mit Zurücklegen** erfolgt. In diesem Fall ist der Umfang der Grundgesamtheit völlig unerheblich, da der Anteil jener Elemente, die die zu untersuchende Eigenschaft aufweisen, auf Grund des Zurücklegens unverändert bleibt.

Ganz anders sieht die Sache aus, wenn eine Entnahme **ohne Zurücklegen** erfolgt. Wir wollen dies anhand des bereits auf Seite **53** behandelten Spielkartenbeispiels beantworten.

Beispiel:

Aus 32 gut durchmischten Karten, in denen die Farben Herz, Karo, Pik und Treff in jeweils gleicher Anzahl auftreten, wird 3-mal hintereinander eine Karte gezogen, wobei die gezogenen Karten nicht zurückgelegt werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei Versuchen zwei Herz-Karten gezogen werden?

Lösung:

Ein Viertel der Karten sind Herz-Karten. In einem Kartenpaket von 32 Karten befinden sich also 8 Herz-Karten und 24 „Nicht-Herz-Karten". Wenn bei drei Versuchen zwei der 8 Herz-Karten gezogen werden sollen, wird demgemäß eine der 24 „Nicht-Herz-Karten" gezogen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 8 Herz-Karten genau zwei zu ziehen? Diese Frage können wir mit unserem Kombinatorikkenntnissen leicht beantworten: $\binom{8}{2}$.

Die Anzahl der Möglichkeiten, eine „Nicht-Herz-Karte" zu ziehen, ist daher $\binom{24}{1}$.

Werden drei Karten gezogen, gibt es also $\binom{8}{2} \cdot \binom{24}{1}$ Möglichkeiten, dass sich genau zwei Herz-Karten darunter befinden.

Insgesamt gibt es $\binom{32}{3}$ Möglichkeiten, (irgendwelche) drei Karten aus einem Paket von 32 Karten zu ziehen.

Wir können daher unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{28 \cdot 24}{4960} = \mathbf{0{,}135} \qquad \mathbf{P(X = 2) = 0{,}135}$$

In einer Grundgesamtheit vom Umfang N befinden sich K Elemente, die eine bestimmte Eigenschaft aufweisen. Entnimmt man eine Stichprobe vom Umfang n **ohne Zurücklegen**, gilt für die Zufallsvariable „X = Anzahl der Elemente der Stichprobe mit der bestimmten Eigenschaft":

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von einer **hypergeometrischen Verteilung**.

Die hier gezeigte Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge bei Stichprobenentnahmen ohne Zurücklegen ist ziemlich kompliziert. Andererseits lässt sich Folgendes zeigen:

Sofern aus einer relativ großen Grundgesamtheit eine eher kleine Stichprobe gezogen wird, ist es ohne Bedeutung für das Ergebnis, ob man ein „Ziehen mit Zurücklegen" oder ein „Ziehen ohne Zurücklegen" durchführt.

Unter diesem Aspekt liegt es nahe, bei kleinen Stichproben aus großen Grundgesamtheiten **an Stelle der hypergeometrischen Verteilung die Binomialverteilung** zu verwenden.

In welchen Fällen liegt jedoch eine „kleine Stichprobe aus einer großen Grundgesamtheit“ vor? Hier kann man keine verbindlichen Regeln aufstellen. In der industriellen Qualitätssicherung ist eine Verwendung der Binomialverteilung ohne Rücksicht auf ein eventuelles Zurücklegen ab einem Umfang der Grundgesamtheit von 50 Stück üblich, wenn der Stichprobenumfang nicht mehr als 10% des Umfangs der Grundgesamtheit ausmacht.

AUFGABEN

138. Beim Schnapsen erhält jeder Spieler zunächst drei aus 20 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler dabei **a)** kein As **b)** mindestens ein As **c)** genau zwei Asse erhält?

Bemerkung: In den 20 Karten sind insgesamt 4 Asse enthalten.

139. Ein Lehrer überprüft 10 Hausübungshefte nach folgendem Verfahren: Er lässt sich 10 verschiedene Zahlen zwischen 1 und 36 nennen und kontrolliert die Hefte der Schüler mit den entsprechenden Katalognummern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in dieser Stichprobe mindestens einen Schüler ohne Hausübung entdeckt, wenn in dieser Klasse 4 von 36 Schülern keine Hausübung gemacht haben?

140. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Spieler, der einen einzigen Tip abgibt, beim österreichischen Lotto „6 aus 45“ **a)** 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2 **f)** eine **g)** keine der 6 gezogenen Gewinnzahlen erraten?

141. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei Abgabe eines einzigen Tips im österreichischen Lotto „6 aus 45“ einen Gewinn zu erzielen.

Bemerkung: Man gewinnt, wenn man drei oder mehr Zahlen richtig getippt hat.

142. Im Kurier vom 17. November 1986 fand sich ein Artikel über „6 aus 45“, der hier auszugsweise wiedergegeben wird: *„Wer jede Runde einen Tip abgibt, gewinnt zu ■% ein Jahr lang nichts. Bei 10 Tips pro Runde ist es schon nahezu sicher, dass Sie einmal pro Jahr gewinnen (und wenn es nur ein Dreier ist). Ganz sicher ist bei der Wahrscheinlichkeitstheorie aber natürlich gar nichts ...“*

a) Durch welchen Wert ist der rosa Fleck zu ersetzen?

b) Man berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit bei Abgabe eines Tips pro Woche ist, in einem Jahr **(1)** genau einmal **(2)** mindestens einmal zu gewinnen.

Bemerkung: Es ist davon auszugehen, dass zwischen den einzelnen Tips Unabhängigkeit besteht. Das Jahr ist mit 52 Wochen anzunehmen.

143. Schon vor Einführung des Lottos „6 aus 45“ gab es das „Kleine Lotto“, bei dem 2-mal wöchentlich 5 aus 90 Zahlen gezogen werden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 5 gesetzten Zahlen mindestens **(1)** zwei **(2)** drei richtige Tips hat?

b) Wie ist die Aufgabe **a)** zu lösen, wenn man nur 4 Zahlen tippt?

Bemerkung: Beim Kleinen Lotto ist es nicht erforderlich, 5 Zahlen zu tippen. Je weniger Zahlen man tippt, desto höher sind die (im Voraus festgesetzten) Gewinnquoten.

144. Ein Lottospieler sitzt am Sonntagabend vor seinem Fernsehgerät und beobachtet die Ziehung des österreichischen Lottos „6 aus 45“. Die erste gezogene Zahl ist auf seinem Wettschein angekreuzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Spieler unter dieser Voraussetzung insgesamt **a)** 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2 **f)** nur eine der 6 gezogenen Gewinnzahlen erraten?



C F Gauß

2.3 Normalverteilung

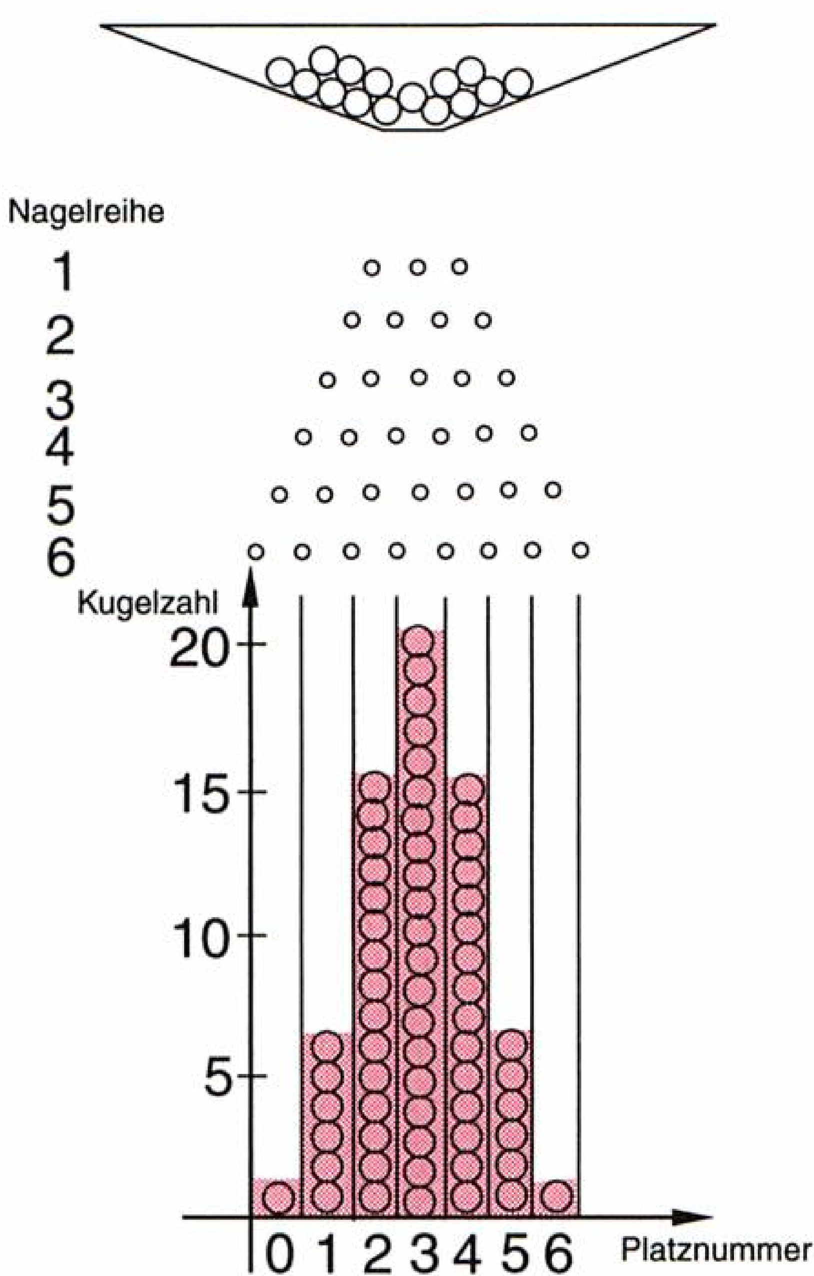
In diesem Kapitel werden wir die wichtigste Wahrscheinlichkeitsverteilung für stetige Merkmale besprechen. Ihre Bedeutung wurde Ende des 18. Jahrhunderts im Rahmen von Messfehleruntersuchungen, die vor allem von **Carl Friedrich GAUSS** (1777—1855) durchgeführt wurden, bekannt.

Der belgische Astronom und Statistiker **Lambert Adolphe Jacques QUETELET** (1796—1874) stellte fest, dass überraschend viele Zähl- und Messergebnisse Häufigkeitsverteilungen aufweisen, die dieser Verteilung ähnlich sind. QUETELET beschäftigte sich vorwiegend mit der Untersuchung des menschlichen Körperbaus und ging dabei von einem Durchschnitts- bzw. Normalmenschen aus.

Diese Verteilung wird daher **Normalverteilung** oder **GAUSS-Verteilung** genannt.

Am einfachsten kann man sich die Entstehung der Normalverteilung als Grenzübergang aus einer Binomialverteilung am sogenannten **GALTONschen Nagelbrett**[1] vorstellen, das in seinen wesentlichen Konstruktionsmerkmalen in Figur **(1)** dargestellt ist.

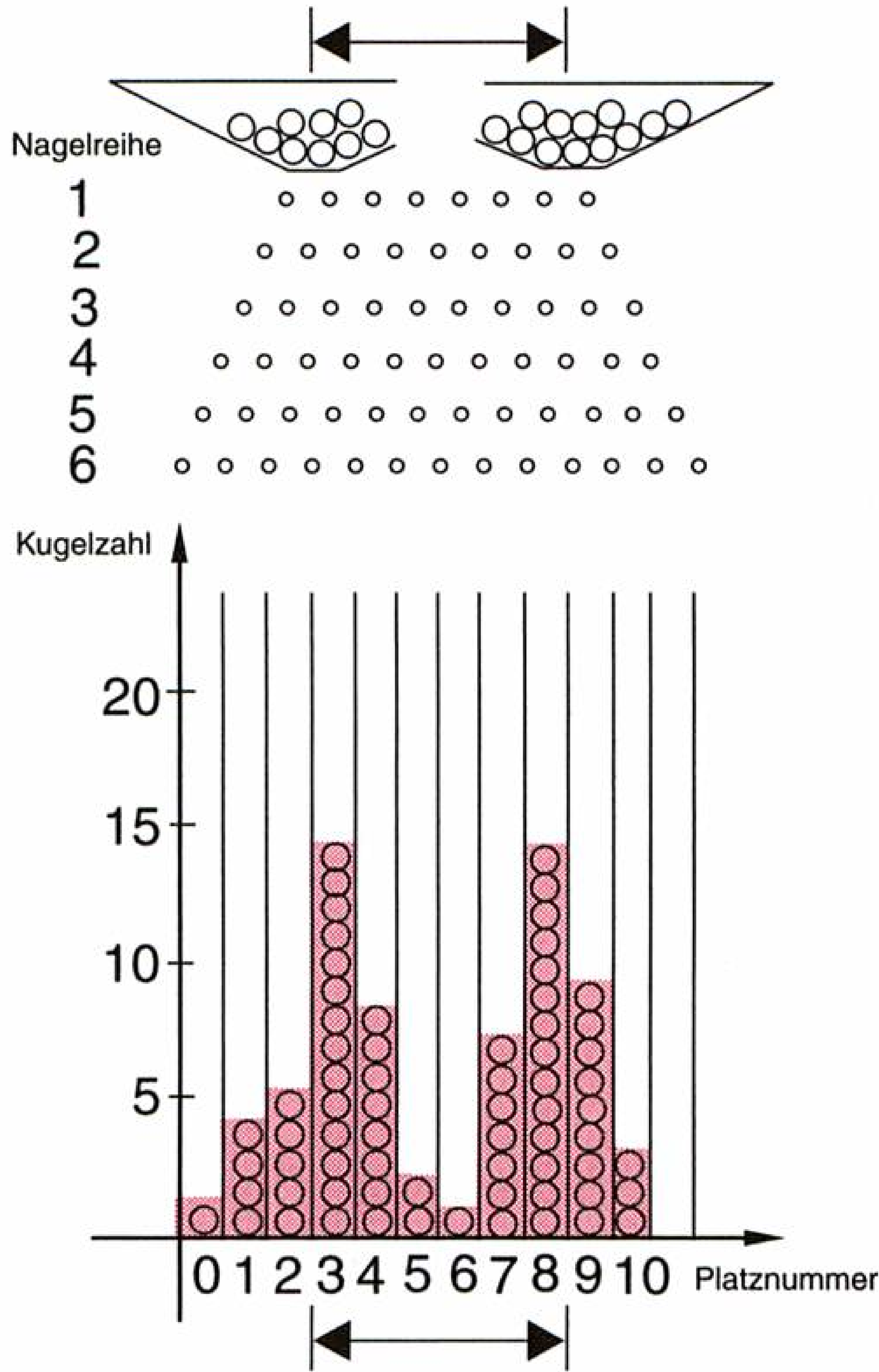
(1)



Aus einem Trichter fallen, unabhängig voneinander, gleich große Kugeln durch ein System von Nagelreihen, deren jeweils übereinander liegende Nagelreihen um einen halben waagrechten Nagelabstand verschoben sind. Unter dem System der Nagelreihen befinden sich dicht nebeneinander senkrechte Schächte, deren Breite gleich dem Nagelabstand und ein wenig breiter als der Kugeldurchmesser ist.

Eine Kugel, die im freien Fall den Trichterausgang verlässt, wird bei jeder Nagelreihe mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ nach rechts bzw. nach links abweichen. Nach dem Fall über n Nagelreihen werden die Kugeln die symmetrisch zum Trichterausgang angeordneten Schächte mit den Nummern $0, 1, 2, \ldots, n$ füllen, und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, die man nach der Formel für die Binomialverteilung $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$[2] berechnen kann.

(2) Verschieben des Trichters



Die Entstehung einer solchen Binomialverteilung kann man sich an einem Gedankenexperiment klarmachen: Lässt man $2^6 = 64$ Kugeln über ein aus 6 Nagelreihen bestehendes Nagelbrett fallen, so hat man unterhalb dieses Systems in den Schächten mit den Nummern 0, 1, …, 6 von links nach rechts folgende Kugelzahlen zu erwarten: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

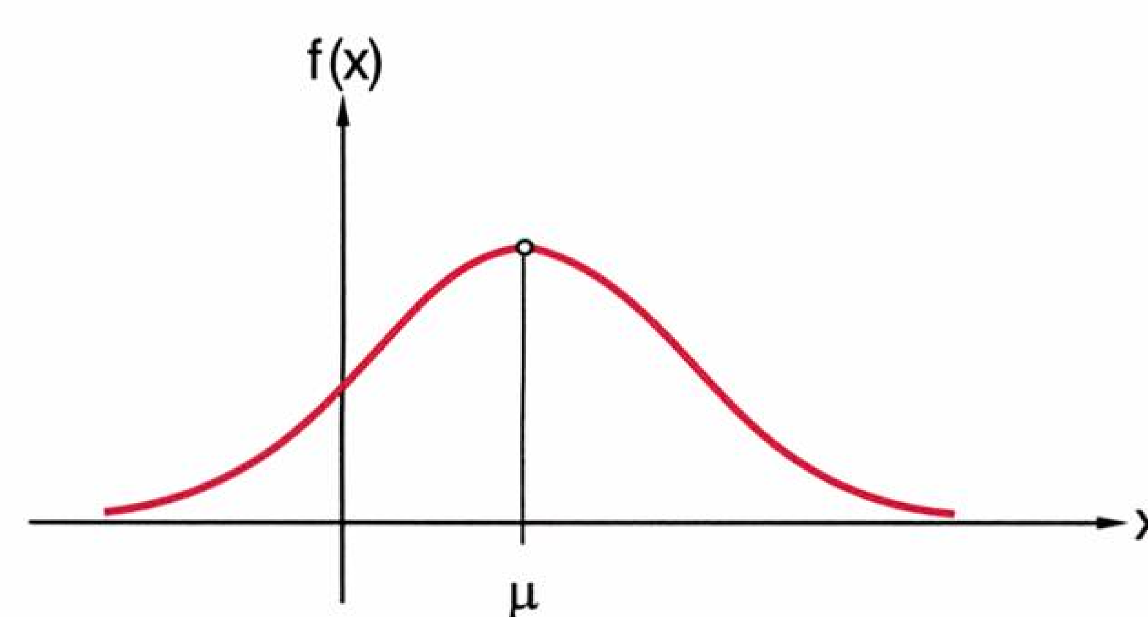
Man kann jede der Nagelreihen als eine der vielen nicht zu beherrschenden Betriebseinflüsse deuten, denen ein technischer Prozess, z. B. die Fertigung von Drehteilen auf einem Automaten, ausgesetzt ist.

Figur **(2)** stellt eine wesentliche Erweiterung des Modells dar: Der Trichter, aus dem die Kugeln fallen, lässt sich verschieben. Diese Erweiterung bedeutet für unser Gedankenexperiment, dass zu den Zufallseinflüssen (Nagelreihen) ein systematischer Einfluss (Trichterverschiebung) hinzu gekommen ist, der auf den Prozess einwirkt. Den Erfolg beobachtet man an der Mischverteilung der Kugeln. Und darin besteht auch die wichtigste Aufgabe eines sogenannten **statistischen Tests**: systematische Einflüsse von Zufallseinflüssen zu trennen.

---

[1]) Benannt nach **Francis GALTON** (1822—1911), englischer Reisender und Naturforscher.

[2]) Aus $p = \frac{1}{2}$ folgt: $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.



Wir stellen uns die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Binomialverteilung nun als stetige Funktion von $x \in \mathbb{R}$ vor: $f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$.

Nehmen wir an, die Anzahl der Nagelreihen n (in der Praxis gleichbedeutend mit der Anzahl der Betriebseinflüsse) wird sehr groß. Dann erhalten wir für $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ durch geeigneten Grenzübergang[1] die Funktion

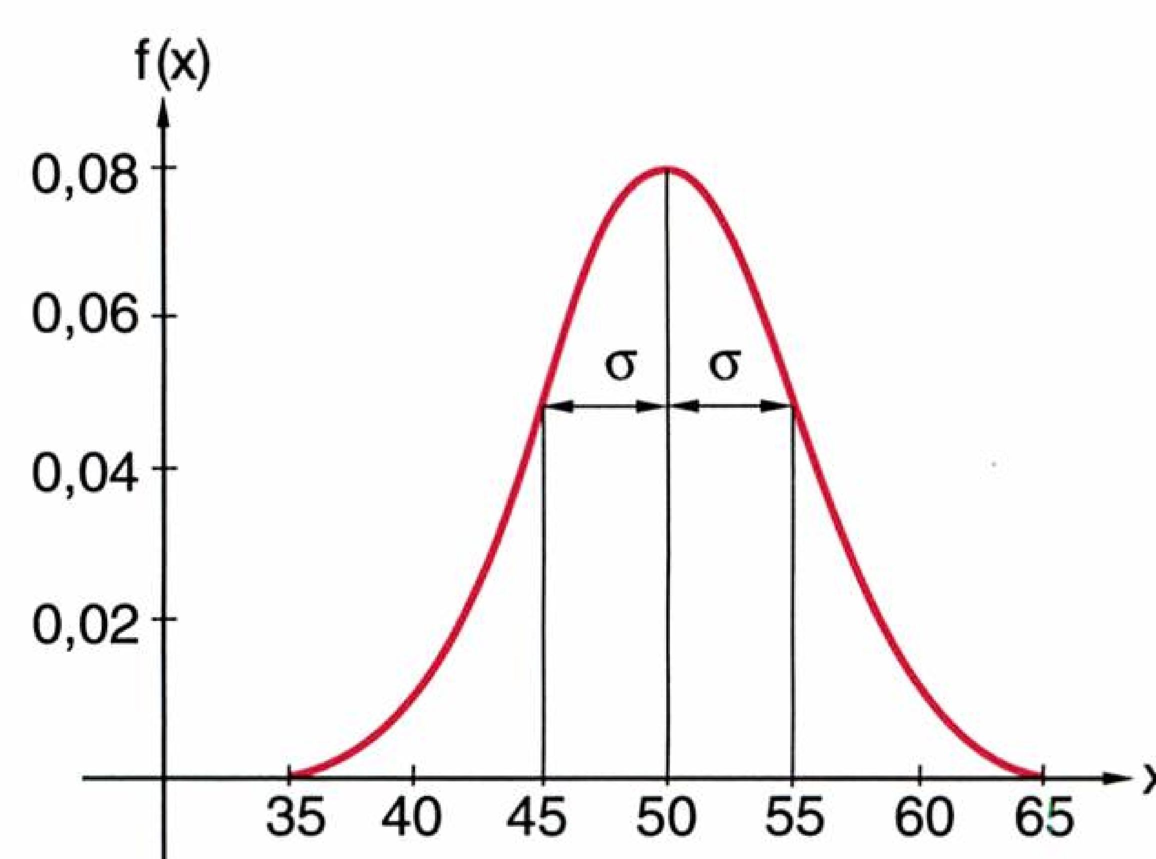
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Diese Funktion wird **Dichtefunktion der Normalverteilung** genannt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen in einem bestimmten Intervall liegenden Wert annimmt, entspricht der in diesem Intervall zwischen der x-Achse und f(x) eingeschlossenen Fläche.[1]

Die wichtigsten statistischen Kennwerte der Normalverteilung sind:

— der Mittelwert μ

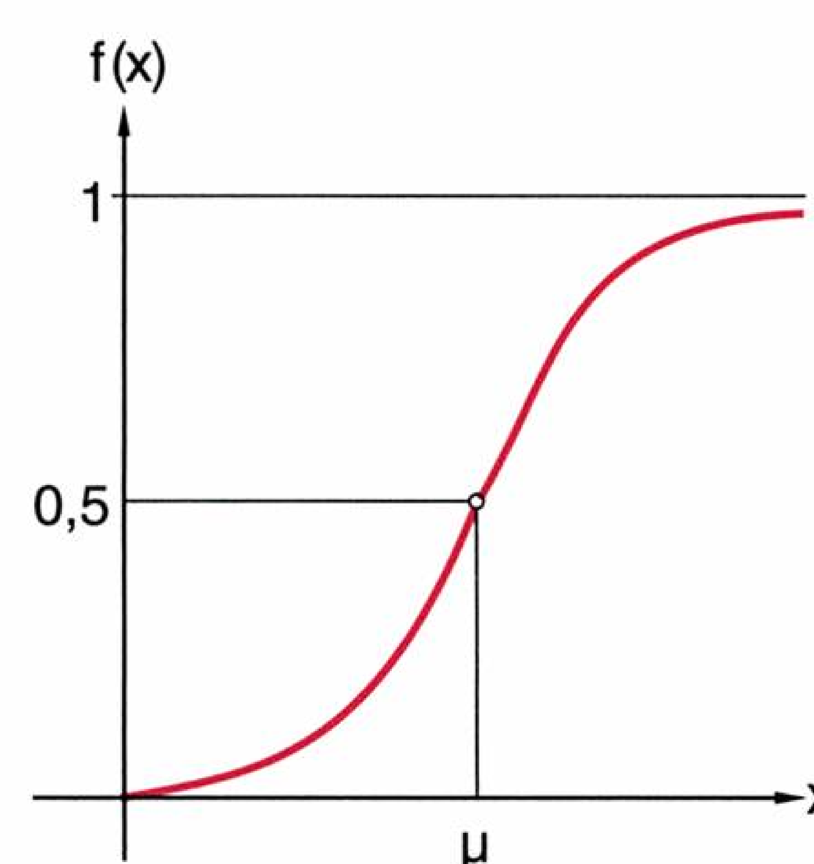
— die Varianz σ^2 bzw. die Standardabweichung σ



Es handelt sich beim Mittelwert μ und der Varianz σ^2 bzw. Standardabweichung σ um genau die selben Symbole, die in der Dichtefunktion der Normalverteilung auch vorkommen: die sogenannten **Parameter der Normalverteilung**. Die Normalverteilung ist symmetrisch.

In der Außenspalte findet sich eine Darstellung einer speziellen Normalverteilung $N(\mu = 50, \sigma = 5)$.

Aus jeder Normalverteilung mit irgendeinem Wertepaar der beiden Parameter μ und σ kann man durch die Transformation $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ die sogenannte **standardisierte Normalverteilung** f(u) erzeugen. Sie hat den Mittelwert $\mu = 0$ und die Standardabweichung $\sigma = 1$.[2]



Die u-Verteilung hat den großen Vorteil, dass man bei der Behandlung beliebiger Normalverteilungen (mit beliebigen Wertepaaren für die Parameter μ und σ) mit einer einzigen Tabelle der Normalverteilung auskommt.

Die nebenstehende Grafik zeigt die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. In der sogenannten **Normalverteilungstabelle**[3] findet man für konkrete Werte k den jeweils zugehörigen Funktionswert $F(k) = P(X \leq k)$.

Für die Verteilungsfunktion gilt: F(x) ist monoton wachsend

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1$$

Da für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Zusammenhang $F(x) = P(X \leq x)$, gilt für zwei Werte x_1, x_2 $(x_2 > x_1)$:
$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert im Intervall $]x_1, x_2]$ annimmt, ist gleich der Differenz der Funktionswerte der Verteilungsfunktion.

---

1) Dieser Zusammenhang gilt für **alle** Dichtefunktionen von stetigen Zufallsvariablen.

2) Auf den Beweis wollen wir verzichten.

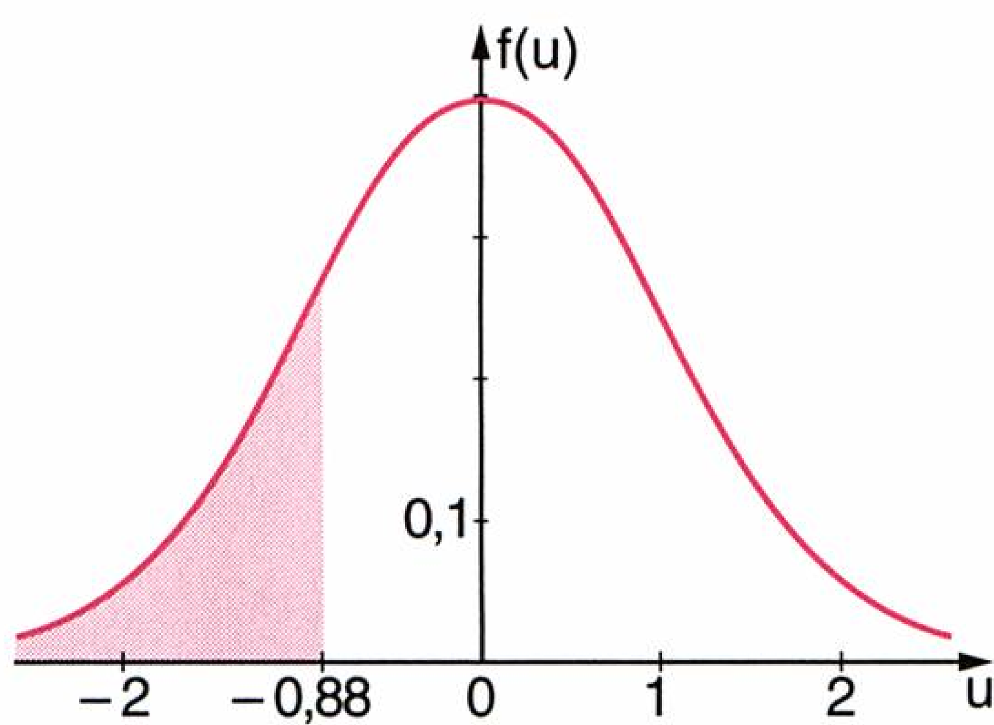
3) Vgl. „Normalverteilungstabelle" am Ende des Buches.

Beispiel:

Bei Antritt des Grundwehrdienstes wird unter anderem die Körpergröße der jungen Soldaten festgestellt. Wir wollen annehmen, dass die Körpergröße normalverteilt ist und ein Mittelwert $\mu = 178{,}6$ cm und eine Standardabweichung $\sigma = 7{,}5$ cm bestimmt wurde, dass also eine Normalverteilung $N(178{,}6,\ 7{,}5)$ vorliegt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Grundwehrdiener **a)** kleiner als 172 cm **b)** größer als 187 cm **c)** zwischen 175 und 181 cm groß ist?

Lösung:



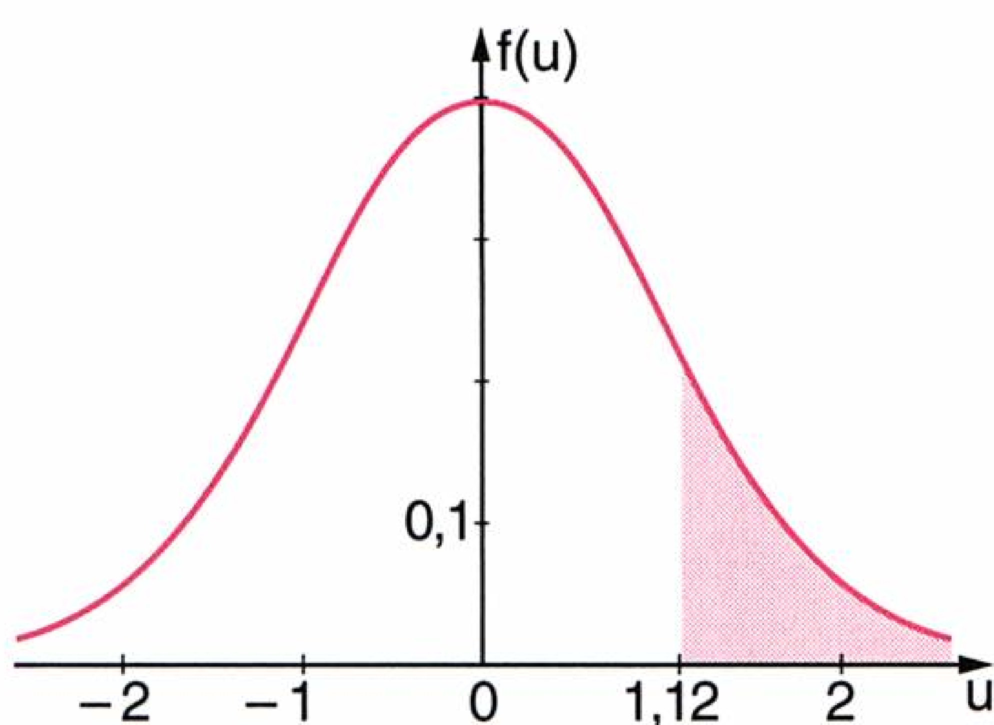
a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X < 172)$ der Zufallsvariablen „X = Körpergröße der Grundwehrdiener". Durch Transformation $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ erzeugen wir die standardisierte Normalverteilung: $P(X < 172) = P\left(U < \frac{172-178{,}6}{7{,}5}\right) = P(U < -0{,}88)$

Der am Ende des Buches befindlichen **Normalverteilungstabelle** entnehmen wir, dass dem Argument $k = 0{,}88$ der Wert $F(k) = 0{,}81057$ zugeordnet ist. Auf Grund des Zusammenhangs $\mathbf{F(-k) = 1 - F(k)}$ erhalten wir $F(-0{,}88) = 1 - 0{,}81057 = \mathbf{0{,}18943}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Grundwehrdiener kleiner als 172 cm ist, beträgt daher 0,19.

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeit ist als die in einem Intervall eingeschlossene Fläche definiert. Für $P(X = k)$ gilt daher:

$P(X = k) = 0$. Daraus folgt: $P(X \leqslant k) = P(X < k)$.



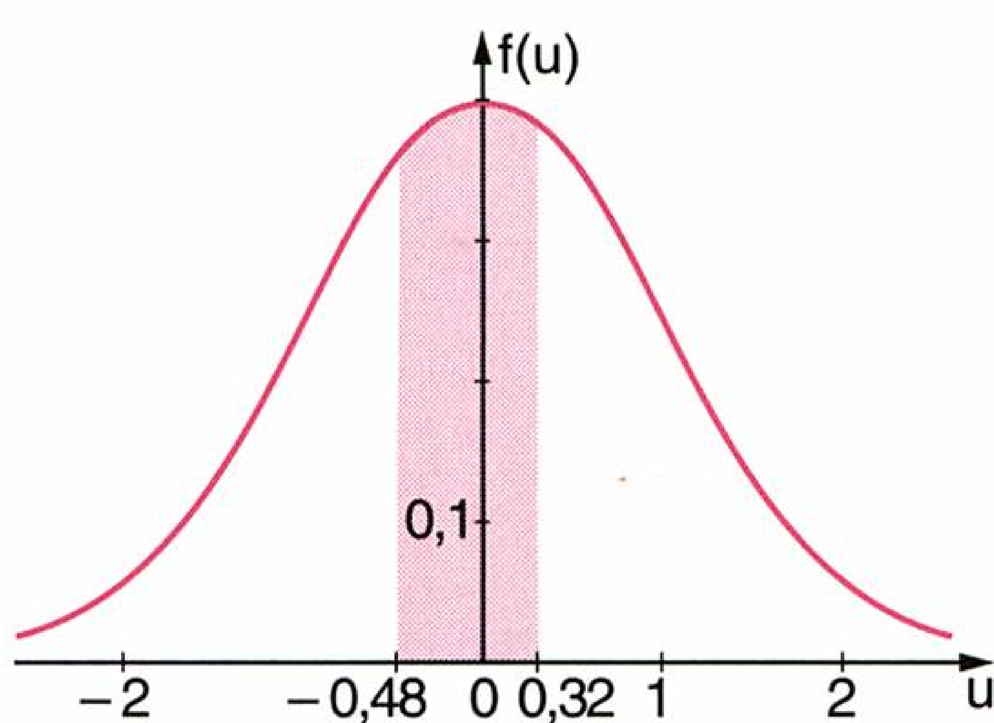
b) Für die Verteilungsfunktion gilt: $F(x) = P(X \leqslant x)$. Wir berechnen daher $P(X > 187) = 1 - P(X \leqslant 187)$.

Die Berechnung erfolgt analog zu **a)**:

$$1 - P(X \leqslant 187) = 1 - P\left(U \leqslant \frac{187-178{,}6}{7{,}5}\right) = 1 - P(U \leqslant 1{,}12) =$$

$$= 1 - F(1{,}12) = 1 - 0{,}86864 = \mathbf{0{,}13136}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Grundwehrdiener größer als 187 cm ist, beträgt 0,13.



c) $P(175 < X < 181) = P(X < 181) - P(X \leqslant 175) =$

$$= P\left(U < \frac{181-178{,}6}{7{,}5}\right) - P\left(U \leqslant \frac{175-178{,}6}{7{,}5}\right) =$$

$$= P(U < 0{,}32) - P(U \leqslant -0{,}48) = F(0{,}32) - F(-0{,}48) =$$

$$= F(0{,}32) - [1 - F(0{,}48)] = 0{,}62552 - [1 - 0{,}68439] =$$

$$= 0{,}62552 - 0{,}31561 = \mathbf{0{,}30991}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Grundwehrdiener zwischen 175 und 181 cm groß ist, beträgt 0,31.

In Analogie zu obigem Beispiel können wir nun für alle normalverteilten Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable einen Wert innerhalb eines bestimmten Intervalls annimmt, berechnen.

Eine andere, ebenfalls sehr häufige Fragestellung lautet: Welche Abweichungen vom Mittelwert sind zulässig, um einen bestimmten Anteil der Grundgesamtheit zu erfassen? Wir wollen diese zunächst sehr abstrakt erscheinende Problematik anhand eines konkreten Beispiels behandeln.

Beispiel:

Durch Untersuchungen wurde festgestellt, dass die durchschnittliche Masse eines maschinell hergestellten Artikels $\mu = 400$ g beträgt. Als Standardabweichung wurde $\sigma = 2$ g ermittelt. Es ist jene Abweichung vom Mittelwert $\Delta\mu$ zu berechnen, innerhalb der 99% der produzierten Stück liegen.

Lösung:

Erinnern wir uns an die schon früher besprochene Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit, die von Richard von MISES stammt. Es gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable „X = Gewicht des maschinell hergestellten Artikels“ im Intervall $[400 - \Delta\mu,\ 400 + \Delta\mu]$ liegt, ist 0,99:

$$P(400 - \Delta\mu < X < 400 + \Delta\mu) = 0{,}99$$

$$P(X < 400 + \Delta\mu) - P(X \leqslant 400 - \Delta\mu) = 0{,}99 \quad \Big| \text{ Transformieren}$$

$$P\left(U < \frac{400 + \Delta\mu - 400}{2}\right) - P\left(U \leqslant \frac{400 - \Delta\mu - 400}{2}\right) = 0{,}99$$

$$P\left(U < \frac{\Delta\mu}{2}\right) - P\left(U \leqslant -\frac{\Delta\mu}{2}\right) = 0{,}99$$

$$F\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) - F\left(-\frac{\Delta\mu}{2}\right) = 0{,}99$$

$$F\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) - \left[1 - F\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right)\right] = 0{,}99$$

$$2F\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) - 1 = 0{,}99$$

$$2F\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) = 1{,}99$$

$$F\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) = \mathbf{0{,}995}$$

Wir stehen nun vor dem Problem, zu einem Funktionswert das zugehörige Argument zu bestimmen. Der Wert $F\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) = 0{,}995$ ist jedoch in der Normalverteilungstabelle nicht enthalten. Er liegt zwischen $F(2{,}57) = 0{,}99492$ und $F(2{,}58) = 0{,}99506$. Der gesuchte Wert liegt daher im Intervall $[2{,}57,\ 2{,}58]$ und soll näherungsweise mittels **linearer Interpolation** bestimmt werden. Bezogen auf $k = 2{,}57$ und $F(k) = 0{,}99492$ kann man sagen:

Änderung von F(k) um 0,00014 $\Rightarrow$ Änderung von k um 0,01

Änderung von F(k) um 0,00008 $\Rightarrow$ Änderung von k um 0,0057

$\Rightarrow$ $F(2{,}57571) = 0{,}995$

$$\frac{\Delta\mu}{2} = 2{,}5757$$

$$\mathbf{\Delta\mu = 5{,}1514}$$

Innerhalb einer Abweichung $\Delta\mu = 5{,}15$ g vom Mittelwert μ liegen 99% der produzierten Stücke.



Richard von MISES
(1883—1953)

Das nebenstehende Beispiel führt zu dem Problem, zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit p den Wert der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Normalverteilung an der Stelle $\frac{1+p}{2}$ zu bestimmen, also $F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$.

Die lineare Interpolation liefert nur Näherungswerte. Die exakten Werte können wir der nachstehenden Tabelle entnehmen:

p	$F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$
0,90	1,6449
0,95	1,9599
0,96	2,0537
0,97	2,1701
0,98	2,3263
0,99	2,5758

Laut Tabelle erhalten wir also $\left(\frac{\Delta\mu}{2}\right) = 2{,}5758$ bzw. $\Delta\mu = 5{,}1516$.

Der Unterschied ist also sehr klein.

Bei den weiteren Beispielen sowie bei den Aufgaben soll — an Stelle der Interpolationsberechnung — stets der Tabellenwert herangezogen werden.

Auf der nächsten Seite beginnt ein etwas umfangreicheres Beispiel, in dem — gleichsam als Wiederholung des Abschnitts „**Beschreibende Statistik**“ — Mittelwert und Standardabweichung nicht gegeben, sondern erst zu berechnen sind.

Zur Kontrolle von Produktionsprozessen werden in der Praxis sogenannte **Qualitätsregelkarten** verwenden.

Eine Qualitätsregelkarte ist ein Formblatt zur grafischen Darstellung von Werten, die bei der Prüfung einer Reihe von Stichproben aus einem laufenden Fertigungsprozess ermittelt werden. Diese Werte sind Messwerte bzw. daraus berechnete statistische Kennwerte oder Zählergebnisse und dienen dazu, mit Hilfe vorher eingetragener Warn- und Eingriffsgrenzen den Prozess zu regeln.

Mit Hilfe der Qualitätsregelkarte soll die Übereinstimmung zwischen dem Ist-Zustand der Fertigung und dem Soll-Zustand überwacht werden. Dieser Soll-Zustand kann der bisherige Ist-Zustand sein und ist gekennzeichnet durch die bisherige Lage der Fertigungsverteilung und durch deren Zufallsstreubereich.

Der Soll-Zustand kann auch ein echter Soll-Zustand sein, wenn als Zielvorgabe ein zu erreichender Wert und diesem zugeordnete Grenzwerte (z. B. Toleranzgrenzen) vorgeschrieben sind.

Der Aufbau einer Qualitätsregelkarte ist denkbar einfach. In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem wird auf der Abszisse die Prüfzeit (Zeitachse) und auf der Ordinate — entsprechend dem Zweck der Qualitätsregelkarte — das qualitative oder quantitative Merkmal (Merkmalsachse) aufgetragen.

In weiterer Folge werden dann untere und obere Eingriffsgrenzen sowie untere und obere Warngrenzen festgelegt und eingezeichnet. Die Qualitätsregelkarten werden am entsprechenden Arbeitsplatz gut sichtbar angebracht, um den Maschinenbediener den Verlauf seines Fertigungsprozesses transparent zu machen.

Beispiel:

Auf einer Metallhobelmaschine werden Platten hergestellt. Anlässlich einer routinemäßigen Kontrolle der Qualität wurde die Dicke von 20 Platten gemessen, wobei folgende Maße (in mm) festgestellt wurden: 42, 43, 36,5, 38,5, 41,5, 40,5, 39,5, 44, 40, 41, 35,5, 36, 41, 38, 39,5, 40, 40,5, 37,5, 43,5 und 42.

a) Man berechne den Mittelwert und die Standardabweichung der Plattendicke.

b) Angenommen, die Plattendicke ist normalverteilt und Mittelwert und Standardabweichung von der Grundgesamtheit stimmen mit den entsprechenden Werten der Stichprobe überein. Wie viel Prozent Ausschuss hat man zu erwarten, wenn eine Abweichung von ±2,5 mm um den Mittelwert zulässig ist?

c) Welche Toleranzgrenzen sind festzulegen, damit nicht mehr als 10% Ausschuss vorliegen?

Lösung:

a)

x_i	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$
42	2	4
43	3	9
36,5	–3,5	12,25
38,5	–1,5	2,25
41,5	1,5	2,25
40,5	0,5	0,25
39,5	–0,5	0,25
44	4	16
40	0	0
41	1	1
35,5	–4,5	20,25
36	–4	16
41	1	1
38	–2	4
39,5	–0,5	0,25
40	0	0
40,5	0,5	0,25
37,5	–2,5	6,25
43,5	3,5	12,25
42	2	4
800		111,5

$\mu = \frac{800}{20} = \mathbf{40}$ $\quad\quad$ $\sigma = \sqrt{\frac{111,5}{20}} = \sqrt{5,575} = \mathbf{2,36}...$

b) Ausschuss sind Platten, die dünner als 37,5 mm oder dicker als 42,5 mm sind.

$$P(X < 37,5) = P\left(U < \frac{37,5 - 40}{2,36}\right) = P(U < -1,06) = 1 - P(U < 1,06)$$

$$P(X < 42,5) = P\left(U > \frac{42,5 - 40}{2,36}\right) = P(U > 1,06) = 1 - P(U \leq 1,06)$$

$$P[(X < 37,5) \vee (X > 42,5)] = 2 \cdot (1 - 0,85543) = 0,28914$$

Man hat daher rund **28,9%** Ausschuss zu erwarten.

c) „Nicht mehr als 10% Ausschuss" bedeutet, dass mindestens 90% der Produktion innerhalb der Toleranzgrenzen liegen:

$$P(40-\Delta\mu < X < 40+\Delta\mu) = 0{,}90$$

$$P(X < 40+\Delta\mu) - P(X \leqslant 40-\Delta\mu) = 0{,}90$$

$$P\left(U < \frac{40+\Delta\mu-40}{2{,}36}\right) - P\left(U \leqslant \frac{40-\Delta\mu-40}{2{,}36}\right) = 0{,}90$$

$$\vdots$$

$$2\,F\left(\frac{\Delta\mu}{2{,}36}\right) - 1 = 0{,}90$$

$$\left(\frac{\Delta\mu}{2{,}36}\right) = F^{-1}\left(\frac{1+0{,}90}{2}\right)$$

Der Tabelle auf Seite **61** entnehmen wir für 0,90 den zugehörigen Wert der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion mit 1,6449.

Es gilt daher:

$$\frac{\Delta\mu}{2{,}36} = 1{,}6449$$

$$\Delta\mu = \mathbf{3{,}88}$$

Man müsste Toleranzgrenzen ±**3,88 mm** festlegen.

Durch das Führen einer Qualitätsregelkarte wird erreicht, dass eine Änderung der inneren zufälligen und daher unvermeidbaren Schwankungen frühzeitig erkannt wird und somit die äußeren zufälligen und daher vermeidbaren Schwankungen oder Störungen des Prozesses abgestellt werden.

Mögliche systematische Abweichungen des Fertigungsprozesses, sogenannte **Trends**, können durch eine Qualitätsregelkarte beobachtet und durch eine geeignete Maschineneinstellung berücksichtigt werden.

Abgeschlossene Qualitätsregelkarten, d. h. Karten, die entweder voll sind oder nicht mehr benötigt werden, weil der Auftrag abgeschlossen ist, stellen ein wertvolles Dokument dar und sollten sorgfältig aufbewahrt werden.

Mehr über Qualitätsregelkarten findet sich im Abschnitt **„3.3 Signifikanzprüfung"** (vgl. Seite **69ff.**).

Die Frage nach **Toleranzgrenzen** kommt in der industriellen Qualitätssicherung sehr häufig vor.

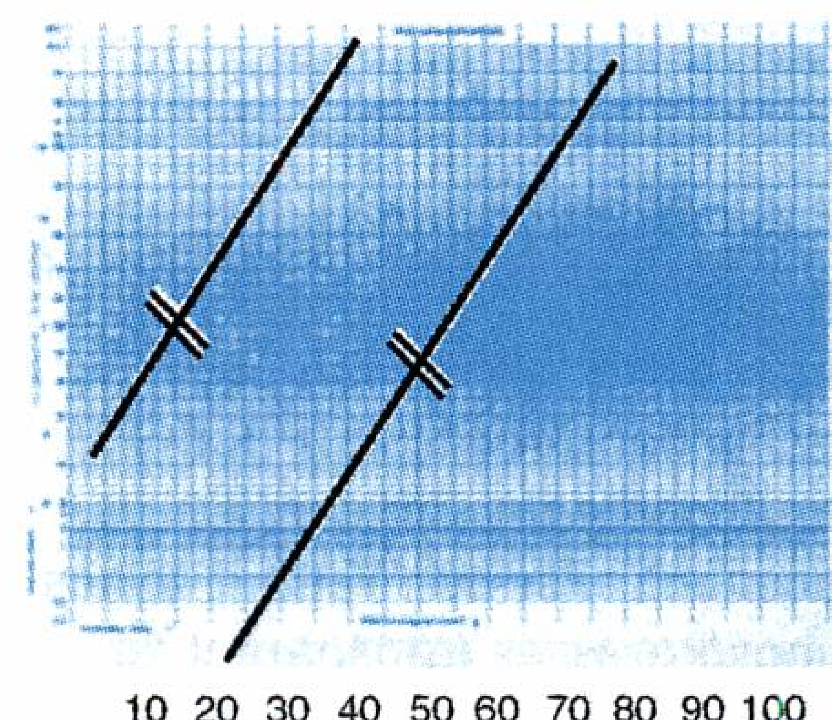
Betrachten wir das obige Beispiel nochmals: Wir erkennen, dass die Toleranzgrenzen vom Mittelwert völlig unabhängig sind. Einzig die Standardabweichung und der Ausschuss-Anteil waren für das Endergebnis maßgeblich.

Allgemein kann man die Berechnung von Toleranzgrenzen $\Delta\mu$ für einen Anteil p der innerhalb der Toleranzgrenzen liegenden Stücke wie folgt angeben:

$$\Delta\mu = \sigma \cdot F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$$

In einem Netz, dessen Abszisse linear und dessen Ordinate nach der Verteilungsfunktion der Normalverteilung verzerrt ist, lässt sich die Verteilungsfunktion jeder Normalverteilung als Gerade darstellen, die wir als **Wahrscheinlichkeitsgerade** bezeichnen wollen.

Die Lage der Wahrscheinlichkeitsgeraden im sogenannten **Wahrscheinlichkeitsnetz** gibt den Mittelwert μ, die Richtung der Geraden gibt die Standardabweichung σ der betreffenden Normalverteilung an. Dadurch erweist sich das Wahrscheinlichkeitsnetz als sehr bequemes Hilfsmittel zur grafischen Behandlung von Aufgaben, bei denen die Normalverteilung eine Rolle spielt (z. B. beim Auswerten von Messwerten).



AUFGABEN

145. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Mittelwert $\mu = 40$ und der Standardabweichung $\sigma = 8$ **a)** im Intervall [35, 45] liegt **b)** einen kleineren Wert als 30 aufweist **c)** einen größeren Wert als 48 aufweist **d)** um mehr als 6 vom Mittelwert abweicht?

146. In einem Unternehmen werden Spezialschrauben hergestellt, deren Länge **genau** 200 mm betragen soll. Die Maschine arbeitet mit einer Standardabweichung von 2,5 mm.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge einer Schraube **a)** zwischen 195 und 205 mm liegt **b)** kleiner als 190 mm ist **c)** größer als 215 mm ist **d)** um mehr als 6 mm von der gewünschten Länge abweicht?

147. Auf einer automatischen Drehmaschine werden Wellen mit bestimmten Abmessungen hergestellt. Die durchschnittliche Länge der Wellen beträgt $\mu = 350$ mm, die Standardabweichung $\sigma = 32$ mm

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die tatsächliche Länge **a)** größer als 360 mm ist **b)** um mehr als 50 mm vom Mittelwert abweicht **c)** kleiner als 326 mm ist?

148. In Aufgabe **a)** 145. **b)** 146. **c)** 147. ist jenes Intervall zu berechnen, in dem **(1)** 90% **(2)** 95% **(3)** 99% der beobachteten Werte zu erwarten sind.

149. Die zweiten Jahrgänge der Welser HTL führen einen sportlichen Wettkampf durch. Neben anderen Leichtathletik-Disziplinen steht der Hochsprung auf dem Programm. Die 120 Schüler sprangen im Durchschnitt $\mu = 1{,}06$ m hoch, wobei eine Standardabweichung $\sigma = 0{,}25$ m festgestellt wurde.

Wir gehen davon aus, dass die Hochsprungleistungen normalverteilt sind.

a) Zählt ein Teilnehmer, der 1,28 m hoch gesprungen ist, zu den besten 20%?

b) Welche Höhe müsste ein Schüler springen, um zu den besten 5% der Teilnehmer zu zählen?

c) Die Sprungleistungen sollen auf Grund der nebenstehenden Tabelle benotet werden: Notenverteilung?

Note	Hochsprungleistung
sehr gut	mehr als 130 cm
gut	mehr als 110 cm
befriedigend	mehr als 90 cm
genügend	mehr als 70 cm
nicht genügend	bis zu 70 cm

150. In einer seiner Untersuchungen hat **Lambert Adolphe Jacques QUETELET** (1796—1874) festgestellt, dass schottische Soldaten einen mittleren Brustumfang von 40 Zoll haben und die Standardabweichung 2 Zoll beträgt.

a) Es ist zu überprüfen, ob ein schottischer Soldat mit 50 Zoll Brustumfang zu den 20% Soldaten mit größtem Brustumfang zählt.

b) Wie groß muss der Brustumfang eines schottischen Soldaten mindestens sein, damit dieser zu den 20% Soldaten mit größtem Brustumfang zählt?

151. Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her, deren Dicke normalverteilt ist und bei einer bestimmten Maschineneinstellung den Mittelwert $\mu = 20$ mm und die Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ mm hat.

a) Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn die Platten **(1)** mindestens 19,97 mm stark sein sollen **(2)** höchstens 20,05 mm stark sein dürfen **(3)** um maximal $\pm 0{,}03$ mm vom Mittelwert abweichen dürfen?

b) Wie muss man die Toleranzgrenzen $20 - \Delta\mu$ und $20 + \Delta\mu$ wählen, damit man nicht mehr als 10% Ausschuss erhält?

c) Wie ändert sich der Ausschuss-Prozentsatz für die in **b)** bestimmten Toleranzgrenzen, wenn sich μ auf Grund der Abnutzung des Hobelstahls nach 20,01 mm verschiebt?

d) Wie stark verringern sich jeweils die Ausschuss-Anteile in **a)**, wenn man eine bessere Hobelmaschine mit $\sigma = 0{,}01$ mm einsetzt?

e) Wie groß müsste σ in **a)** jeweils sein, damit man nur 1% Ausschuss erhält?

152. Die Füllung von 50-kg-Zementsäcken erfolgt maschinell, wobei die Maschine mit einer Standardabweichung von $\sigma = 1{,}5$ kg arbeitet.

a) Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn ein Sack **(1)** mindestens 49 kg wiegen muss **(2)** höchstens 52 kg schwer sein darf **(3)** um maximal 1,2 kg vom Sollgewicht abweichen darf?

b) Wie muss man die Toleranzgrenzen $50 - \Delta\mu$ und $50 + \Delta\mu$ wählen, um nicht mehr als 5% Ausschuss zu erhalten?

c) Wie ändert sich der Ausschuss-Prozentsatz in **b)**, wenn die Maschine durch einen Fehler im Durchschnitt nur 49,5 kg pro Sack einfüllt?

d) Wie verringern sich in **a)** jeweils die Ausschuss-Anteile, wenn eine bessere Abfüllanlage mit $\sigma = 0{,}8$ kg eingesetzt wird?

e) Wie groß müsste σ in **a)** jeweils sein, um nur 2% Ausschuss zu erhalten?

153. Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

Ein Rohr wird aus zwei Teilstücken A und B zusammengesetzt, die von verschiedenen Maschinen hergestellt werden. Die Durchmesser der Rohrteile sind mit $\mu_A = \mu_B = 50$ mm normalverteilt. Die Standardabweichungen betragen $\sigma = 0{,}24$ mm bzw. $\sigma_B = 0{,}45$ mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Teile A und B zusammen gefügt werden können, wenn eine Abweichung der Durchmesser bis zu 0,5 mm zulässig ist?

Eine zweipolige Leitung besteht aus den beiden Polen A und B, deren Längen mit $\mu_A = \mu_B = 10$ m normalverteilt sind. Die Längen wurden mit unterschiedlicher Genauigkeit bestimmt: Die Standardabweichungen betragen $\sigma_A = 0{,}20$ m bzw. $\sigma_B = 0{,}21$ m. Eine Längenabweichung der beiden Pole von 0,25 m kann toleriert werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Pole zur Herstellung einer elektrischen Leitung verwendet werden können?

Es liegen jeweils zwei Zufallsvariable A und B vor, von denen Mittelwert und Standardabweichung bekannt sind. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, mit der der Differenzbetrag der beiden Zufallsvariablen A und B einen bestimmten Wert nicht überschreitet. Wir überlegen: **Die Differenz D ist auch eine Zufallsvariable. Für den Erwartungswert von D gilt: $\mu_D = \mu_A - \mu_B$** (In unserem Fall: $\mu_D = 0$.)

Nicht ganz so einfach ist es mit der Standardabweichung. Ohne Beweis wollen wir den folgenden Zusammenhang angeben: $\sigma_D = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$. (Die Varianz σ_D^2 der Differenz D zweier unabhängiger Zufallsvariablen A und B ist gleich der Summe der Varianzen von A und B: $\sigma_D^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$)

Wir berechnen σ_D:

$\sigma_D = \sqrt{0{,}24^2 + 0{,}45^2} = \sqrt{0{,}2601} = 0{,}51$

$\sigma_D =$

Wir kennen nun Mittelwert μ_D und Standardabweichung σ_D unserer Zufallsvariablen D. Beim Berechnen der Wahrscheinlichkeit ist zu beachten, dass der Differenzbetrag $|D|$ zu untersuchen ist:

$P(|D| < 0{,}5) = P(-0{,}5 < D < 0{,}5)$

Die weitere Vorgangsweise (Übergang zur standardisierten Normalverteilung, Umformung, Aufsuchen des Tabellenwerts) kann als bekannt vorausgesetzt werden.

$$P\left(\frac{-0{,}5-0}{0{,}51} < U < \frac{0{,}5-0}{0{,}51}\right) = P\left(-\frac{50}{51} < U < \frac{50}{51}\right) =$$

$$= P\left(U < \frac{50}{51}\right) - P\left(U \leqslant -\frac{50}{51}\right) = F\left(\frac{50}{51}\right) - F\left(-\frac{50}{51}\right) =$$

$$= F\left(\frac{50}{51}\right) - \left[1 - F\left(\frac{50}{51}\right)\right] = 2 \cdot F\left(\frac{50}{51}\right) - 1 =$$

$$= 2 \cdot F(0{,}98) - 1 = 2 \cdot 0{,}83646 - 1 = \mathbf{0{,}67292}$$

Zwei Teile A und B können mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,673 zusammengefügt werden.

154. Eine Elektrowarenhandlung bietet zwei Uhrenbatteriesorten A und B an. Die unterschiedlichen Lebensdauern sowie deren Standardabweichungen sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen.

Sorte	Durchschnittliche Lebensdauer in Tagen	Standardabweichung in Tagen
A	1000	100
B	1200	250

a) Eine Umfrage hat ergeben, dass die Kunden Uhrenbatterien mit einer Lebensdauer von weniger als drei Jahren ablehnen. Welche Sorte enthält unter diesem Gesichtspunkt weniger Ausschuss?

Anleitung: Es ist zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die jeweilige Lebensdauer kleiner als drei Jahre ist. Auf Grund dieses Ergebnisses ist eine Entscheidung zu treffen (1 Jahr = 365 Tage).

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert eine Batterie der Sorte A länger als eine Batterie der Sorte B?

155. In einem Betrieb werden Gurkengläser maschinell gefüllt. Für 380 g Roheinwaage stehen zwei verschiedene Maschinen A und B zur Verfügung, die mit den Standardabweichungen $\sigma_A = 21\,g$ und $\sigma_B = 28\,g$ arbeiten.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein von Maschine B gefülltes Gurkenglas mehr Roheinwaage als ein von Maschine A gefülltes, wenn $\mu_A = \mu_B$ gilt?

156. Ein Fleischhauer hat zum Abwägen zwei Waagen, über die Folgendes behauptet wird:

Waage A zeigt im Durchschnitt das richtige Gewicht, die Standardabweichung beträgt $\sigma_A = 4\,g$.

Waage B zeigt im Durchschnitt um 5 g zu viel an, tut dies jedoch präziser, da $\sigma_B = 3\,g$.

Ein Kunde verlangt 50 g Wurst.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich mehr als 50 g Wurst zu erhalten, wenn mit Waage A 50 g abgewogen wird?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich mehr als 50 g Wurst zu erhalten, wenn mit Waage B 50 g abgewogen wird?

422 Amtsblatt für das Eichwesen Nr. 8/80

Verordnung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen vom 24. Oktober 1980, mit der die Eichvorschriften für Nichtselbsttätige Waagen der Genauigkeitsklasse (III) (Handelswaagen) erlassen werden

Auf Grund der §§ 39 Abs. 1 Z. 1 und § 46 Abs. 1 des Maß- und Eichgesetzes (MEG), BGBl. Nr. 152/1950, in der Fassung des Bundesgesetzes BGBl. Nr. 174/1973 wird verordnet:

Allgemeines

I. ABSCHNITT

Art der Zulassung

§ 1. (1) Zulässig im Sinne des § 1 Abs. 1 der Eich-Zulassungsordnung, BGBl. Nr. 162/1953, sind Nichtselbsttätige Waagen der Genauigkeitsklasse (III) (Handelswaagen), die den im folgenden festgelegten Bestimmungen genügen.

(2) 1. Allgemein zur Eichung zugelassen sind alle Waagen, die den §§ 28 bis 37 entsprechen.

2. Bei Waagen, die den §§ 28 bis 37 nicht entsprechen, bedürfen die Bauarten der einzelnen Hersteller der besonderen Zulassung nach § 1 Abs. 1 der Eich-Zulassungsordnung.

3. Sind Waagen nach Z. 2 besonders zur Eichung zugelassen, so schließt diese Zulassung eine Kombination mit der Auswägeeinrichtung einer allgemein zur Eichung zugelassenen Waage ein.

Begriffsbestimmungen

§ 2. Im Rahmen dieser Eichvorschriften gelten die folgenden Begriffsbestimmungen:

1. Eine Wägung ist eine Messung der Masse eines Körpers mit Hilfe einer Waage.
2. Waagen sind Meßeinrichtungen zum Bestimmen der Masse eines Körpers mit Hilfe der auf diesen Körper wirkenden Fallbeschleunigung.
3. Nichtselbsttätige Waagen sind Waagen, bei denen für die Wägung, insbesondere zum Belasten und/oder zum Entlasten des Lastträgers sowie zur Ermittlung des Wägeergebnisses, Bedienungspersonal erforderlich ist.
4. Waagen ohne Anzeigeeinrichtung sind Waagen, die keine nach Masseneinheiten bezifferte Skala haben.
5. Waagen mit Anzeigeeinrichtung sind Waagen, bei denen das Wägeergebnis oder ein Teil des Wägeergebnisses unmittelbar abgelesen werden kann.
6. Nichtselbsteinspielende Waagen sind Waagen, bei denen die Einspiellage ausschließlich durch Eingreifen von Hand aus ermittelt wird.
7. Selbsteinspielende Waagen sind Waagen, bei denen die Einspiellage ohne Eingreifen von Hand aus erreicht wird.
8. Halbselbsteinspielende Waagen sind Waagen, bei denen beim Übergang von einem Selbsteinspielbereich gemäß Z. 50 zum nächsten von Hand aus eingegriffen werden muß.
9. Ein Lastträger ist ein Teil der Waage, der zur Aufnahme der Last bestimmt ist.
10. Eine zusätzliche Einrichtung zur Lastaufnahme ist eine Einrichtung zur Lastaufnahme, die nicht unmittelbar auf Hebeln oder Kraftaufnehmern gelagert, sondern an einem Lastträger befestigt ist.
11. Ein Zwischenhebelwerk ist ein Teil der Waage, mit dem die von der Last über den Lastträger ausgeübte Kraft auf die Auswägeeinrichtung übertragen wird.
12. Eine Auswägeeinrichtung ist ein Teil der Waage, mit dem die Masse der Last entweder durch Ausgleich der vom Zwischenhebelwerk übertragenen Kraft mit einer gemessenen Kraft oder durch Anzeige der Masse, die der Ausgleichskraft entspricht, bestimmt wird.
13. Eine Gewichtsschale ist ein Teil der Auswägeeinrichtung, der zur Aufnahme der Gewichtsstücke dient, wenn der Lastausgleich ganz oder teilweise mit Hilfe von Gewichtsstücken erfolgt.
14. Eine Anzeigeeinrichtung ist ein Teil der Auswägeeinrichtung, an dem das Wägeergebnis oder ein Teil des Wägeergebnisses unmittelbar abgelesen wird.
15. Eine Grobskala ist eine Skala mit höchstens 99 Teilungswerten zwischen Null und der Höchstlast.
16. Ein Druckwerk ist ein Teil der Auswägeeinrichtung, der das Wägeergebnis abdruckt.
17. Ein Meßwertausgang ist ein elektrischer Anschluß, an dem das von der jeweiligen Auswägeeinrichtung ermittelte Meßergebnis analog oder digital abgenommen werden kann.
18. Ein Einspielanzeiger ist eine Einrichtung, die das Erreichen der Einspiellage einer Waage anzeigt.
19. Skalenmarken sind die Teilstriche oder Kerben einer Analogskala oder die Zahlen einer Analogzahlenanzeige.
20. Eine Skalengrundlinie ist eine gedachte Verbindungslinie durch die Mitten der kürzesten Teilstriche.
21. Schwingungsdämpfer sind Einrichtungen zur Stabilisierung der Anzeige.
22. Ein Mittelwertsbildner ist eine Einrichtung, die eine stabile Anzeige ermöglicht, welche dem Mittelwert von aufeinanderfolgenden Meßwerten entspricht.
23. Eine Nivelliereinrichtung ist eine Einrichtung zum Ausrichten einer Waage in ihre Bezugslage (Waagrechtstellung).
24. Eine Nullstelleinrichtung ist eine Einrichtung, mit der die unbelastete Waage zum Einspielen auf die Nullmarke gebracht werden kann.
25. Eine nichtautomatische Nullstelleinrichtung ist eine Einrichtung, die durch Handbedienung die Nullstellung ermöglicht.
26. Eine halbautomatische Nullstelleinrichtung ist eine Einrichtung, die auf Grund eines manuellen Befehls die Nullstellung automatisch durchführt.
27. Eine automatische Nullstelleinrichtung ist eine Einrichtung, die ohne manuellen Eingriff die Nullstellung automatisch durchführt.
28. Eine Einrichtung zur automatischen Korrektur des Wägeergebnisses um den Nullpunktsfehler ist eine Einrichtung,

3. Mehr über beurteilende Statistik

3.1 Qualitätsprüfung in der Praxis

Angenommen, es werden 2000 Fernsehgeräte geliefert. Es gilt festzustellen, ob die Geräte in Ordnung sind. Die entscheidende Frage lautet: Vollprüfung oder Stichprobenprüfung? Einerseits ist die **Vollprüfung**, d. h. ein Sortieren, erforderlich, wenn durch Verpflichtung kein fehlerhaftes Teil verwendet werden darf. Beispiele hierfür sind in der Automobilindustrie gegeben. Andererseits kommt bei einer zerstörenden Prüfung überhaupt nur eine **Stichprobenprüfung** in Betracht. Zwischen diesen beiden extremen Situationen ist eine Entscheidung nach ökonomischen Gesichtspunkten zu treffen.

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Annahme, nach einer von Menschen durchgeführten Vollprüfung würden sich keine fehlerhaften Einheiten mehr in dem „Los“ befinden, eine Illusion ist. *„Alle Computer werden vor der Auslieferung 24 Stunden lang auf alle Funktionen überprüft. Somit ist garantiert, dass jedes von uns gelieferte Gerät absolut funktionsfähig und qualitativ hochwertig ist!“,* lautet das Versprechen einer namhaften österreichischen EDV-Firma. Und dennoch treten bei dieser Computerfirma — ebenso wie bei anderen „Vollprüfern“ — Fehler auf! Denn der Sortierwirkungsgrad, der Quotient von aussortierten und ursprünglich vorhandenen fehlerhaften Einheiten liegt größenordnungsmäßig zwischen 80 bis 95%. Hierbei handelt es sich nur um einen Richtwert, denn der Sortierwirkungsgrad hängt ab von dem zu beurteilenden Merkmal, dem Prüfablauf, der Arbeitsplatzgestaltung, der Qualifikation und Motivation des Prüfpersonals sowie dem ursprünglich vorhandenen Anteil fehlerhafter Einheiten. Dennoch zeigen diese Richtwerte, dass die vom Menschen durchgeführte Vollprüfung mit einem nennenswerten Durchschlupf behaftet ist.

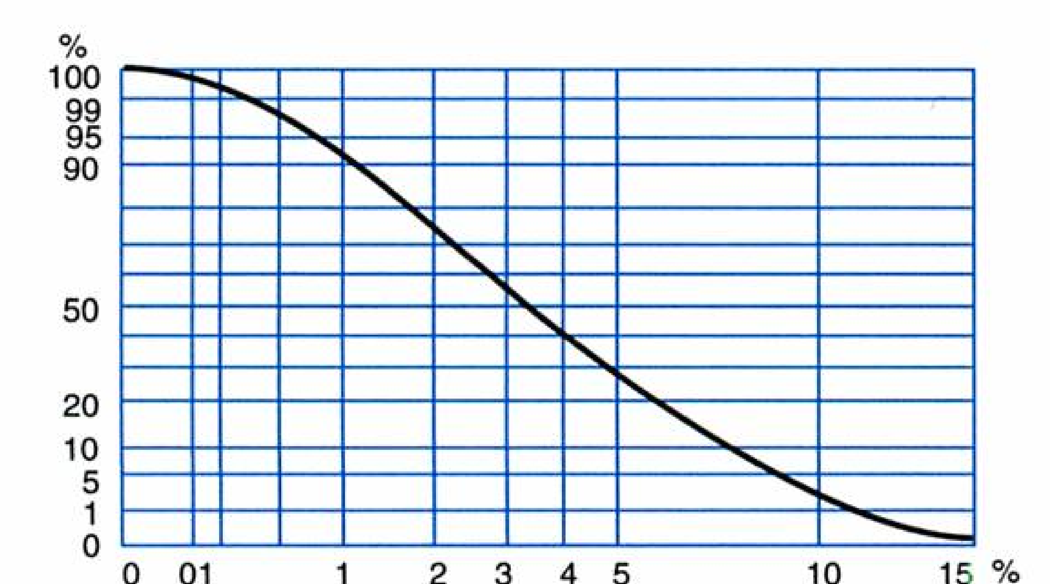
Will man sich bei einer bestimmten Prüfaufgabe für eine Stichprobenprüfung entscheiden, so erhebt sich die Frage, welches Stichprobensystem oder welche Stichprobenanweisung auszuwählen ist. Aus der Vielfalt der Stichprobenverfahren haben sich einige wenige im Laufe der Jahre als Standardlösungen für die Stichprobenprüfung behauptet. Diese sind in Normen festgehalten.[1]

Das genormte **AQL-Stichprobensystem** zur Attributprüfung hat sich weltweit vollständig durchgesetzt. Seine Verwendung ist der Normalfall.

Die für eine Gut-Schlecht-Prüfung beschriebene Problematik besteht natürlich sinngemäß auch für eine messende Prüfung, die mit Mess-, Ablese- oder Übertragungsfehlern behaftet ist.

Um Berechnungen durchführen zu können, überlegen wir, welche Daten beim Ziehen einer Stichprobe relevant sind. Die zu überprüfende Menge stellt eine Grundgesamtheit N dar, die K fehlerhafte Elemente enthält. Man entnimmt nun eine Stichprobe vom Umfang n und setzt fest, dass die Annahme der Menge nur dann erfolgt, wenn die Stichprobe maximal k fehlerhafte Elemente enthält.

Die exakte Beschreibung der sogenannten **Annahmewahrscheinlichkeit** $P(X \leqslant k)$ erfolgt streng genommen durch die **hypergeometrische Verteilung**. Für die in der Praxis zu beschreibenden Fälle ist es jedoch fast immer ausreichend, als Näherung die **Binomialverteilung** zu verwenden, die sich wesentlich einfacher handhaben lässt. Sie besitzt ferner den Vorteil, dass sie unabhängig vom Losumfang ist. Es gibt Einfach-, Doppelt- und Mehrfach-Stichprobenpläne, je nachdem, wie viele Stichproben vom Umfang n man zur Beurteilung heranzieht. Eine Stichprobenanweisung besteht aus der Angabe über den Stichprobenumfang n und der darin maximal zugelassenen Fehlerzahl k. Die Darstellung der Annahmewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Ausschuss-Anteil der Grundgesamtheit heißt **Operationscharakteristik** — vgl. Grafik in der Außenspalte.



Operationscharakteristik der Stichprobenanweisung 50-1

Diese Stichprobenanweisung bedeutet, dass eine Annahme der Gesamtmenge erfolgt, wenn in einer Stichprobe vom Umfang 50 **maximal ein** fehlerhaftes Stück enthalten ist.

Grundsätzlich kann für jede Prüfaufgabe die zweckmäßige Operationscharakteristik und Stichprobenanweisung aus den Normen festgelegt werden.

[1]) Z. B. ÖNORM A 6649, DIN 40080.

3.2 Parameterschätzung

Wird von einem angelieferten Los (z. B. im Wareneingang) eine Stichprobe entnommen und werden in dieser Stichprobe bei der Prüfung fehlerhafte Teile gefunden, so interessiert die Frage, mit welchem Fehleranteil man im gesamten Los mit einer bestimmten **Aussagewahrscheinlichkeit** rechnen muss. Eine Aussagewahrscheinlichkeit von 95% oder 99% genügt im Allgemeinen in der industriellen Praxis.

Das Komplement zur Aussagewahrscheinlichkeit ist die **Irrtumswahrscheinlichkeit**. Einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95% entspricht also eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%.

Der Rückschluss von einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit heißt **indirekter Schluss**. Der Bereich, in dem mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit der unbekannte Parameter der Verteilung der Grundgesamtheit (z. B. Mittelwert) zu erwarten ist, wird als **Vertrauensbereich** oder **Konfidenzintervall** bezeichnet.

Vertrauensbereiche dienen also zur Parameterschätzung.

Wie berechnet man Vertrauensbereiche? Gehen wir davon aus, dass die untersuchte Zufallsgröße normalverteilt und die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit bekannt ist. In diesem Fall sind die Stichprobenwerte ebenfalls normalverteilt.

Es lässt sich zeigen, dass die Verwendung der Normalverteilung bei großen Stichprobenumfängen[1)] auch dann zulässig ist, wenn die oben angeführten Voraussetzungen nicht zutreffen. Die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist dann durch die Standardabweichung der Stichprobe zu ersetzen.

Ohne Beweis wollen wir den Vertrauensbereich bei einem Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und einer Aussagewahrscheinlichkeit p angeben:

$$\left[\bar{x} \pm F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Wie wir bereits wissen, ist $F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$ der entsprechende Wert der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Normalverteilung.

Die für die Qualitätssicherung wichtigsten Werte sind in der nachstehenden Tabelle nochmals angeführt:

p	$F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$
0,90	1,6449
0,95	1,9599
0,96	2,0537
0,97	2,1701
0,98	2,3263
0,99	2,5758

Beispiel:

Bei einer Unterschriftenaktion wurden auf 500 Bögen Unterschriften gesammelt. Auf jedem Bogen war Platz für 40 Unterschriften. Auf vielen Bögen standen aber weniger Unterschriften. Es wurde eine Stichprobe von 50 Bögen ausgewählt und die darauf befindlichen Unterschriften gezählt.

Es wurde ein Stichprobenmittelwert von 34,42 Unterschriften bei einer Standardabweichung von 14,98 festgestellt.

Für die mittlere Anzahl der Unterschriften auf einem Bogen ist ein **a)** 90%- **b)** 99%- Konfidenzintervall anzugeben.

Lösung:

Es gilt: $\bar{x} = 34{,}42,\ \sigma = 14{,}98,\ n = 50$

a) p = 0,90. Der zugehörige Wert beträgt laut Tabelle 1,6449. Das gesuchte Konfidenzintervall ist daher $\left[34{,}42 \pm 1{,}6449 \cdot \frac{14{,}98}{\sqrt{50}}\right] =$

$= [34{,}42 \pm 3{,}4847] = \mathbf{[30{,}9353,\ 37{,}9047]}$

Da von der Art der Fragestellung her nur ganzzahlige Grenzen sinnvoll sind, muss gerundet werden. Um die geforderte Sicherheit nicht zu verletzen, ist die untere Intervallgrenze immer ab- und die obere Intervallgrenze immer aufzurunden. Wir erhalten daher folgendes 90%-Konfidenzintervall: [30, 38]

b) $\left[34{,}42 \pm 2{,}5758 \cdot \frac{14{,}98}{\sqrt{50}}\right] = [34{,}42 \pm 5{,}4568] = \mathbf{[28{,}9632,\ 39{,}8768]} \approx$

$\approx \mathbf{[28,\ 40]}$

Wir erkennen: Je größer die Aussagewahrscheinlichkeit, desto größer wird der Vertrauensbereich. Es ist daher nicht sinnvoll, weitgehend sichere Bereiche zu bestimmen, da die Aussagefähigkeit dadurch sehr eingeschränkt ist. So lässt sich z. B. mit fast 100%iger Sicherheit als Vertrauensbereich für die Zufallsvariable „Körpergröße eines gesunden erwachsenen Menschen in Metern“ das Intervall [1,00, 2,50] angeben.

Vertrauensbereiche können berechnet oder relativ einfach mit Hilfe sogenannter **Nomogramme** ermittelt werden. In der industriellen Qualitätssicherung sind — dem jeweils vorliegenden Verteilungstyp entsprechend — verschiedene Nomogramme gebräuchlich.

1) Richtgröße: $n \geqslant 50$.

3.3 Signifikanzprüfung



Um den Unterschied zwischen einem Stichprobenmittelwert und dem Mittelwert einer bestimmten Grundgesamtheit zu testen, wählen wir die nachstehende Vorgangsweise:

(1) Aufstellung der zu testenden Hypothese, auch **Nullhypothese** genannt. Dabei müssen wir Folgendes berücksichtigen: Vom Aufbau her sind statistische Tests geeignet, Unterschiede zwischen Größen, nicht aber deren Übereinstimmung nachzuweisen. Dementsprechend lautet die Nullhypothese: Es bestehen keine statistisch bedeutenden (signifikanten) Abweichungen zwischen Stichprobenmittelwert und Mittelwert der Grundgesamtheit, d. h. allfällige Abweichung sind zufällig.

(2) Die Gegen- bzw. **Alternativhypothese** lautet demgemäß: Die Abweichung des Stichprobenmittelwerts vom Mittelwert der Grundgesamtheit kann nicht mehr dem Zufall zugeschrieben werden. Die Abweichung ist signifikant.

(3) Bestimmung einer Aussagewahrscheinlichkeit, d. h. es ist zu entscheiden, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Testergebnis richtig sein soll. Bei der Qualitätssicherung im Betrieb sind Aussagewahrscheinlichkeiten von 95 % bzw. 99 % üblich.

(4) Bestimmung eines Zufallsstreubereichs für die Abweichung des Stichprobenmittelwerts vom Mittelwert der Grundgesamtheit, d. h. es ist zu berechnen, bis zu welchen Grenzen Abweichungen noch als „zufällig" bezeichnet werden können.

(5) Überprüfung, ob der festgestellte Stichprobenmittelwert innerhalb des errechneten Zufallsstreubereiches liegt.

(6) Interpretation des Ergebnisses:

— Liegt der festgestellte Stichprobenmittelwert außerhalb des Zufallsstreubereichs, wird die Nullhypothese verworfen. Es gilt daher als statistisch nachgewiesen, dass die Abweichung nicht durch Zufallseinflüsse bedingt ist. Der Beweis, dass die Nullhypothese falsch ist, wurde erbracht.

— Liegt der festgestellte Stichprobenmittelwert innerhalb des Zufallsstreubereichs, kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. Der Nachweis, dass die Abweichung nicht durch Zufallseinflüsse bedingt ist, konnte statistisch nicht erbracht werden. (Man beachte: Durch ein derartiges Testergebnis wurde nicht die Richtigkeit der Nullhypothese bewiesen!)

Die obigen Ausführungen erscheinen ziemlich abstrakt. Am konkreten Beispiel wird das statistische Testen sicher gleich viel klarer.

Bei der in der Hauptspalte beschriebenen Vorgangsweise werden zwei Mittelwerte miteinander verglichen: Mittelwert einer Grundgesamtheit und Mittelwert einer Stichprobe. Allgemein formuliert kann man sagen, dass zwei sogenannte **Parameter** hinsichtlich ihrer Gleichheit bzw. der Zufälligkeit ihrer Abweichungen untersucht werden. Man spricht in diesem Fall von sogenannten **Parametertests**.

Von diesen sind Anpassungs- bzw. Ausreißertests zu unterscheiden.

Um zu untersuchen, ob eine Grundgesamtheit eine bestimmte Verteilungsform hat (ob sie z. B. normalverteilt ist), verwendet man sogenannte **Anpassungstests**.

Beim Überprüfen einer Messreihe kann es vorkommen, dass ein Messwert stark von den sonstigen Messwerten abweicht. Testverfahren, die untersuchen, ob dieser eine Messwert dennoch in die Messreihe passt (ob also die Abweichung lediglich im Bereich von Zufallsschwankungen liegt), werden als **Ausreißertests** bezeichnet.

Umgangssprachlich kann man die in der Hauptspalte befindliche Interpretation des Testergebnisses folgendermaßen formulieren. Muss eine Nullhypothese verworfen werden, bedeutet dies: Die Abweichung **kann kein** Zufall sein. Wird die Nullhypothese beibehalten, bedeutet dies: Die Abweichung **kann** ein Zufall sein, **muss aber nicht**.

Wie berechnet man einen zweiseitigen Zufallsstreubereich? Gehen wir davon aus, dass die untersuchte Zufallsgröße normalverteilt ist und dass der Mittelwert μ der Grundgesamtheit und die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit bekannt sind.

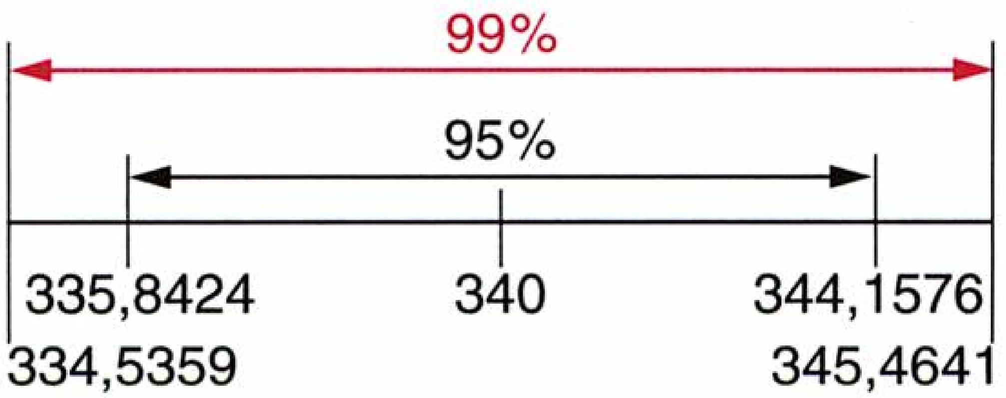
Der Mittelwert einer Stichprobe aus dieser Grundgesamtheit vom Umfang n liegt mit einer Aussagewahrscheinlichkeit p im Intervall

$$\left[\mu \pm F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

p	$F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$
0,90	1,6449
0,95	1,9599
0,96	2,0537
0,97	2,1701
0,98	2,3263
0,99	2,5758

Die Berechnung eines zweiseitigen Zufallsstreubereichs erfolgt analog zu dem uns schon bekannten Konfidenzintervall. Letzteres wird um einen Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ gebildet. Bei einem Zufallsstreubereich geht man jedoch von einem als bekannt angenommenen Mittelwert der Grundgesamtheit μ aus. (Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die Nullhypothese, dass der Mittelwert der Grundgesamtheit mit dem Soll-Wert übereinstimmt und daher allfällige Abweichungen vom Soll-Wert zufällig sind. Durch den statistischen Test wird überprüft, ob die vorliegende Stichprobe tatsächlich aus einer der Nullhypothese entsprechenden Grundgesamtheit stammt.)

Die im obigen Beispiel berechneten Zufallsstreubereiche können wir wie Folgt grafisch darstellen:



Beispiel:

In einem Betrieb werden Gurkengläser maschinell gefüllt, wobei die Maschine mit einer Standardabweichung von 15 g arbeitet und die tatsächliche Abfüllmenge annähernd normalverteilt ist. Die Standardabweichung ist von der eingestellten Abfüllmenge unabhängig.

Es wird eine Stichprobe von 50 Gurkengläsern, in denen sich nach Angaben des Herstellers eine Roheinwaage von 340 g befinden soll, überprüft und eine durchschnittliche Roheinwaage von 335,2 g festgestellt.

Es ist mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von **a)** 95% **b)** 99% zu testen, ob die Maschine richtig eingestellt ist.

Lösung:

(1) Nullhypothese H_0: Es besteht keine signifikante Abweichung vom Soll-Wert, d. h. die Stichprobe stammt aus einer Grundgesamtheit, deren Mittelwert mit dem Soll-Wert übereinstimmt.

(2) Alternativhypothese H_1: Es besteht eine signifikante Abweichung vom Soll-Wert.

(3) Festlegung einer Aussagewahrscheinlichkeit: laut Angabe vorgegeben.

(4) Bestimmung eines **zweiseitigen Zufallsstreubereichs** für die Abweichung vom Soll-Wert — vgl. Außenspalte.

a) p = 0,95. Der zugehörige Wert beträgt laut Tabelle 1,9599. Der Zufallsstreubereich ist daher das Intervall

$$\left[340 \pm 1{,}9599 \cdot \frac{15}{\sqrt{50}}\right] = [340 \pm 4{,}1576] = \mathbf{[335{,}8424,\ 344{,}1576]}$$

b) p = 0,99. Der zugehörige Wert beträgt laut Tabelle 2,5758. Der Zufallsstreubereich ist daher das Intervall

$$\left[340 \pm 2{,}5758 \cdot \frac{15}{\sqrt{50}}\right] = [340 \pm 5{,}4641] = \mathbf{[334{,}5359,\ 345{,}4641]}$$

(5) Der Stichprobenmittelwert von 335,2 g liegt nicht im 95%-Zufallsstreubereich, sondern lediglich im 99%-Zufallsstreubereich.

(6) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ist die Nullhypothese, die Maschine sei richtig eingestellt, zu verwerfen. Anders ausgedrückt: Die Feststellung, dass die Maschine nicht richtig eingestellt ist, stimmt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit. Mit 99%iger Wahrscheinlichkeit kann die Nullhypothese jedoch nicht verworfen werden.

In der Praxis spricht man bei Ergebnissen, deren Wahrscheinlichkeit über 95% liegt, von **statistisch signifikanten Ergebnissen**. Liegt diese Wahrscheinlichkeit über 99%, so nennt man das Ergebnis **hochsignifikant**. In unserem Fall ist die Abweichung des Stichprobenergebnisses vom Soll-Wert daher als signifikant, nicht jedoch hochsignifikant zu bezeichnen. Bei der Qualitätssicherung im Betrieb legt man im Allgemeinen sinnvollerweise die sogenannte **Warngrenze** auf dem 95%-Niveau und die sogenannte **Eingriffsgrenze** auf dem 99%-Niveau fest.

Wir wollen daher das Ergebnis des im vorigen Beispiel durchgeführten Tests abschließend wie folgt interpretieren: Die Warngrenze wurde überschritten, die Eingriffsgrenze noch nicht erreicht. Es ist daher angebracht, den Produktionsprozess in Zukunft besonders genau zu kontrollieren.

Setzt man diese Überlegungen in der industriellen Qualitätssicherung als Hilfsmittel zur Lenkung von Prozessen ein, stellt sich die Frage nach einer übersichtlichen Darstellung. In diesem Zusammenhang haben sich sogenannte **Qualitätsregelkarten** bewährt.

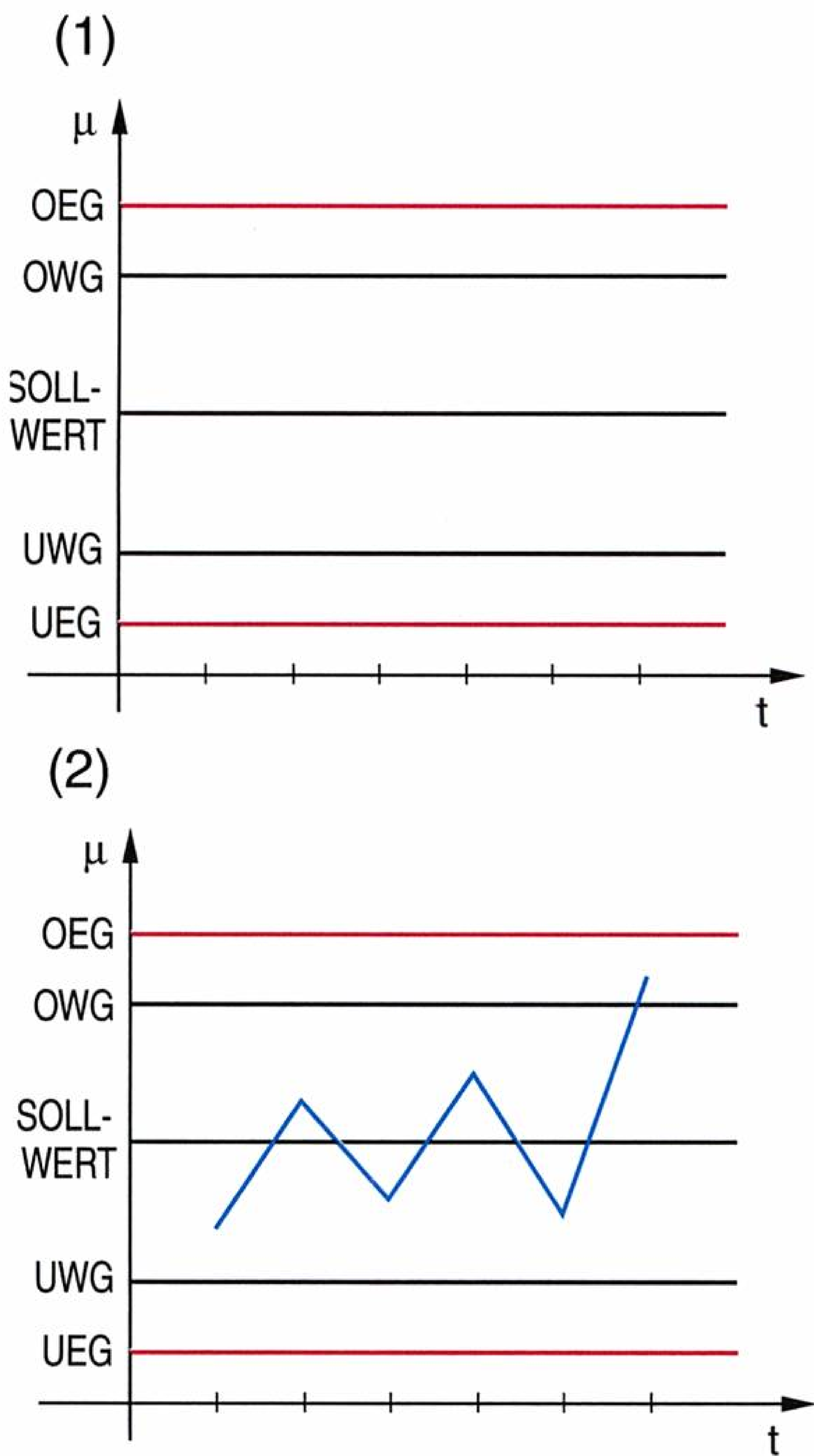
Der **Aufbau einer Qualitätsregelkarte** ist aus Figur **(1)** gut erkennbar: In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem wird auf der Abszisse der Prüfzeitpunkt und auf der Ordinate das Merkmal aufgetragen. Sowohl der Soll-Wert als auch die Warn- und Eingriffsgrenzen werden deutlich sichtbar eingetragen.

In weiterer Folge trägt man dann die Ergebnisse der einzelnen Stichproben in den Raster ein und verbindet diese Punkte. Somit kann man auch optisch einen guten Eindruck über die Entwicklung des Produktionsprozesses erhalten. Figur **(2)** zeigt, wie eine derart **„ausgefüllte" Qualitätsregelkarte** aussehen könnte.

Spätestens an dieser Stelle müssen wir uns fragen, inwieweit unsere Testinterpretation überhaupt zulässig ist, zumal unsere Rückschlüsse auf Stichprobenergebnissen basieren und daher die Gefahr von „Fehlurteilen" nicht ausgeschlossen werden kann. Folgende „Fehlurteile" sind möglich:

— **Fehler 1. Art:** Ablehnung einer richtigen Nullhypothese
— **Fehler 2. Art:** Aufrechterhaltung einer falschen Nullhypothese

	Nullhypothese wird verworfen	Nullhypothese wird nicht verworfen
Nullhypothese ist richtig	Fehler 1. Art	richtige Testinterpretation
Nullhypothese ist falsch	richtige Testinterpretation	Fehler 2. Art



OEG ..... obere Eingriffsgrenze
OWG ..... obere Warngrenze
UWG ..... untere Warngrenze
UEG ..... untere Eingriffsgrenze

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, bei der Interpretation des Testergebnisses einen der genannten Fehler zu begehen? Für den Fehler 1. Art ist diese Frage leicht zu beantworten: Da wir die Richtigkeit der Nullhypothese (Mittelwert der Grundgesamtheit = Soll-Wert) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit p testen, ist die Irrtumswahrscheinlichkeit bei einer richtigen Nullhypothese $1-p$.

Ist die Nullhypothese falsch, liegt eine Grundgesamtheit vor, deren Mittelwert nicht mit dem Soll-Wert übereinstimmt. Die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Nullhypothese aufrecht zu halten, ist daher vom tatsächlichen Mittelwert der Grundgesamtheit, den wir nicht kennen, abhängig. Man kann daher die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art nicht allgemein angeben, sondern nur für verschiedene (fiktive) Mittelwerte der Grundgesamtheit berechnen.

Beispiel:

Wie groß wäre im vorigen Beispiel bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von 0,95 die Wahrscheinlichkeit, den Fehler 2. Art zu begehen, wenn sich tatsächlich im Mittel nur 337,5 g Roheinwaage im Gurkenglas befänden?

Lösung:

Für eine Aussagewahrscheinlichkeit von 0,95 haben wir als Zufallsstreubereich das Intervall $[335{,}8424,\ 344{,}1576]$ ermittelt. Eine Nullhypothese wird beibehalten, wenn der Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ im Zufallsstreubereich liegt. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass dies der Fall ist, wie folgt:

$P(335{,}8424 \leq \bar{x} \leq 344{,}1576) = P(\bar{x} \leq 344{,}1576) - P(\bar{x} < 335{,}8424)$

Wir transformieren — vgl. Außenspalte:[1]

$$P\left(u \leq \frac{344{,}1576 - 337{,}5}{15} \cdot \sqrt{50}\right) - P\left(u < \frac{335{,}8424 - 337{,}5}{15} \cdot \sqrt{50}\right) =$$
$$= P(u \leq 3{,}14) - P(u < -0{,}78) = F(3{,}14) - F(-0{,}78) =$$
$$= F(3{,}14) - [1 - F(0{,}78)] = 0{,}99916 - [1 - 0{,}78230] = \mathbf{0{,}78146}$$

Im nebenstehenden Beispiel untersuchen wir die Zufallsvariable „ $\bar{x}$ = Mittelwert einer Stichprobe vom Umfang n aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ ".

Um in diesem Fall die **standardisierte Normalverteilung** zu erhalten, ist die Transformation $u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ durchzuführen.

Die weitere Vorgangsweise ist uns bereits bekannt.

[1]) Die Werte für σ und n sind dem vorigen Beispiel zu entnehmen. Für μ ist der in diesem Beispiel angegebene (fiktive) Mittwert einzusetzen.

Statistische Tests werden bei der Qualitätssicherung im Betrieb auch eingesetzt, um zu überprüfen, ob sich Verbesserungsmaßnahmen statistisch bemerkbar machen. In diesem Fall interessiert man sich nur für Abweichungen in eine Richtung (einseitige Tests), und man arbeitet daher mit sogenannten **einseitig abgegrenzten Zufallsstreubereichen**.

Wie berechnet man einen einseitigen Zufallsstreubereich? Gehen wir davon aus, dass die untersuchte Zufallsgröße normalverteilt ist und dass der Mittelwert μ der Grundgesamtheit und die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit bekannt sind.

Für eine Aussagewahrscheinlichkeit p ist der einseitig nach oben abgegrenzte Zufallsstreubereich das Intervall

$$\left]-\infty,\ \mu + F^{-1}(p) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

und der einseitig nach unten abgegrenzte Zufallsstreubereich das Intervall

$$\left[\mu - F^{-1}(p) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ +\infty\right[$$

p	$F(p)^{-1}$
0,90	1,2816
0,95	1,6449
0,96	1,7507
0,97	1,8808
0,98	2,0537
0,99	2,3263

Beispiel:

Eine bestimmte Stahlsorte hatte bisher eine normalverteilte Reißfestigkeit mit einem Mittelwert von 500 N / mm^2 und einer Standardabweichung von 12,5 N/mm^2. Um diese Festigkeit zu vergrößern, wurde ein neues Produktionsverfahren eingeführt.
Es wurde im Zuge einer Überprüfung (Stichprobenumfang 15) nunmehr eine durchschnittliche Festigkeit von 510 N/mm^2 festgestellt. Es ist mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95% zu testen, ob mit den neuen Produktionsverfahren eine größere Festigkeit erzielt wird, wenn die Standardabweichung bei beiden Verfahren gleich ist.

Lösung:

(1) Nullhypothese H_0: Es besteht keine signifikante Vergrößerung der Festigkeit, d. h. der Mittelwert der Grundgesamtheit hat sich nicht vergrößert.

(2) Alternativhypothese H_1: Es besteht eine signifikante Vergrößerung der Festigkeit. (Wir untersuchen also nur Abweichungen nach oben.)

(3) Festlegung einer Aussagewahrscheinlichkeit: laut Angabe vorgegeben.

(4) Bestimmung eines einseitig nach oben abgegrenzten Zufallsstreubereichs für die mittlere Festigkeit — vgl. Außenspalte.

p = 0,95. Der zugehörige Wert beträgt laut Tabelle 1,6449. Der Zufallsstreubereich ist daher das Intervall

$$\left]-\infty,\ 500 + 1{,}6449 \cdot \frac{12{,}5}{\sqrt{15}}\right] = \left]-\infty,\ \mathbf{505{,}3089}\right]$$

(5) Der Stichprobenmittelwert von 510 N / mm^2 liegt nicht im einseitig nach oben abgegrenzten Zufallsstreubereich.

(6) Die Nullhypothese wird verworfen. Eine Vergrößerung der Festigkeit ist (mit 95% Aussagewahrscheinlichkeit) nachgewiesen.

Die Überlegungen hinsichtlich möglicher Fehlinterpretationen von Testergebnissen gelten auch bei einseitigen Tests.

Beispiel:

Wie groß wäre im obigen Beispiel die Wahrscheinlichkeit, den Fehler 2. Art zu begehen, wenn die tatsächliche mittlere Reißfestigkeit nunmehr 504,5 N / mm^2 beträgt?

Lösung:

Wir untersuchten im obigen Beispiel nur Abweichungen nach oben. Als Grenze des einseitig nach oben abgegrenzten Zufallsstreubereichs haben wir 505,3089 ermittelt. Wir berechnen daher die Wahrscheinlichkeit, dass der Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ kleiner als diese Obergrenze ist:

$$P(\bar{x} \leqslant 505{,}3089) = P\left(u \leqslant \frac{505{,}3089 - 504{,}5}{12{,}5} \cdot \sqrt{15}\right) = P(u \leqslant 0{,}25) =$$

$$= F(0{,}25) = \mathbf{0{,}59871}$$

Wenn man in unseren Lehrbeispielen für verschiedene fiktive Mittelwerte der Grundgesamtheit auf die gezeigte Art und Weise die jeweilige Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art berechnet, wird man Folgendes erkennen: Je näher der angenommene tatsächliche Mittelwert bei dem der Nullhypothese zu Grunde liegenden Mittelwert liegt, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Nullhypothese aufrecht zu erhalten.

Die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Nullhypothese zu erkennen, wird in manchen Publikationen als **Macht des Tests** bezeichnet. Die einzige Möglichkeit, um diese Macht zu erhöhen, ist eine Vergrößerung des Stichprobenumfanges.

AUFGABEN

Parameterschätzung

Bei den Aufgaben **157.** bis **159.** ist zunächst der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ der untersuchten Stichprobe zu berechnen. Erst im Anschluss daran sind die gesuchten Konfidenzintervalle zu berechnen.

157. Aus einer Sendung Opium entnahm man in einem Krankenhaus 50 Proben zufällig und ermittelte jeweils den Morphingehalt in Prozent. Es ergaben sich folgende Werte:

9,3 9,1 8,2 8,7 10,2 9,5 10,1 8,3 9,4 10,4 8,4 8,6 9,5 10,0 10,3 9,2 8,2 8,7 9,0
9,6 9,6 8,2 8,0 8,7 9,4 10,3 9,6 8,2 10,4 10,5 8,9 9,8 9,2 8,6 10,4 10,1 9,3 9,2
8,7 9,1 8,4 9,0 8,2 8,7 9,6 9,5 10,1 10,2 9,3 10,2

Man berechne ein 97%-Konfidenzintervall für den mittleren Morphingehalt der Sendung.

158. In einem Fremdenverkehrsort untersucht man die Aufenthaltsdauer von 100 Gästen:

Aufenthalt (Tage)	18	20	22	23	27	28	30	32
Anzahl der Gäste	13	18	14	17	14	11	9	4

Man berechne ein Konfidenzintervall für die mittlere Aufenthaltsdauer bei einer statistischen Sicherheit von **a)** 95% **b)** 98%!

159. Um das durchschnittliche Gewicht von Transparentpapier zu ermitteln, wurden 150 Gewichtsproben untersucht. Dabei ergaben sich folgende Werte:

g/m^2	50	51	52	53	54	55
Anzahl	28	42	35	20	18	7

Man gebe ein Konfidenzintervall an, in dem der Erwartungswert mit einer Wahrscheinlichkeit von **a)** 97% **b)** 98% anzutreffen ist!

160. Erfahrungsgemäß haben die Durchmesser der von einer Metallbohrmaschine hergestellten Bohrlöcher eine Standardabweichung von 0,15 mm. Um einen neuen Bohreinsatz für 8,5 mm Durchmesser zu testen, wurden 81 Löcher ausgemessen. Dabei zeigte sich ein Mittelwert von 8,48 mm.

a) Man bestimme ein Konfidenzintervall für eine Sicherheit von 98% und untersuche, ob der Soll-Wert von 8,5 mm in diesem Intervall enthalten ist!

b) Welche Folgerungen sind aus dem Ergebnis von **a)** zu ziehen?

161. Bei der Messung von Reaktionszeiten schätzt ein Psychologe die Standardabweichung auf 0,05 Sekunden.
Wie groß muss eine Stichprobe von Messungen sein, damit er zu **a)** 90% **b)** 98% darauf vertrauen kann, dass der Fehler bei der Schätzung der mittleren Reaktionszeit nicht größer als 0,01 Sekunden sein wird?

162. Die Standardabweichung der Lebensdauer von Fernsehröhren wird mit 80 Stunden geschätzt.
Wie groß muss man eine Stichprobe wählen, damit man zu **a)** 90% **b)** 96% **c)** 98% darauf vertrauen kann, dass der Fehler bei der Schätzung der mittleren Lebensdauer 30 Stunden nicht überschreiten wird?

Signifikanzprüfung

163. Nach Auskunft des Lieferanten ist die mittlere Leistung der von ihm hergestellten Motoren normalverteilt mit dem Mittelwert 2,8 kW und der Standardabweichung von 0,15 kW.

a) Man berechne für einen Stichprobenumfang n = 20 und eine Aussagewahrscheinlichkeit von **(1)** 95 % **(2)** 99 % einen zweiseitigen Zufallsstreubereich für die Abweichung vom Soll-Wert.

b) Die ersten 20 gelieferten Motoren wurden hinsichtlich ihrer Leistung überprüft: Man hat in dieser Stichprobe eine durchschnittliche Leistung von 2,73 kW festgestellt. Liegt eine signifikante bzw. hochsignifikante Abweichung vom Soll-Wert vor?

c) Man berechne für eine Aussagewahrscheinlichkeit von **(1)** 95 % **(2)** 99 % und einer tatsächlichen mittleren Leistung in der Grundgesamtheit von 2,73 kW die Wahrscheinlichkeit, beim Testen einer Stichprobe vom Umfang n = 20 den Fehler 2. Art zu begehen.

164. Text wie Aufgabe **163.**, es sollen jedoch einseitig nach unten abgegrenzte Zufallsstreubereiche ermittelt und das Vorliegen einer signifikanten bzw. hochsignifikanten Unterschreitung des Soll-Werts untersucht werden.

165. Nach Angaben des Herstellers beträgt die mittlere Reißfestigkeit einer bestimmten Textilfaser 20 N, wobei davon auszugehen ist, dass die Reißfestigkeit normalverteilt ist und eine Standardabweichung von 3,5 N vorliegt.

a) Man gebe für die mittlere Reißfestigkeit in einer Stichprobe vom Umfang 400 mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 99 % sowohl einen zweiseitigen als auch einen einseitig nach unten abgegrenzten Zufallsstreubereich an.

b) Im Zuge einer Überprüfung von 400 derartigen Fasern wurde für die Reißfestigkeit ein Stichprobenmittelwert von 19,58 N ermittelt. Man überprüfe, ob dieser Wert in den in **a)** errechneten Zufallsstreubereichen liegt.

c) Man versuche — eventuell in Gruppenarbeit — das Testergebnis zu interpretieren.

166. Ein Unternehmungsberatungsinstitut führt Intelligenztests durch, die derart konstruiert sind, dass der IQ-Wert der Gesamtbevölkerung (= Grundgesamtheit) normalverteilt ist und ein arithmetisches Mittel von 100 sowie eine Standardabweichung von 16 aufweist.

a) Man bestimme für eine Aussagewahrscheinlichkeit von 95 % einen zweiseitigen Zufallsstreubereich für den mittleren IQ-Wert von 50 zufällig ausgewählten getesteten Personen.

b) Bei der Auswertung der Testergebnisse von 50 zufällig ausgewählten Personen ergab sich für den IQ ein Stichprobenmittelwert von 121,34. Unterscheidet sich dieses Ergebnis signifikant von jenem des Bevölkerungsdurchschnitts?

167. Nach Angaben eines Vertreters ist die mittlere Leistung eines angebotenen Motors normalverteilt mit dem Mittelwert 3,6 kW und der Standardabweichung von 0,2 kW.

a) Für einen Stichprobenumfang n = 30 und eine Aussagewahrscheinlichkeit von **(1)** 95 % **(2)** 99 % ist ein zweiseitiger Zufallsstreubereich für die Abweichung vom Soll-Wert zu bestimmen.

b) Der Kunde kauft eine größere Anzahl an Motoren und überprüft 30 Stück bezüglich der Leistung. In dieser Stichprobe stellt er eine mittlere Leistung von 3,5 kW fest. Liegt eine **(1)** signifikante **(2)** hochsignifikante Abweichung von den Angaben des Vertreters vor?

168. Die Getränkeabfüllung in Plastikflaschen wurde in letzter Zeit heftig kritisiert. Eine Umweltschutzgruppe vertrat die Ansicht, dass zwei Drittel der Bevölkerung Plastikflaschen ablehnen. Bei einer durchgeführten Straßenbefragung wurden 1000 zufällig ausgesuchte Menschen gebeten, ihre Ansicht in dieser Angelegenheit darzulegen. 62,4 % der Befragten sprachen sich gegen die Plastikflaschen aus.

Kann die Vermutung der Umweltschutzgruppe (= Nullhypothese) angesichts des Befragungsergebnisses bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95 % aufrecht erhalten werden?

Anleitung: Es ist ein sogenannter **Anteilstest** durchzuführen. Bei einem Anteil h in der Grundgesamtheit ist der zweiseitige Zufallsstreubereich für den Anteil in einer Stichprobe mit dem Umfang n bei einer Aussagewahrscheinlichkeit p das Intervall

$$\left[h \pm F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right]$$

Die für den Mittelwerttest getroffenen Aussagen hinsichtlich der Testinterpretation gelten sinngemäß.

Vermischte Aufgaben

169. Bei der Produktion einer Serie von Taschenrechnern können auf Grund eines Maschinenschadens zwei verschiedene Fehler entstehen: 12% aller Geräte haben defekte Tasten. Bei 8% der Rechner sind die Solarzellen nicht in Ordnung. 2% der Geräte weisen beide Fehler auf.

a) Ein Taschenrechner dieser Serie wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
(1) dass das Gerät einwandfrei arbeitet?
(2) dass das Gerät höchstens einen Fehler hat?
(3) dass die Solarzellen funktionieren, wenn man weiß, dass die Tasten kaputt sind?
(4) dass das Gerät zumindest einen Fehler aufweist?

b) Ein Händler erhält eine Lieferung von 100 Taschenrechnern einer Serie. Der Produzent gibt an, dass üblicherweise 3% der Geräte einen Defekt aufweisen.
Der Händler entnimmt zur Qualitätskontrolle 3 Geräte (mit Zurücklegen) und überprüft sie.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen „X = Anzahl der defekten Stücke in der Auswahl". Dabei ist anzunehmen, dass die Angaben des Produzenten auch für diese Lieferung gelten.

c) Ein anderer Händler führt die Qualitätskontrolle von 100 gelieferten Geräten folgendermaßen durch: Er überprüft 10 zufällig (mit Zurücklegen) ausgewählte Rechner und lehnt die Lieferung ab, wenn er mehr als ein defektes Gerät findet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Sendung annimmt, wenn 5% der gelieferten Geräte defekt sind? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn 8% der Geräte nicht in Ordnung sind?

170. Eine Firma liefert an einen Fotohändler 100 Apparate zu verbilligtem Preis. Dafür darf die Sendung höchstens 20 Geräte zweiter Wahl enthalten. Es wird folgende „Abnahmekontrolle" vereinbart: Der Händler nimmt aus der Lieferung 10 Apparate mit Zurücklegen. Wenn sich unter diesen 10 mehr als 3 Apparate zweiter Wahl befinden, dann darf der Händler die gesamte Lieferung auf Kosten der Firma zurückschicken.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Sendung zurückgeschickt, obwohl sie genau 20 Geräte zweiter Wahl enthält?
Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn die Sendung weniger als 20 Geräte zweiter Wahl enthält (qualitativ)?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Lieferung nicht zurückgeschickt, wenn sie 25 Apparate zweiter Wahl enthält?

171. Im Jahr 1652 fuhren der französische Schriftsteller **Antoine Gombaud Chevalier DE MÉRÉ** (1610—1685) und der Religionsphilosoph, Physiker und Mathematiker **Blaise PASCAL** (1623—1662) zusammen nach Poitou/Westfrankreich. Auf dieser Reise diskutierte DE MÉRÉ mit PASCAL eine Aufgabe, die in interessierten Kreisen bereits im Mittelalter erörtert wurde und in leicht abgewandelter Form hier vorgelegt wird:

a) Ein Spielwürfel wird einmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man keinen Sechser erhält?

b) Ein Spielwürfel wird 4-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man keinen einzigen Sechser würfelt?

c) Wie günstig ist es, auf ein Ergebnis von mindestens einem Sechser in 4 Würfen zu setzen, wenn mit nur einem Würfel gespielt wird?

172. Chevalier DE MÉRÉ machte bankrott, als er in zahlreichen Spielserien darauf wettete, wenigstens einmal die Augensumme 12 (also zwei Sechser!) beim 24-maligen Werfen von zwei Würfeln zu erhalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich **a)** keine Doppelsechs **b)** mindestens eine Doppelsechs in 24 Würfen ergibt?

173. Ein Unternehmen stellt Sicherungen mit einer Ausschuss-Quote von 10% her.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei einer zufälligen Entnahme von 20 Stück **(1)** nur einwandfreie **(2)** genau zwei defekte Sicherungen?

b) Für den Versand werden jeweils 50 Sicherungen in eine Schachtel gepackt. Welche Anzahl an unbrauchbaren Sicherungen ist pro Schachtel zu erwarten?

c) Ein Händler entnimmt bei der Übernahme von jeder Lieferung mit Zurücklegen drei Sicherungen und nimmt die Lieferung nur an, wenn bei seiner Überprüfung nur einwandfreie Sicherungen gefunden wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt dieser Händler mindestens 9 von 10 Lieferungen an?

174. 6,5% der von einem Betrieb hergestellten Transistoren sind defekt. Die Transistoren werden in Kisten zu je 20 Stück an den Handel weitergegeben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer an den Handel weitergegebenen Kiste weniger als drei defekte Transistoren befinden?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten höchstens 10 von 12 Kisten jeweils weniger als drei defekte Transistoren?

175. „Kaufen Sie Narzissenzwiebeln zu einem noch nie dagewesenen Preis!", stand bei einem Blumengeschäft in großen bunten Klebebuchstaben auf der Auslagenscheibe. Herr Müller erkundigte sich und erfuhr vom Verkäufer, dass garantiert 19 von 20 Zwiebeln aufgehen würden. Herr Müller kaufte 12 dieser Zwiebeln und wurde bitter enttäuscht: Im folgenden Frühjahr fand er nur 7 Narzissen in seinem Beet vor.

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis, wenn die Angaben des Verkäufers korrekt waren.

b) Herr Müller vermutet, dass im Durchschnitt nur jede zweite Zwiebel aufgeht. Wie wahrscheinlich ist unter dieser Voraussetzung das Ergebnis?

176. Gerald und Heinz spielen Backgammon. Aus der Erfahrung weiß man, dass Gerald im Durchschnitt 4 von 5 Partien gewinnt. Die beiden spielen insgesamt 10 Spiele.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Heinz-Dieter kein Einziges dieser Spiele?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Heinz-Dieter mehr Spiele als Gerald?

177. Bei der Herstellung von Nägeln, die laut Aufschrift auf der Verpackung genau 7,5 cm lang sein sollen, wird mit einer Standardabweichung von 0,3 cm gearbeitet. Die tatsächliche Nagellänge ist annähernd normalverteilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Nagel länger als 7,9 cm lang ist?

b) Wie viel Prozent aller Nägel sind kürzer als 7,35 cm?

c) Wie viel Prozent aller Nägel weichen vom Soll-Wert 7,5 cm um mehr als 0,5 cm ab?

178. Ein Sägewerk erhält den Auftrag, Holzplatten mit einer Breite von einem Meter bei einer Toleranz von ±0,5 cm zu liefern. Die Holzschneidemaschine arbeitet mit einer Standardabweichung von 0,35 cm. Die tatsächliche Plattenbreite ist annähernd normalverteilt.

a) Wie viel Prozent der zugeschnittenen Bretter sind Ausschuss?

b) Welche Toleranzgrenzen müsste man festsetzen, damit nicht mehr als 10% Ausschuss auftreten?

179. In einem Einzelhandelsbetrieb weiß man aus Erfahrung, dass die Menge des täglichen Bedarfs einer Frischware eine Zufallsvariable X ist, die einer Normalverteilung mit dem Mittel $\mu = 245$ und der Standardabweichung $\sigma = 5{,}14$ gehorcht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Bedarf eines Tages mindestens 238 und höchstens 250 ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Verknappung (Bedarf größer als Bestellmenge) bei einer täglichen Bestellmenge von 252 Stück?

c) Wie groß muss die tägliche Bestellmenge mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer Verknappung höchstens 4% beträgt?

180. Eine Limonadenfirma füllt ihre Produkte in Flaschen ab. Das Volumen der eingefüllten Limonade ist normalverteilt mit dem Mittelwert 2,06 l und der Standardabweichung 0,05 l. Auf den Flaschen ist ein Inhalt von 2 l angegeben.

a) Man berechne, wie viel Prozent der Flaschen weniger als den angegebenen Inhalt aufweisen.

b) Wie groß müsste der Mittelwert bei gleicher Standardabweichung sein, damit nur 5% der Flaschen einen zu geringen Inhalt aufweisen?

c) Wie viel Prozent der Flaschen weisen einen Inhalt auf, der größer als 2,1 l ist?

d) Man ermittle, auf welchen Wert man die Standardabweichung durch eine bessere Einstellung der Abfüllanlage, die jedoch mit höheren Produktionskosten zu erzielen ist, abändern muss, damit nur 5% der Flaschen mehr als 2,1 l Inhalt aufweisen.

181. In einem Produktionsbetrieb wurde festgestellt, dass die maschinell hergestellten Nägel eine mittlere Länge $\mu = 7$ cm bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}12$ cm aufweisen.

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus dieser Produktion stammender Nagel eine Länge von mehr als 7,2 cm aufweist.

b) Ein Kunde meint, dass keine größere Abweichung vom Mittelwert als ±0,15 cm akzeptabel sei. Wie viel Prozent der Produktion sind daher als Ausschuss zu betrachten?

c) Innerhalb welcher Toleranzgrenzen wären 90% der Produktion brauchbar?

182. In einem Wald sollen Bäume ab einem Stammumfang von 50 cm gefällt werden. Man möchte im Voraus den Anteil der zu schlägernden Bäume schätzen, misst von 30 zufällig ausgewählten Bäumen den Stammumfang und erhält hierbei folgende Werte (in cm): 48, 47, 44, 63, 54, 48, 51, 38, 66, 57, 36, 44, 52, 53, 57, 66, 76, 44, 56, 61, 59, 58, 42, 47, 49, 45, 50, 39, 40, 60.

a) Man berechne Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe.

b) Wie viel Prozent des Waldes können geschlägert werden, wenn man davon ausgeht, dass die Dicke der Baumstämme normalverteilt ist und Mittelwert und Standardabweichung mit den aus der Stichprobe ermittelten Werten übereinstimmen?

183. Ein Unternehmen soll Blechplatten mit einer Stärke von 1,5 mm mit einer Toleranz von ±0,05 mm liefern. Zur Herstellung stehen zwei Maschinen A und B zur Verfügung, die unterschiedlich präzise arbeiten.

Aus der Produktion beider Maschinen wird jeweils eine Stichprobe vom Umfang 16 entnommen, wobei die nachstehenden Plattenstärken (in mm) festgestellt wurden.

Maschine A:	1,56	1,48	1,51	1,50	1,49	1,51	1,46	1,42	1,57	1,44	1,47	1,51	1,49	1,51	1,52	1,48
Maschine B:	1,52	1,49	1,48	1,47	1,53	1,56	1,49	1,52	1,54	1,52	1,57	1,53	1,48	1,57	1,44	1,43

a) Man berechne für beide Stichproben jeweils Mittelwert und Standardabweichung.

b) Man berechne, wie viel Prozent Ausschuss man bei jeder der beiden Maschinen zu erwarten hat und gebe an, auf welcher Maschine exakter gearbeitet wird.

184. Bei der Abfüllung von Senf in 250-Gramm-Tuben wurde eine Standardabweichung von ±2,5 g vom Soll-Wert 250 g festgestellt. Die tatsächliche Füllmenge ist annähernd normalverteilt.

a) Wie groß ist unter den o. a. Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Senftube mehr als 250 g enthalten sind?

b) Mit einem Kunden wurde vereinbart, dass Tuben zurückgenommen werden müssen, wenn der tatsächliche Inhalt vom Soll-Wert um mehr als 4 g abweicht. Wie hoch ist der Anteil der voraussichtlich zurückzunehmenden Tuben?

c) Durch einen Bedienungsfehler verschiebt sich der Mittelwert der Füllmenge von 250 g auf 248 g. Auf welchen Prozentsatz erhöht sich der in **b)** errechnete Anteil?

185. Ein Getränkehersteller stellt fest, dass bei der Abfüllung von Cola in 1,5-Liter-Plastikflaschen eine Standardabweichung von 0,05 l vom Soll-Wert auftritt.

Um die Kunden nicht dadurch zu verärgern, dass in den Flaschen „zu wenig Inhalt" ist, stellt er die Maschinen auf einen Soll-Wert von 1,53 l ein.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dennoch weniger als 1,5 l Cola in der Flasche sind?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sogar weniger als 1,45 l Cola in der Flasche sind?

186. Eine Firma erhält den Auftrag, Drahtseile mit einem Durchmesser von 3,5 mm bei einer Toleranz von ±0,05 mm herzustellen.

Aus Gründen der Qualitätssicherung werden stichprobenartig Querschnittsmessungen vorgenommen, wobei ein Mittelwert von 3,49 mm und eine Standardabweichung von 0,02 mm festgestellt wurden.

a) Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten?

b) Welche Toleranzgrenzen sind festzusetzen, wenn nicht mehr als 10 % Ausschuss auftreten sollen?

187. Ein Elektrogerät soll eine Normleistung von 80 Watt haben. Die Erzeugerfirma überprüfte die Produktion, indem die Leistung der in einem bestimmten Zeitraum hergestellten Geräte gemessen wurde. Die in Klassen mit einer Klassenbreite von 1,8 Watt, beginnend mit der Klassenmitte 68,3 Watt, zusammengefassten Messergebnisse ergaben folgende Verteilung:

Klasse	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Stück	0	1	3	0	5	16	53	47	13	4	0	6	0	0	2

Geräte mit einer Abweichung von mehr als 5,4 Watt von der Normleistung sind Ausschuss-Ware.

a) Wie viel Prozent beträgt die Ausschuss-Quote, wenn angenommen wird, dass die Leistung der Geräte eine normalverteilte Zuvallsvariable mit den sich aus der Stichprobe berechneten Parametern bezüglich der Klassenmitte ist?

b) Ein Großunternehmer bestellt 800 Geräte. Der Produzent gibt an, dass üblicherweise 5% der Geräte einen Defekt aufweisen. Der Großunternehmer entnimmt zur Qualitätskontrolle mit Zurücklegen zwei Geräte und überprüft sie.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert der Zufallsvariablen „X = Anzahl der defekten Geräte in der Auswahl“. Dabei ist auzunehmen, dass die Produzentenangaben auch für diese Lieferung gelten.

c) Wie groß muss die Abweichung von der Normleistung gewählt werden, wenn der Ausschuss-Anteil nur 7% betragen soll?

188. Ein Marktforschungsinstitut befragte in einem Bezirk eines Bundeslandes 100 Haushalte über die Wirkung eines „neuen Waschmittels“, 46 davon äußerten sich positiv.

a) Wie viel Prozent der Haushalte werden mit 95%iger Sicherheit das „neue Waschmittel“ kaufen?

Anleitung: Für den Anteil der Haushalte, die das „neue Waschmittel“ kaufen werden, ist ein 95%-Konfidenzintervall anzugeben. Bei einem Anteil h in einer Stichprobe vom Umfang n ist der Vertrauensbereich für den Anteil in der Grundgesamtheit bei einer Aussagewahrscheinlichkeit p das Intervall $\left[h \pm F^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right]$.

b) Auf Grund der Stichproben wird geschätzt, dass der Anteil der Haushalte, die bereits das „neue Waschmittel“ verwenden, zwischen 42% und 50% liegt. Mit welcher Sicherheit kann diese Aussage gemacht werden?

c) In derselben Stichprobe sprechen sich 58 von 100 Haushalten dafür aus, „phosphatfreie Waschmittel“ zu bevorzugen. Man gebe ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil der Haushalte an, die „phosphatfreie Waschmittel“ verwenden würden.

189. Ein Seiler gibt die Reißfestigkeit eines seiner Produkte mit 1500 N an. Nach seinen eigenen Angaben ist davon auszugehen, die Reißfestigkeit sei normalverteilt und es liege eine Standardabweichung von 4,2 N vor.

a) Man gebe für die mittlere Reißfestigkeit in einer Stichprobe vom Umfang 600 mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95% sowohl einen zweiseitigen als auch einen einseitig nach unten abgegrenzten Zufallsstreubereich an.

b) Nach einer Überprüfung von 600 Seilen hat sich ein Stichprobenmittelwert von 1487 N ergeben. Man überprüfe, ob dieser Wert in den in **a)** errechneten Zufallsstreubereichen liegt.

190. Um die Kundschaft nicht durch zu geringe Füllmengen zu verärgern, lässt ein Waschmittelproduzent bei der Füllung von „2-kg-Trommeln“ die Füllmaschinen auf einen Soll-Wert von 2,1 kg einstellen. Die Maschinen arbeiten unabhängig von der Einstellung mit einer Standardabweichung von 0,06 kg. Die tatsächliche Füllmenge ist annähernd normalverteilt.

a) Man gehe davon aus, dass die Maschine auf den Soll-Wert eingestellt ist, und berechne mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95% einen zweiseitigen Zufallsstreubereich für die mittlere Füllmenge einer Stichprobe vom Umfang 25.

b) Anlässlich einer Überprüfung von 25 mit dieser Maschine gefüllten Waschmitteltrommeln wird ein durchschnittlicher Packungsinhalt von 2,01 kg festgestellt. Kann die Nullhypothese, die Maschine sei auf den Soll-Wert eingestellt, angesichts des festgestellten Stichprobenmittelwertes aufrecht erhalten werden?

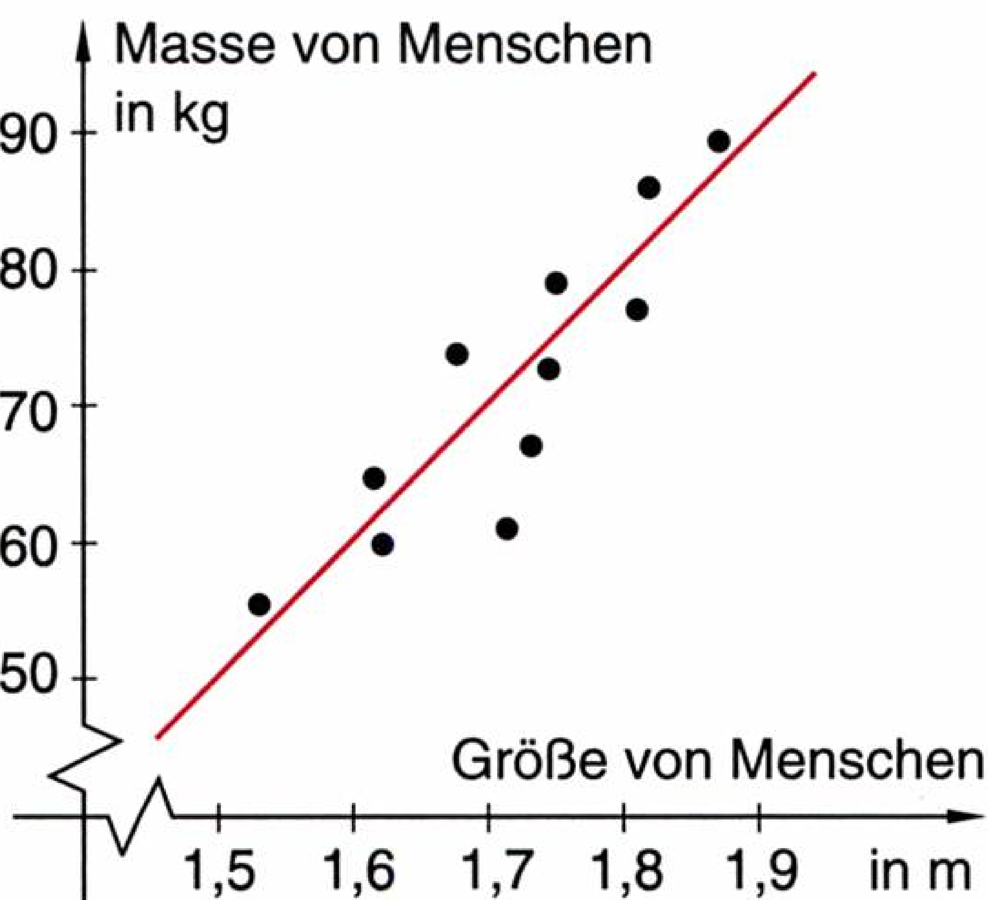
4. Zusammenhänge zwischen zwei Merkmalen

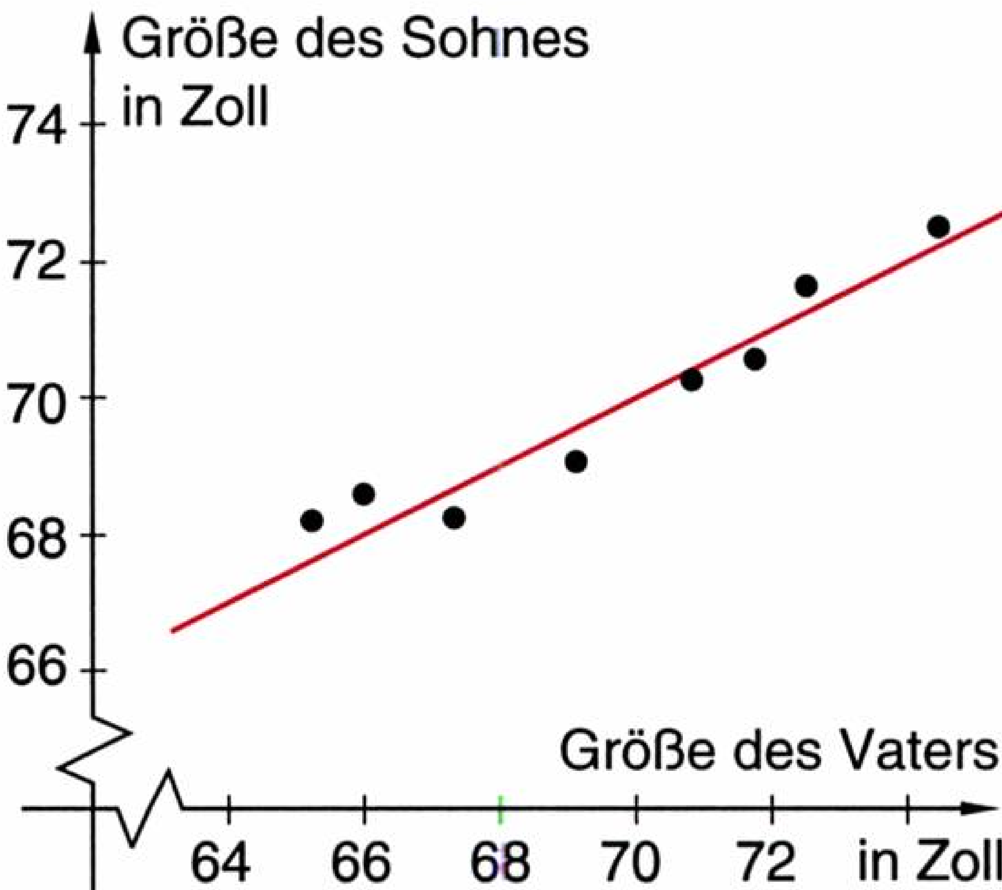
4.1 Regression

Eine **Stichprobe** ist eine Menge von Objekten, die einer Grundgesamtheit zufällig (d. h. mit gleicher Chance für jedes Objekt der Grundgesamtheit) entnommen wird. Gibt es Stichproben, die aus Wertepaaren $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ bestehen? Das ist immer dann der Fall, wenn Zusammenhänge zwischen zwei Merkmalen untersucht werden. So kann man z. B. bei einer Gruppe von Personen sowohl die Anzahl der genossenen Flaschen Bier (X) als auch den jeweiligen Blutalkoholgehalt (Y) feststellen. Man erhält somit einen Zusammenhang, der aus Wertepaaren besteht, die man z. B. in Tabellenform darstellen kann. Werden die Wertepaare (1, 0,3), (2, 0,5), (3, 0,7), … der Tabelle in einem kartesischen Koordinatesystem grafisch veranschaulicht, dann erkennt man: Die Punkte liegen annähernd auf einer Geraden. Es handelt sich um einen linearen Zusammenhang. Dieser lineare Zusammenhang von zwei Merkmalen ist ein Beispiel für eine sogenannte **lineare Regression**. Den in der obigen Figur rosa eingezeichneten Graphen nennt man **Regressionsgerade**.

Anzahl x der Flaschen	1	2	3	4	5	6	7	8[1]
Blutalkohol y in ‰	0,3	0,5	0,7	1,0	1,0	1,5	1,6	2,1

Weitere Beispiele für lineare Regressionen:





Zusammenhang zwischen Größe und Masse von Menschen: Jene Wertepaare (Größe, Masse), die auf der roten Regressionsgeraden liegen, beziehen sich auf normalgewichtige Menschen. Die Punkte im Koordinatensystem zeigen eindeutig eine lineare Tendenz, ja sogar eine starke lineare Abhängigkeit der beiden Merkmale „Größe" und „Masse". Die Regressionsgerade verläuft von links unten nach rechts oben, sie besitzt eine positive Steigung.

Zusammenhang zwischen Größe des Sohns und der Größe des Vaters (Daten nach K. PEARSON und A. LEE, Biometrika 2, 1903, Seite 357): Zwar haben große Väter auch große Söhne, doch besteht ein „Rückschritt" (Regress) der Tendenz in Richtung Durchschnittsgröße des Menschen. Diese Beobachtung geht auf Francis GALTON (vgl. Außenspalte) zurück, der die Worte **Regression** und **Regressionsgerade** prägte. Einem ganzen mathematischen Gebiet wurde also ein Namen gegeben, der sich unglücklicherweise auf einen recht speziellen Sachverhalt bezieht.

Der englische Reisende und Naturforscher **Francis GALTON** (1822–1911) war Begründer der sogenannten **Eugenik**. Die Eugenik ist ein Teilgebiet der Bevölkerungsbiologie, der Lehre von erbgesundem und erbtüchtigem Nachwuchs. GALTON beschäftigte sich auch mit der Untersuchung von Fingerabdrücken. Auf ihn geht die Klassifizierung von Fingerabdrücken in Bögen, Schleifen und Spiralen zurück.

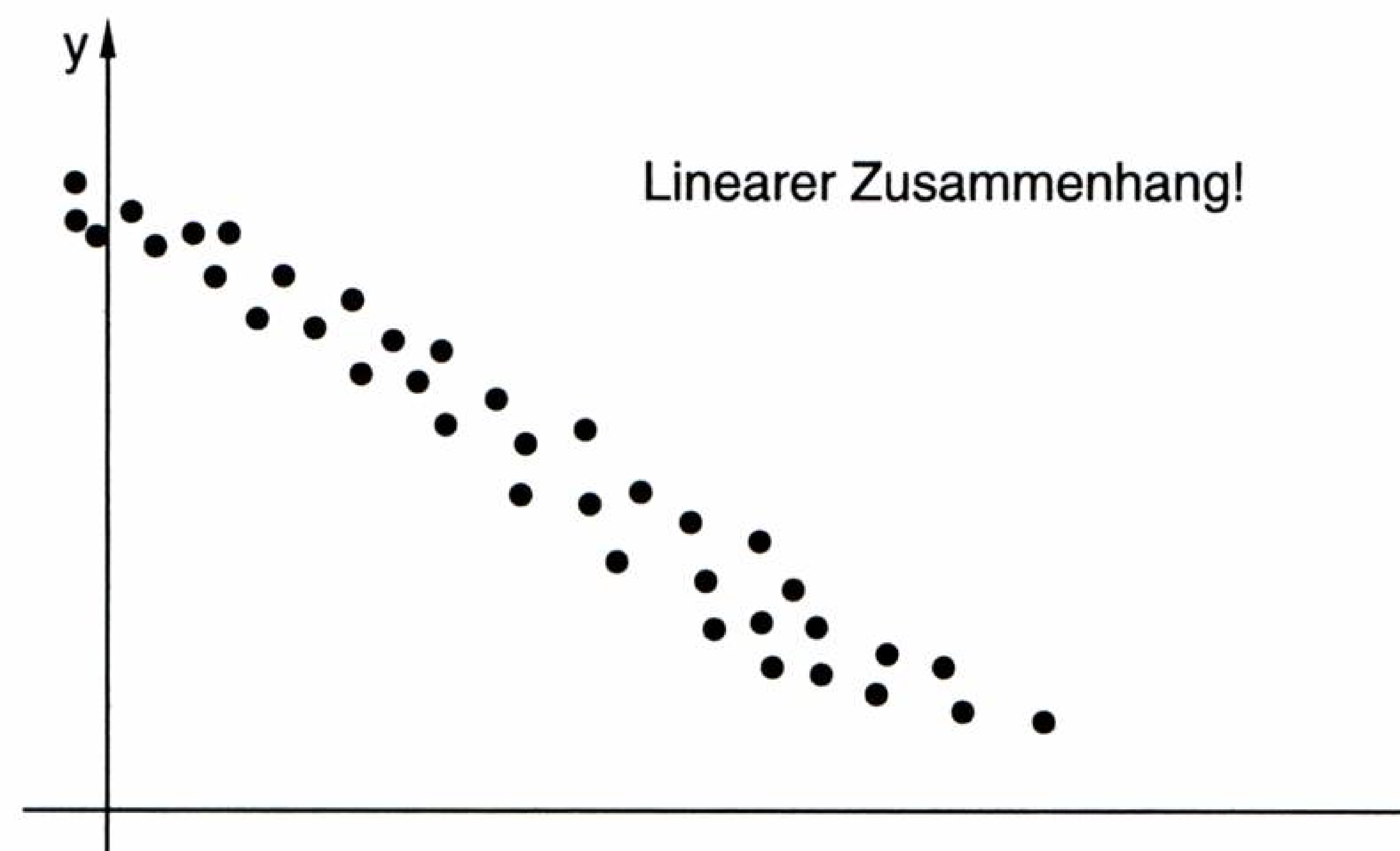
[1]) Die Daten wurden dem Werk „Hermann ATHEN u. a., Mathematik zum Nachschlagen für Schule, Studium und Beruf" (Bertelsmann Ratgeberverlag) entnommen.

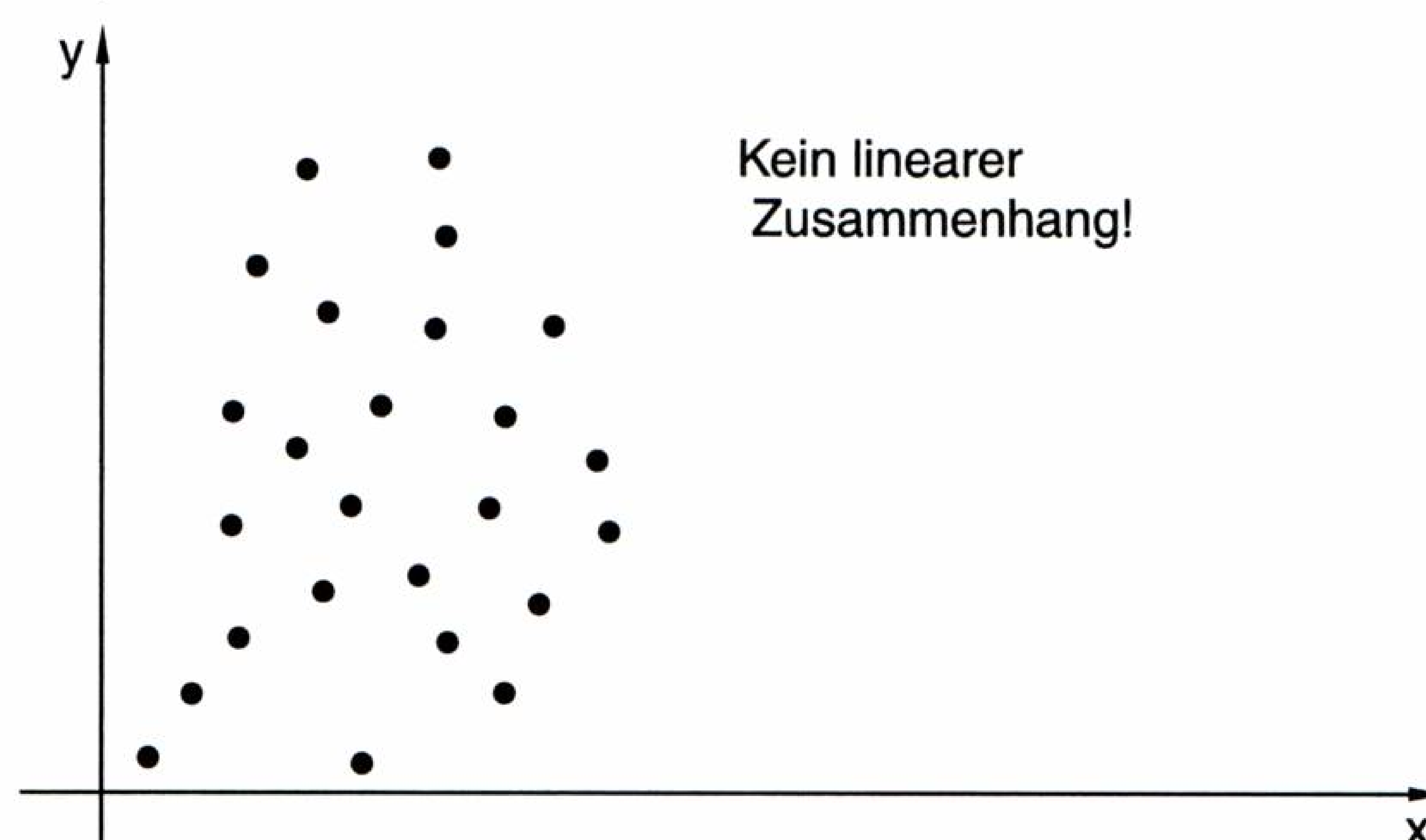
Mit zwei Fragen wollen wir uns näher befassen:

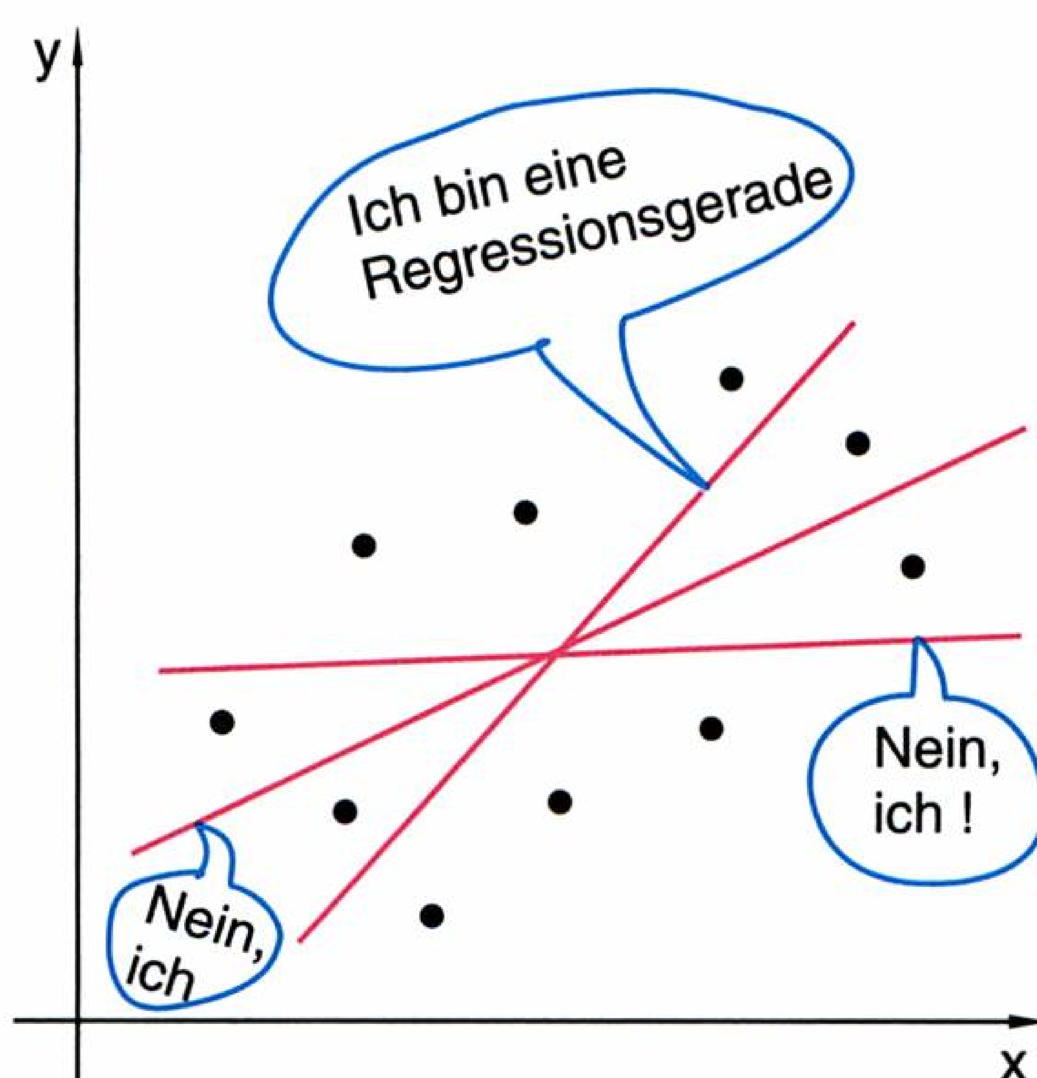
(1) Besteht tatsächlich immer ein linearer Zusammenhang, wenn zwei Merkmale untersucht werden?

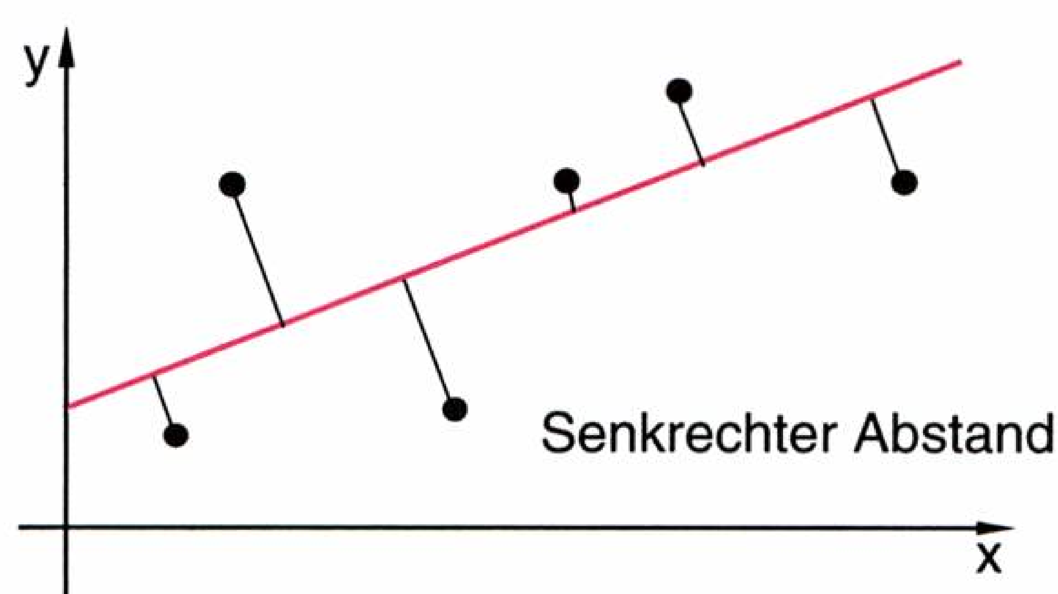
(2) Wie findet man die Regressionsgerade?

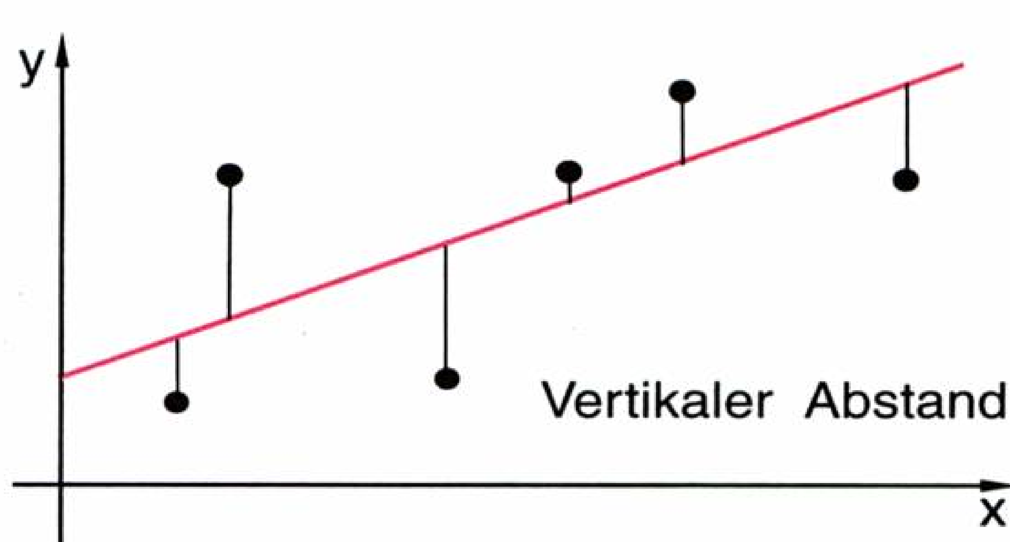
Antwort (1) scheint auf der Hand zu liegen: Immer dann, wenn die Punkte annähernd auf einer Geraden liegen, besteht ein linearer Zusammenhang! (Klingt das nicht einleuchtend?)











Doch halt! Einige Beispiele sollen zeigen, dass trotz Regression nicht immer ein ursächlicher Zusammenhang besteht — auch wenn die Wertepaare „noch so schön“ auf einer Geraden liegen:

— Die Gehälter der Politikerinnen und Politiker und die Schnapspreise sind in den letzten Jahren in Österreich linear gestiegen. Dennoch gibt es hier keinen (wie immer gearteten) Zusammenhang ...

— Seit 1965 hat die Anzahl der Störche in Österreich abgenommen. Auch die Anzahl der Geburten ist — auf den selben Zeitraum bezogen — im gleichen Ausmaß gesunken. Nur wer noch an den Storch glaubt, wird hier einen Zusammenhang vermuten ...

Um nun auf Frage (2) einzugehen, schauen wir uns die Figur in der Außenspalte an: Es fühlen sich zahlreiche Gerade „angesprochen“: Sie alle wollen Regressionsgerade sein. Sicherlich ist die Regressionsgerade genau jene Gerade, die „möglichst nahe“ bei den gegebenen Punkten liegt. Durch die Regressionsgerade soll die Tendenz der „Punktwolke“ möglichst treffend beschrieben werden.

Ein ausgezeichnetes Verfahren, um die Regressionsgerade so zu bestimmen, dass sie sich den einzelnen Punkten „am besten anpasst“, ist die sogenannte **Methode der kleinsten Quadrate**, die auf **Carl Friedrich GAUSS** (1777–1855) zurückgeht: Die Regressionsgerade ist derart zu legen, dass die Summe der Quadrate aller Abstände unserer Punkte von der Geraden möglichst klein wird.[1)]

Was ist aber nun der Abstand eines Punktes von einer Geraden? In der Außenspalte finden sich zwei Interpretationen. Der **vertikale Abstand** wird bei unseren weiteren Überlegungen eine Rolle spielen.

1) Dadurch, dass man die Quadrate und nicht etwa die Absolutwerte ins Spiel bringt, hat man u. a. den Vorteil einer vereinfachten Rechnung.

Und nun soll endlich verraten werden, wie man die Regressionsgerade rechnerisch bestimmt: In der Außenspalte ist eine Formel angeführt, die sich auf die Koeffizienten a und b der Regressionsgeraden $y = ax + b$ bezieht, bei der die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände der Punkte von der Geraden möglichst klein wird.

Die Koeffizienten a und b einer Regressionsgeraden, bei der die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände der Punkte von der Geraden möglichst klein wird, lassen sich nach folgenden Formeln berechnen[1]:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$ ..... arithmetisches Mittel

Regressionsgerade: $y = ax + b$

Beispiel:

In Linz wurden 2002 die 12 Familien eines Hauses in der Paul-Hahn-Straße nach ihrem monatlichen Nettoeinkommen (unabhängige Variable x) und ihren monatlichen Mietkosten (abhängige Variable y) gefragt (alle Angaben in Euro):

Nettoeinkommen x:	1748	1321	1530	520	965	1050
Mietkosten y:	400	309	360	151	232	255

Nettoeinkommen x:	3431	2382	2935	748	929	1350
Mietkosten y:	733	522	649	195	231	315

a) Wie lauten die Koeffizienten a und b der Regressionsgeraden $y = ax + b$?

b) Gleichung der Regressionsgeraden?

c) Lässt sich aus der Regressionsanalyse abschätzen, wie viel eine Familie ohne Einkommen an Miete bezahlen würde?

d) Kann man auf Grund der Regressionsanalyse Rückschlüsse auf das Nettoeinkommen einer Familie ziehen, deren Mietkosten 300,— Euro pro Monat betragen?

Lösung:

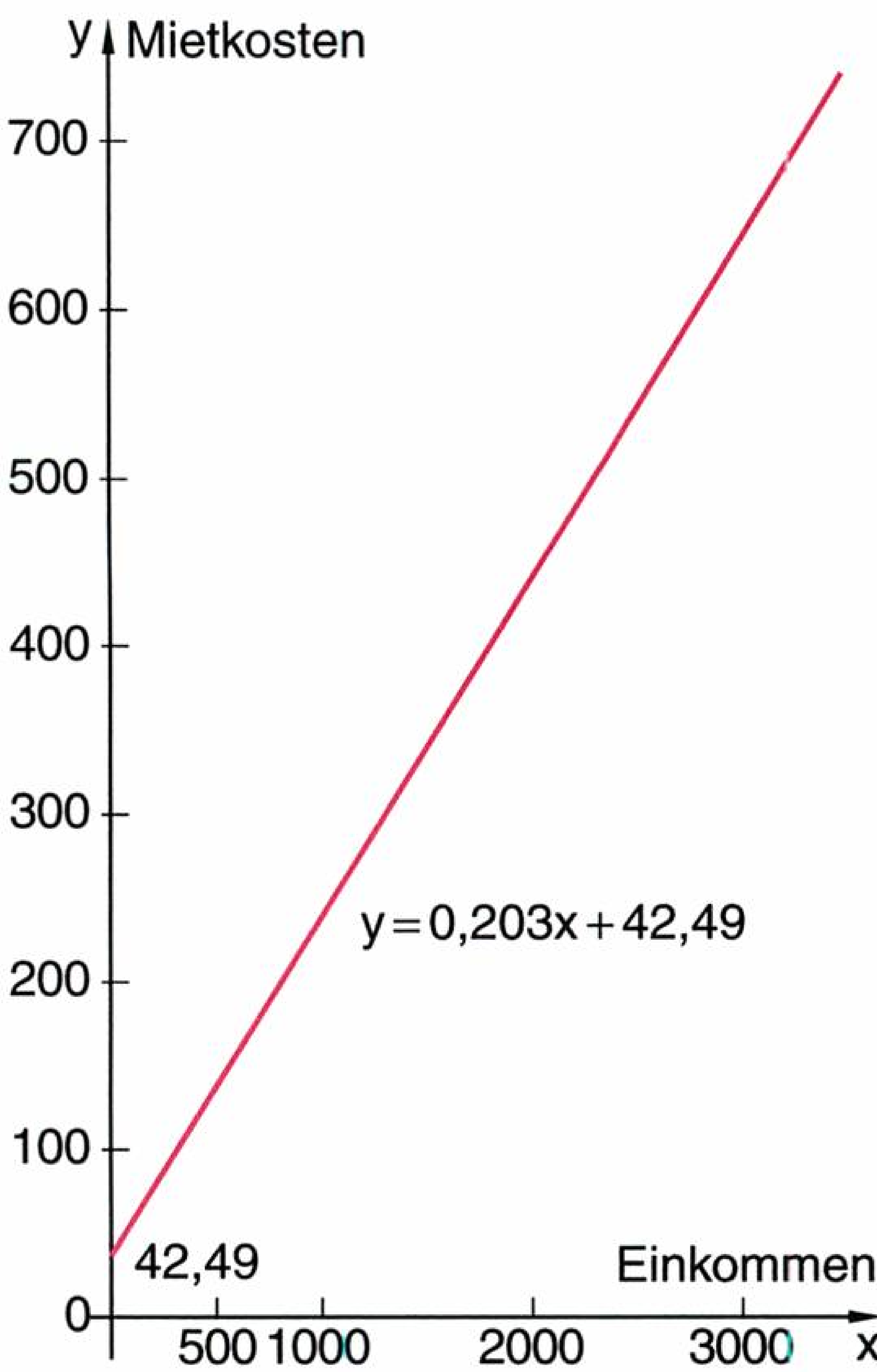
a)

Nettoeinkommen x_i	Mietkosten y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1748	400	172,25	29670,06	37,33	6430,67
1321	309	−254,75	64897,56	−53,67	13671,58
1530	360	−45,75	2093,06	−2,67	122,00
520	151	−1055,75	1114608,06	−211,67	223467,08
965	232	−610,75	373015,56	−130,67	79804,67
1050	255	−525,75	276413,06	−107,67	56605,75
3431	733	1855,25	3441952,56	370,33	687060,92
2382	522	806,25	650039,06	159,33	128462,50
2935	649	1359,25	1847560,56	286,33	389198,58
748	195	−827,75	685170,06	−167,67	138786,08
929	231	−646,75	418285,56	−131,67	85155,42
1350	315	−225,75	50963,06	−47,67	10760,75
18909	**4352**		**8954668,25**		**1819526,00**

$\bar{x} = \frac{18909}{12} = 1575,75$ $\qquad \bar{y} = \frac{4352}{12} = 362,67$

$a = \frac{1819526}{8954668,25} = 0,203$ $\qquad$ **$a = 0,203$**

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 362,67 - 0,203 \cdot 1575,75 = 42,49$ $\qquad$ **$b = 42,49$**



b) **$y = 0,203x + 42,49$** (Gleichung der Regressionsgeraden)

[1]) Beweis mittels Differenzialrechnung möglich.

Sofern man die Daten einer Wertetabelle über das Intervall dieser Wertetabelle hinaus fortsetzen möchte, spricht man von einer **Extrapolation**.

Die Koeffizienten a und b einer Regressionsgeraden, bei der die Summe der Quadrate aller horizontalen Abstände der Punkte von der Geraden möglichst klein wird, lassen sich nach folgenden Formeln berechnen:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$$

$b = \bar{y} - a\bar{x}$

$\bar{x}$, $\bar{y}$..... arithmetisches Mittel

Regressionsgerade: $y = ax + b$

c) Für eine Familie ohne Einkommen wäre — rein formal — in die Gleichung der Regressionsgeraden $y = 0{,}203x + 42{,}49$ für $x = 0$ einzusetzen:
$y = 0{,}203 \cdot 0 + 42{,}49 \Rightarrow$ **Mietkosten $y = 42{,}49$ Euro**
Die Sache klingt überzeugend. Dennoch ist die Überlegung falsch: Da die Regressionsgerade nur nach den Wertepaaren der Punktwolke berechnet wurde, ist sie auch nur im Intervall der Punktwolke interpretierbar! Eine Extrapolation ist zunächst einmal eine Hypothese, d. h. eine noch nicht bewiesene Annahme. (Man weiß ja bei vielen Daten nicht mit Sicherheit, ob die Punkte auf einer Geraden liegen.)[1)]

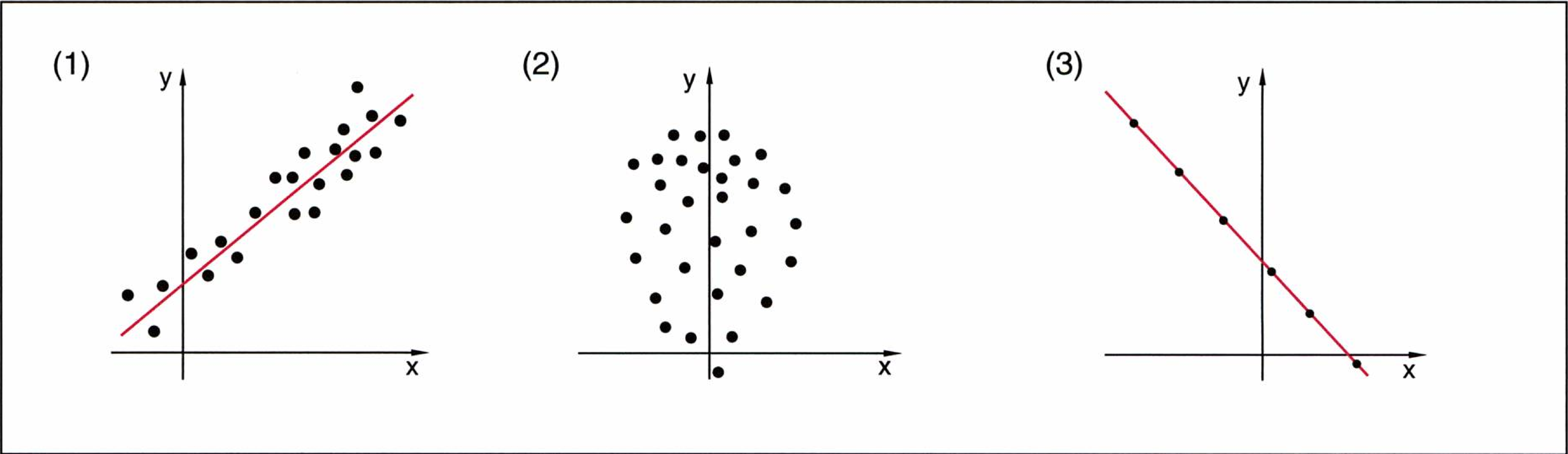
d) Wir haben in **a)** und **b)** die Regressionsgerade berechnet, indem wir die Quadrate der vertikalen Abstände minimiert haben. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer **Regression von Y bezüglich X** und ordnet mit Hilfe der Regressionsgeraden der unabhängigen Größe X (in unserem Beispiel: Einkommen) einen Schätzwert für die davon abhängige Größe Y (in unserem Beispiel: Mietkosten) zu.

Will man jedoch zu einer gegebenen Größe Y einen zugehörigen X-Wert schätzen, liegt eine sogenannte **Regression von X bezüglich Y** vor, die durch Minimierung der Summe der Quadrate der horizontalen Abstände zu bestimmen ist. (Vgl. die Formeln in der Außenspalte.) Auf unser Beispiel bezogen lautet die Gleichung für die zweite Regressionsgerade: **$y = 0{,}203x + 42{,}25$.**

Demgemäß ergibt sich folgender Rückschluss auf das Nettoeinkommen einer Familie, deren Mietkosten 300,– Euro pro Monat betragen: $300 = 0{,}203x + 42{,}25 \Rightarrow$ **$x = 1269{,}70$ Euro**

4.2 Korrelation

Wie gut ist der lineare Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen x und y? Mit der linearen Regression können wir praktisch immer eine Regressionsgerade ermitteln. Ob das sinnvoll ist, bleibt dahin gestellt:



Bei **(1)** besteht ein gut ausgeprägter linearer Zusammenhang zwischen x und y, der nur von **(3)** übertroffen wird: Bei **(3)** ist der lineare Zusammenhang „perfekt", alle Wertepaare liegen auf der Regressionsgeraden. Und wie schaut es mit **(2)** aus? Hier kann man eigentlich nicht mehr von einem „linearen Zusammenhang" sprechen!

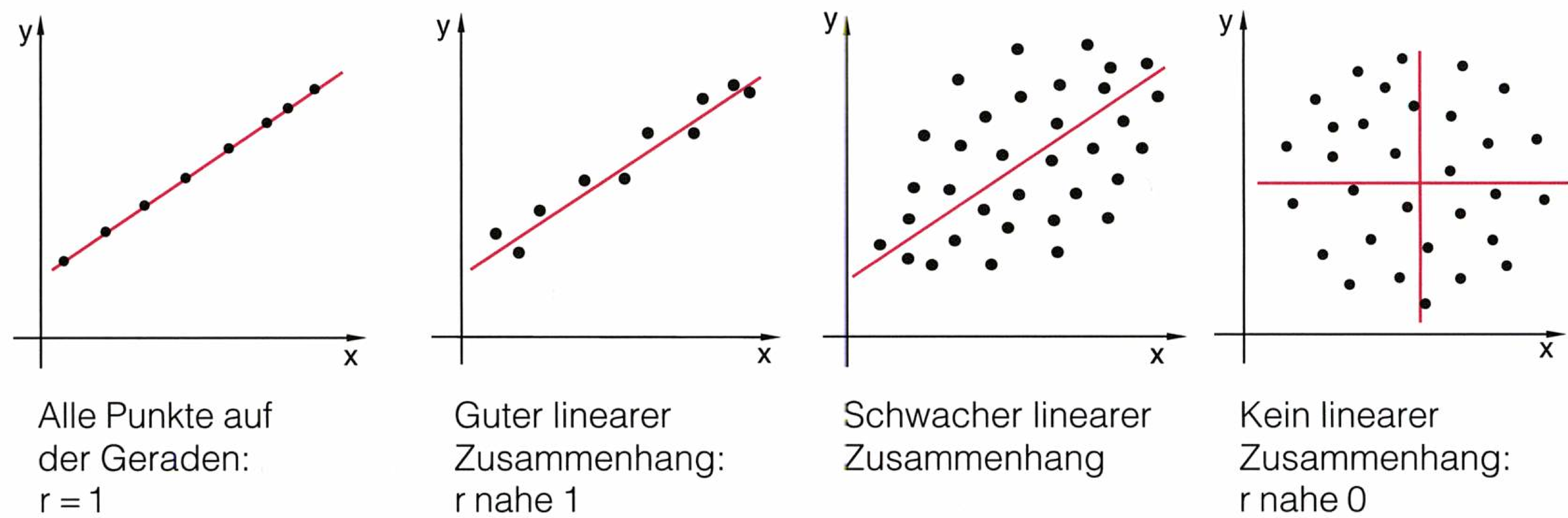
[1)] Diese Feststellung gilt nicht für die Messtechnik. Auch bei den Trendschätzungen für Zeitreihen ist die Extrapolation üblich — vgl. Seite **86**.

Mit dem sogenannten **Korrelationskoeffizienten r** finden wir ein rechnerisch ermitteltes Maß, wie „gut" der lineare Zusammenhang ist. Der Korrelationskoeffizient wird nach der nebenstehenden Formel berechnet, er ist eine Zahl zwischen −1 und 1:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$r = -1$ ..... alle Punkte liegen genau auf der (fallenden) Regressionsgeraden
$r < 0$ ..... Regressionsgerade ist fallend
$r = 0$ ..... kein linearer Zusammenhang
$r > 0$ ..... Regressionsgerade ist steigend
$r = +1$ ..... alle Punkte liegen genau auf der (steigenden) Regressionsgeraden

Der lineare Zusammenhang ist umso besser, je größer $|r|$ ist.



Alle Punkte auf der Geraden: r = 1 | Guter linearer Zusammenhang: r nahe 1 | Schwacher linearer Zusammenhang | Kein linearer Zusammenhang: r nahe 0

Beispiel:[1]

Das Klausurergebnis x (Punkte) während des Studienhalbjahres und das Ergebnis y (Punkte) der Abschlussarbeit von 9 Mathematikstudenten der OHIO STATE UNIVERSITY (Sommer 1962) ist durch Punkte grafisch zu veranschaulichen (Daten vgl. Außenspalte). Wie groß ist der Korrelationskoeffizient r?

x_i	y_i
80	80
75	75
45	75
75	95
70	100
60	80
45	45
80	70
80	90

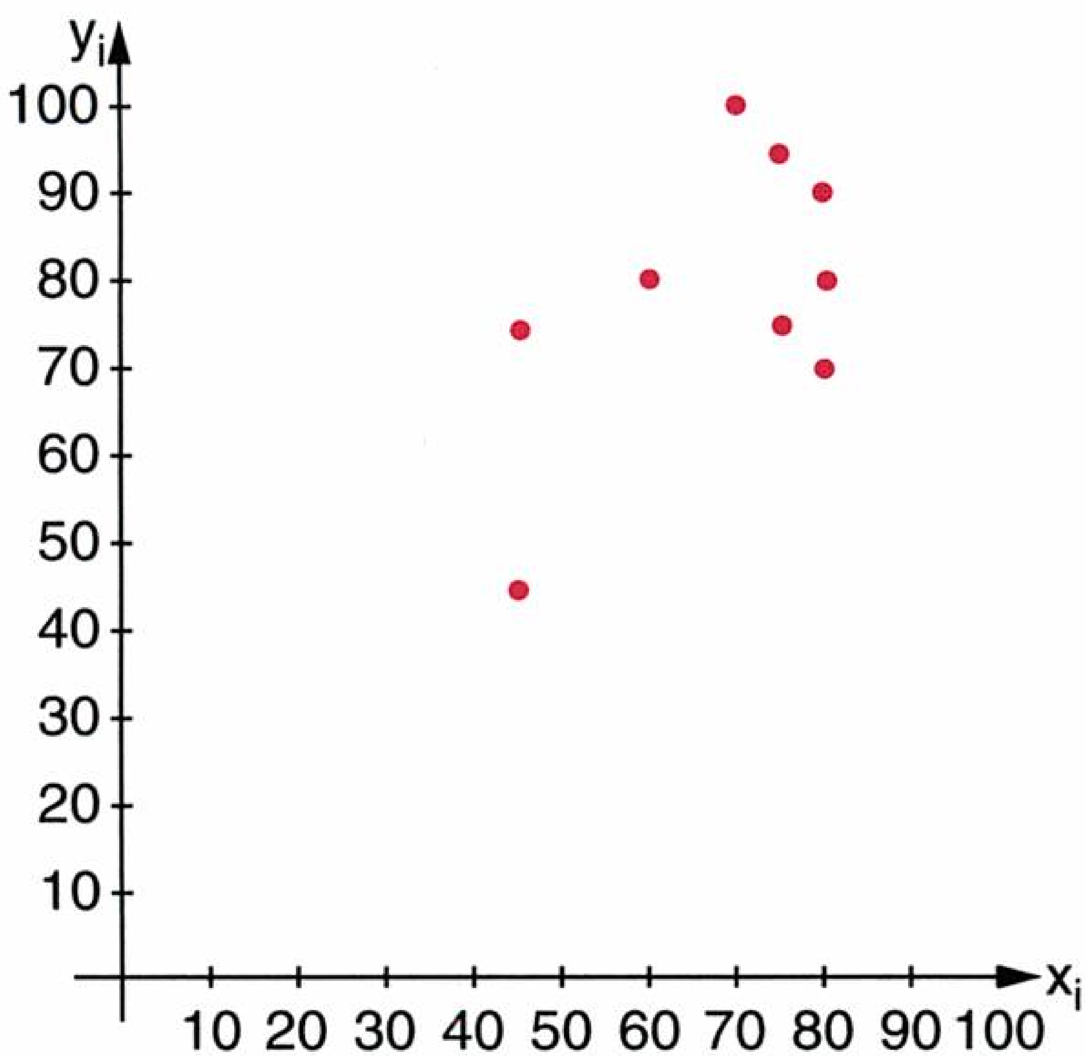
Lösung:

x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
80	80	12	144	1	1	12
75	75	7	49	−4	16	−28
45	75	−23	529	−4	16	92
75	95	7	49	16	256	112
70	100	2	4	21	441	42
60	80	−8	64	1	1	−8
45	45	−23	529	−34	1156	782
80	70	12	144	−9	81	−108
80	90	12	144	11	121	132
610	710		1656		2089	1028

$\bar{x} = \frac{610}{9} = 68 \qquad \bar{y} = \frac{710}{9} = 79$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} = \sqrt{1656 \cdot 2089} = \ldots = 1860$

$r = \frac{1028}{1860} = 0{,}55 \qquad$ **r = 0,55**



[1]) In Anlehnung an „KREYSZIG, Statistische Methoden und ihre Anwendungen".

AUFGABEN

191. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

○ **a)** Für den Korrelationskoeffizienten r gilt immer, dass $r \geqslant -1$ ist.

○ **b)** Ein Korrelationskoeffizient von 0 bedeutet, dass alle Punkte auf der (steigenden oder fallenden) Regressionsgeraden liegen.

○ **c)** Eine Studie, in der ein Korrelationskoeffizient mit – 0,23 angegeben ist, ist im höchsten Maß zweifelhaft.

○ **d)** Der Anstieg der Regressionsgeraden kann durch die Änderung definiert werden, dem der y-Wert unterliegt, wenn der x-Wert um eine Einheit zunimmt.

○ **e)** Für ein und denselben Zusammenhang gilt: Je weiter die beiden Regressionsgeraden „auseinander klaffen“, desto schlechter ist der lineare Zusammenhang.

○ **f)** Der Punkt $(\overline{x}, \overline{y})$ liegt immer auf der Regressionsgeraden, bei der die y-Abstände minimiert werden, und immer auf der Regressionsgeraden, bei der die x-Abstände minimiert werden.

○ **g)** Gegeben ist die Regressionsgerade $y_1 - y = a(x_1 - x)$. a heißt **Regressionskoeffizient**.

○ **h)** Positive Regression liegt vor, wenn $a \geqslant 0$ ist.

192. Welchen Wert hat der Korrelationskoeffizient r, wenn alle Wertepaare (x_i, y_i) Elemente einer linearen Funktion sind?

193. Gegeben ist die zweidimensionale Stichprobe:

x	1	2	3	4	5
y	1	3	2	4	4

a) Man ermittle die Regressionsgerade so, dass die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände der Punkte von der Geraden möglichst klein wird.

b) Man ermittle die Regressionsgerade so, dass die Summe der Quadrate aller horizontalen Abstände der Punkte von der Geraden möglichst klein wird.

194. Es ist **(1)** die Regressionsgerade Y bezüglich X, **(2)** die Regressionsgerade von X bezüglich Y und **(3)** der Winkel α zwischen den beiden Regressionsgeraden zu bestimmen:

a) (1, 1), (2, 3), (4, 3), (1, 0)

b) (10, 28), (14, 30), (11, 29), (12, 29)

c) (–1, 1), (4, –2), (–3, 1), (0, 0), (1, –1)

d) (36, 43), (12, 24), (20, 22), (40, 42), (13, 16)

195. Es ist **(1)** der Korrelationskoeffizient r der gegebenen Wertepaare zu ermitteln und **(2)** das Ergebnis zu kommentieren:

a) (–2, 1), (3, 4), (5, 7), (–1, 0)

b) (100, 280), (140, 130), (110, 290), (120, 290)

c) (–2, 1), (3, –2), (–4, 1), (–1, 1), (0, 0)

d) (33, 45), (13, 26), (22, 24), (40, 41), (15, 17)

196. Für die Werbeausgaben und Jahresumsätze erhielt man für die 12 internationalen Konzerne einer Branche folgende Werte:

Werbeausgaben (in Millionen Euro)	3,15	3,05	1,75	0,78	1,52	1,60	2,12	0,81	0,91	2,12	0,85	0,98
Jahresumsatz (in Milliarden Euro)	12,04	11,05	6,45	1,25	5,25	4,65	8,90	1,62	2,24	7,32	3,27	2,20

a) Man berechne die Gleichungen der beiden Regressionsgeraden.

b) In welchem Maß sind Werbeausgaben und Jahresumsatz linear korreliert? Man begründe die Antwort mittels des Korrelationskoeffizienten r!

c) Wie viel muss ein Betrieb der obigen Branche in Millionen Euro ungefähr für die Werbung ausgeben, wenn er einen Umsatz von 8 Milliarden Euro erzielen will? (Das Ergebnis ist auf 2 Dezimalstellen zu runden.)

d) Mit welchem Umsatz in Milliarden Euro kann ein Betrieb der obigen Branche ungefähr rechnen, wenn er 2,5 Millionen Euro für die Werbung ausgibt? (Das Ergebnis ist auf 3 Dezimalstellen zu runden.)

197. Bei einem Gebrauchtwarenhändler wird von 10 Nähmaschinen der selben Type jeweils Preis und Alter festgestellt:

Alter in Jahren	5	3	3,5	4	1	1,5	2,5	2,5	2	2
Preis in Euro	190	700	200	400	900	500	500	610	800	400

a) Man zeichne ein Streuungsdiagramm.

b) Weist die Punktwolke auf einen linearen Zusammenhang hin?

c) Der Korrelationskoeffizient r ist zu berechnen und zu interpretieren.

198. Im Körper eines Erwachsenen sind ca. 6 Liter Blut enthalten. Es wird vom Herzen durch den Blutkreislauf gepumpt, wobei es einen gewissen Druck auf das Gefäßsystem hat. Diesen Druck nennt man Blutdruck. Der Blutdruck ist unter anderem von der Weite bzw. Elastizität der Blutgefäße, von der Leistungsfähigkeit des Herzens und vom Alter des Menschen abhängig. Mit zunehmendem Alter steigt der Blutdruck, wie die nebenstehende Tabelle dokumentiert.

Man unterscheidet den systolischen Blutdruck und den diastolischen Blutdruck. Der systolische Blutdruck ist der höchste Wert der Druckkurve bei der Kontraktion des Herzmuskels. Der diastolische Blutdruck ist der niedrigste Wert der Druckkurve bei Erschlaffung des Herzens.

Mittelwerte des Blutdrucks in Abhängigkeit vom Lebensalter		
Alter	systolischer Blutdruck in mm Hg (hPa)	diastolischer Blutdruck in mm Hg (hPa)
Geburt	70 (93)	40 (53)
bis 10 Jahre	105 (140)	70 (93)
10.–30 J.	110 (146)	75 (100)
30.–40 J.	125 (166)	85 (113)
40.–60 J.	140 (186)	90 (120)
über 60 J.	145 (193)	90 (120)

Gegeben ist eine Stichprobe aus den (systolischen) Blutdruckwerten von 50 Personen:

Alter (Jahre)	Blutdruck (mm Hg)									
21—30	112,5	140,2	147,8	122,3	139,1	119,6	112,5	117,2	110,4	106,7
31—40	133,7	128,6	118,7	120,9	126,7	131,8	134	115,7	128	120,9
41—50	133,3	135,1	138,4	136,2	129,8	120,6	133,3	134,4	136	137,1
51—60	137	137,5	149,5	146,3	145,1	149	136,7	133,8	140,1	145
61—70	147,3	149,3	188	189,2	154,3	139,1	147,8	154,5	156	182,6

a) Gleichung der Regressionsgeraden?

Anleitung: Für die Erstellung der Regressionsgeraden ist zunächst der Mittelwert der Blutdrucke in jedem Lebensjahrzehnt zu ermitteln und dieser dem jeweiligen Lebensjahrzehnt zuzuordnen. Die so gewonnenen 5 Wertepaare sind dann für die Regression zu verwenden.

b) Korrelationskoeffizient?

199. 5 Personen haben die Länge x ihres Oberarmknochens durch Abmessen des Oberarms näherungsweise bestimmt. Diese Werte und die zugehörige Körpergröße y sind in ein kartesisches Koordinatensystem einzutragen. Diese grafische Darstellung bildet eine „Punktwolke" (einen Punktschwarm). Wie lautet eine lineare Funktionsgleichung, die den Zusammenhang zwischen Länge des Oberarmknochens und Körpergröße der 5 Personen möglichst treffend beschreibt?

Name	x (in cm)	y (in cm)
Andreas	37	178
Anton	36	179
Gerhard	32	171
Matthäus	33	176
Josef	38	180

200. Mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten ist zu beurteilen, wie „gut" der in Aufgabe **199.** ermittelte Zusammenhang ist.

Zeitreihen

In der Statistik und in den Wirtschaftswissenschaften versteht man unter einer **Zeitreihe** eine in Abhängigkeit von der Zeit erstellte Folge von Beobachtungsergebnissen. Hierbei geht man in der Regel davon aus, dass die Zeitreihen dem Wesen nach einen regelmäßigen Verlauf haben und allenfalls auftretende Unregelmäßigkeiten auf zufällig auftretende Einflüsse zurückzuführen sind. Das Grundproblem der **Zeitreihenanalyse** besteht also darin, aus den beobachteten Werten Gesetzmäßigkeiten des zeitlichen Ablaufs zu erkennen.

Zur Ausschaltung von Zufallsschwankungen kann man sich der Methode der kleinsten Quadrate bedienen, wobei im Zusammenhang mit Zeitreihen für den Begriff Regression die Bezeichnung **Trend** gebräuchlich ist. Demnach spricht man an Stelle von einer Regressionsgeraden von einer **Trendgeraden**[1].

Allerdings liegt nicht immer eine lineare Entwicklung vor, sodass es mitunter sinnvoll erscheint, je nach Entwicklung der Beobachtungsergebnisse auch andere Funktionstypen (z. B. quadratische Funktion) heranzuziehen. In diesem Fall spricht man von **Trendkurven**[1].

201. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über den jeweiligen PKW-Bestand in Östereich am Jahresende (Quelle: Statistisches Jahrbuch für die Republik Österreich 1996):

Ende des Jahres	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
PKW-Bestand	2902949	2991284	3100014	3244920	3367626	3479595	3593588

a) Man ermittle die Gleichung den Trendgeraden $y = ax + b$ so, dass die Summe der vertikalen Abstandsquadrate minimal ist.

b) Man berechne auch die Trendkurve der Form $y = ax^2 + bx + c$.
Anleitung: Die Konstanten a, b und c der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ erhält man aus folgendem linearen Gleichungssystem:[2]

(1) $a \cdot \Sigma x_i^4 + b \cdot \Sigma x_i^3 + c \cdot \Sigma x_i^2 = \Sigma x_i^2 y_i$

(2) $a \cdot \Sigma x_i^3 + b \cdot \Sigma x_i^2 + c \cdot \Sigma x_i = \Sigma x_i y_i$

(3) $a \cdot \Sigma x_1^2 + b \cdot \Sigma x_i + c \cdot n = \Sigma y_i$

c) Man ermittle für die einzelnen Jahre mit Hilfe der in **a)** und **b)** errechneten Funktionen die PKW-Bestände und entscheide durch Berechnung der Fehlerquadratsumme, welche dieser Funktionen die tatsächliche Entwicklung des PKW-Bestandes genauer beschreibt.

d) Mit Hilfe der genaueren Trendfunktion ist der PKW-Bestand Ende 1996 zu errechnen und mit aktuellem statistischen Datenmaterial zu vergleichen.

202. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über den Verbrauch an Dieselkraftstoff in Östereich (Quelle: Statistisches Jahrbuch für die Republik Österreich 1996):

Jahr	1970	1975	1980	1985	1990	1994	1995
Verbrauch in t	1135658	1242156	1503096	1521614	2084047	2700021	2852371

a) Man berechne für den Dieselkraftstoffverbrauch die Trendgerade $y = ax + b$.

b) Man berechne auch die Trendkurve der Form $y = ax^2 + bx + c$.

c) Man ermittle für die einzelnen Jahre mit Hilfe der in **a)** und **b)** errechneten Funktionen die Verbrauchsmengen und entscheide durch Berechnung der Fehlerquadratsumme, welche dieser Funktionen den tatsächlichen Verbrauch genauer beschreibt.

d) Mit Hilfe der genaueren Trendfunktion ist der Dieselkraftstoffverbrauch für 1996 zu errechnen und mit aktuellem statistischen Datenmaterial zu vergleichen.

---

[1]) Es ist üblich, den Beginn des Beobachtungszeitraumes (z. B. das erste für die Ermittlung der Trendgeraden bzw. Trendkurve herangezogene Jahr) als Periode 0 anzunehmen.

[2]) Ein Beweis dieses Berechnungsschemas für die sogenannte **quadratische Regression** ist mittels Differenzialrechnung möglich.

AUSBAU DER INFINITESIMALRECHNUNG

1. Wiederholung aus Band 3



Unter dem Begriff **Infinitesimalrechnung** wird die Differenzial- und die Integralrechnung zusammen gefasst. Der Name besagt, dass mit „unendlich kleinen" Größen gerechnet wird, die zunächst als wirklich vorhandene, unteilbare Bestandteile des Raumes gedacht wurden.

Ausgehend von der Tatsache, dass die Integralrechnung die Umkehrung der Differenzialrechung darstellt, kann man den **Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung**, dass beide Definitionen äquivalent sind, folgern. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646—1716) erkannte dies und trug dieser bedeutsamen Tatsache durch seine Schreibweise des Integrals, die sich allgemein durchgesetzt hat, Rechnung. Er schlug vor, „$\int y\,dx$" zu schreiben. Das Integralzeichen ist aus S hervorgegangen, dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes summatio (Zusammenzählung, Summierung). Es bedeutet also Summe, d hingegen Differenz.

Wichtige Formeln

	Berechnung der Ableitungsfunktion		Berechnung einer Stammfunktion
Potenzfunktion	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{Q},\ n \neq -1)$
Konstante	$y = c$	$y' = 0$	$\int c\,dx = cx + C$
Sinusfunktion	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
Kosinusfunktion	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
Exponentialfunktion	$y = e^x$ $y = a^x$	$y' = e^x$ $y' = a^x \cdot \ln a$	$\int e^x\,dx = e^x + C$ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Logarithmusfunktion	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	mittels partieller Integration
konstanter Faktor	$y = a \cdot f(x)$	$y' = a \cdot f'(x)$	$\int [a \cdot f(x)]\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$
Summen und Differenzen	$y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$	$\int [u(x) \pm v(x)]dx = \int u(x)dx \pm \int v(x)dx$
Produkte und Quotienten	$y = u \cdot v$ $y = \frac{u}{v}$	$y' = u'v + uv'$ $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	partielle Integration: $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$
Funktion einer Funktion	mit Hilfe der Kettenregel		mittels Integration durch Substitution

Kurvenuntersuchungen

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">Klassifikation des Punktes (x_0, $f(x_0)$)</th><th colspan="3">$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$</th><th colspan="2" rowspan="2">Unter folgenden Bedingungen spricht man auch von Flachpunkten</th></tr>
<tr><th>$f'(x_0)$</th><th>$f^{(n)}(x_0)$</th><th>für n gilt</th></tr>
<tr><td rowspan="2">relatives Extremum</td><td>Maximum</td><td>H</td><td rowspan="4">= 0 (horizontale Tangente)</td><td>< 0</td><td rowspan="2">n gerade $n \geqslant 2$</td><td rowspan="2">Für $n \geqslant 4$ (n gerade) handelt es sich um einen</td><td>Rechts-rechts-Flachpunkt</td></tr>
<tr><td>Minimum</td><td>T</td><td>> 0</td><td>Links-links-Flachpunkt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sattelpunkt (Wendepunkt mit horizontaler Tangente)</td><td>Links-rechts-Sattelpunkt</td><td>S</td><td>< 0</td><td rowspan="4">n ungerade $n \geqslant 3$</td><td rowspan="4">Für $n \geqslant 5$ (n ungerade) handelt es sich um einen</td><td>Links-rechts-Flachpunkt</td></tr>
<tr><td>Rechts-links-Sattelpunkt</td><td>S</td><td>> 0</td><td>Rechts-links-Flachpunkt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Wendepunkt</td><td>Links-rechts-Wendepunkt</td><td>W</td><td rowspan="4">≠ 0 (schräge Tangente)</td><td>< 0</td><td>Links-rechts-Flachpunkt</td></tr>
<tr><td>Rechts-links-Wendepunkt</td><td>W</td><td>> 0</td><td>Rechts-links-Flachpunkt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Flachpunkt</td><td>Rechts-rechts-Flachpunkt</td><td>F</td><td>< 0</td><td rowspan="2">n gerade $n \geqslant 4$</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Links-links-Flachpunkt</td><td>F</td><td>> 0</td></tr>
</table>

Beispiel:

Man diskutiere die durch ihre Gleichung gegebene Funktion $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$.

Lösung:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f''(x) = 6x - 18$
$f'''(x) = 6$

(2) $3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 4$

(3) $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 10 = 10$
$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 10 = 6$

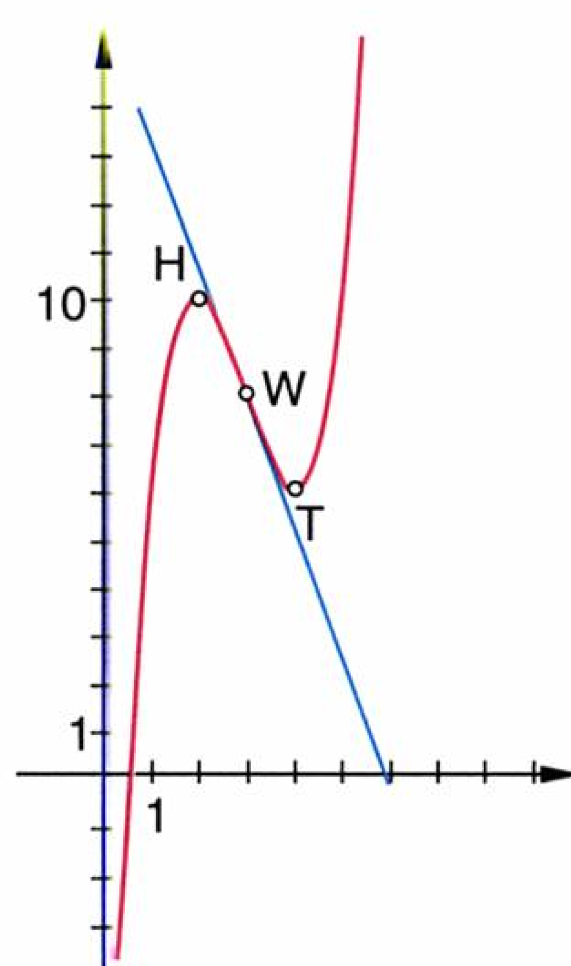
(4) $f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 \Rightarrow$ **H (2,10)**
$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 \Rightarrow$ **T (4,6)**

(5) $6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

(6) $f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 10 = 8$

(7) $f'''(3) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ **W (3,8)**

(8) $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3$
$8 = -3 \cdot 3 + d \Leftrightarrow d = 17$ $\quad$ $y = -3x + 17$



Die erste Ableitung gibt uns Auskunft über das Anstiegsverhalten einer Funktion f(x):

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ Anstieg ist positiv $\Rightarrow$ f(x) ist streng monoton wachsend

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ Anstieg ist negativ $\Rightarrow$ f(x) ist streng monoton fallend

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ f(x) ist waagrecht

Die zweite Ableitung gibt daher analog Auskunft über das Anstiegsverhalten der ersten Ableitung. Dieses wiederum entspricht dem Krümmungsverhalten der ursprünglichen Funktion:

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ Anstieg wird größer $\Rightarrow$ positive Krümmung

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ Anstieg wird kleiner $\Rightarrow$ negative Krümmung

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ Anstieg konstant $\Rightarrow$ keine Krümmung

Vorgangsweise bei Kurvenuntersuchungen:

(1) Zunächst werden jene Ableitungen berechnet, die für die Kurvendiskussion benötigt werden.

(2) f′(x) wird Null gesetzt und die Gleichung nach x gelöst.

(3) Einsetzen in f(x) liefert die y-Koordinate des potenziellen Extrempunkts.

(4) Einsetzen in f″(x) gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Extrempunkt vorliegt und ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt (positive Krümmung)

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt (negative Krümmung)

(5) f″(x) wird Null gesetzt und die Gleichung nach x gelöst.

(6) Einsetzen in f(x) liefert die y-Koordinate des potentiellen Wendepunkts.

(7) Einsetzen in f‴(x) gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.

(8) Die x- und y-Koordinaten des Wendepunkts werden in die Geradengleichung $y = f'(x)x + d$ eingesetzt. Dadurch erhalten wir die Gleichung der Wendetangente.

Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion[1]

Beispiel:

Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt P(–3,4) eine waagrechte Tangente, bei $x = -2$ einen Wendepunkt und bei $x = -1$ eine Nullstelle. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

(1) $P(-3, 4)$: $4 = -27a + 9b - 3c + d$
(2) $f'(-3) = 0$: $0 = 27a - 6b + c$
(3) $f''(-2) = 0$: $0 = -12a + 2b$
(4) $N(-1,0)$: $0 = -a + b - c + d$

(1) – (4) $\quad 4 = -26a + 8b - 2c \quad |:2$ } +
(2) $\quad 0 = 27a - 6b + c$

$2 = 14a - 2b$ } +
(3) $\quad 0 = -12a + 2b$

$2 = 2a \Rightarrow$ **a = 1, b = 6**

$0 = 27 - 36 + c \Rightarrow$ **c = 9**
$0 = -1 + 6 - 9 + d \Rightarrow$ **d = 4** $\quad$ $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

[1]) Umkehraufgaben zur Kurvendiskussion werden auch als **„allgemeines Interpolationsproblem“** bezeichnet.

NEWTONsches Näherungsverfahren

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$, also die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Für einen Näherungswert x_0 erhält man einen verbesserten Näherungswert x_1 durch Einsetzen in

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Das Verfahren ist abzubrechen, sobald die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Beispiel:

Die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ sind auf 4 Dezimalstellen genau zu ermitteln.

Lösung:

Aus dem Graphen der Funktion (vgl. oberes Beispiel auf Seite 89) erkennen wir, dass im Intervall [0,1] eine Nullstelle liegt, und wählen z. B. $x_0 = 0{,}5$ als Startwert.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,5	−0,125	15,75	0,5079365
1	0,5079365	−0,000472	15,631142	0,5079667
2	0,5079667	0	15,63069	0,5079667

Wir erhalten die Lösung $x =$ **0,508** bzw. die Nullstelle **N(0,508, 0)**. Die algebraische Gleichung dritten Grads $x^3 - 9x^2 + 24x - 10 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ 3 Lösungen. Wir überprüfen, ob die Gleichung noch weitere **reelle** Lösungen hat:

$(x^3 - 9x^2 + 24x - 10):(x - 0{,}508) = x^2 - 8{,}492x + 19{,}686$

reduzierte Gleichung: $x^2 - 8{,}492x + 19{,}686 = 0$

Da die Diskriminante negativ ist, gibt es keine weiteren reellen Lösungen.

$\Rightarrow$ **N(0,508, 0)** ist die **einzige Nullstelle der Funktion.**

Flächen- und Volumsberechnungen

Für die innerhalb der Grenzen x_1 und x_2 zwischen der x-Achse und der Funktion $f(x)$ eingeschlossenen Fläche A gilt:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Es muss gelten: $f(x) > 0$ im Intervall $[x_1, x_2]$

Für $f(x) < 0$ sind die Integrationsgrenzen zu vertauschen. Ändert sich für $f(x)$ im Intervall $[x_1, x_2]$ das Vorzeichen, ist der Integrationsbereich an der Nullstelle zu unterteilen.

Für die Volumsberechnung gilt bei

Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \int_{y1}^{y_2} x^2 dy$$

Beispiel:

Wie groß ist die Fläche, die von der im unteren Beispiel auf Seite **89** berechneten Funktion $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ und der x-Achse im Intervall [–5, –3] eingeschlossen wird?

Lösung:

Der Angabe zum unteren Beispiel auf Seite **89** entnehmen wir eine Nullstelle: N(–1, 0).

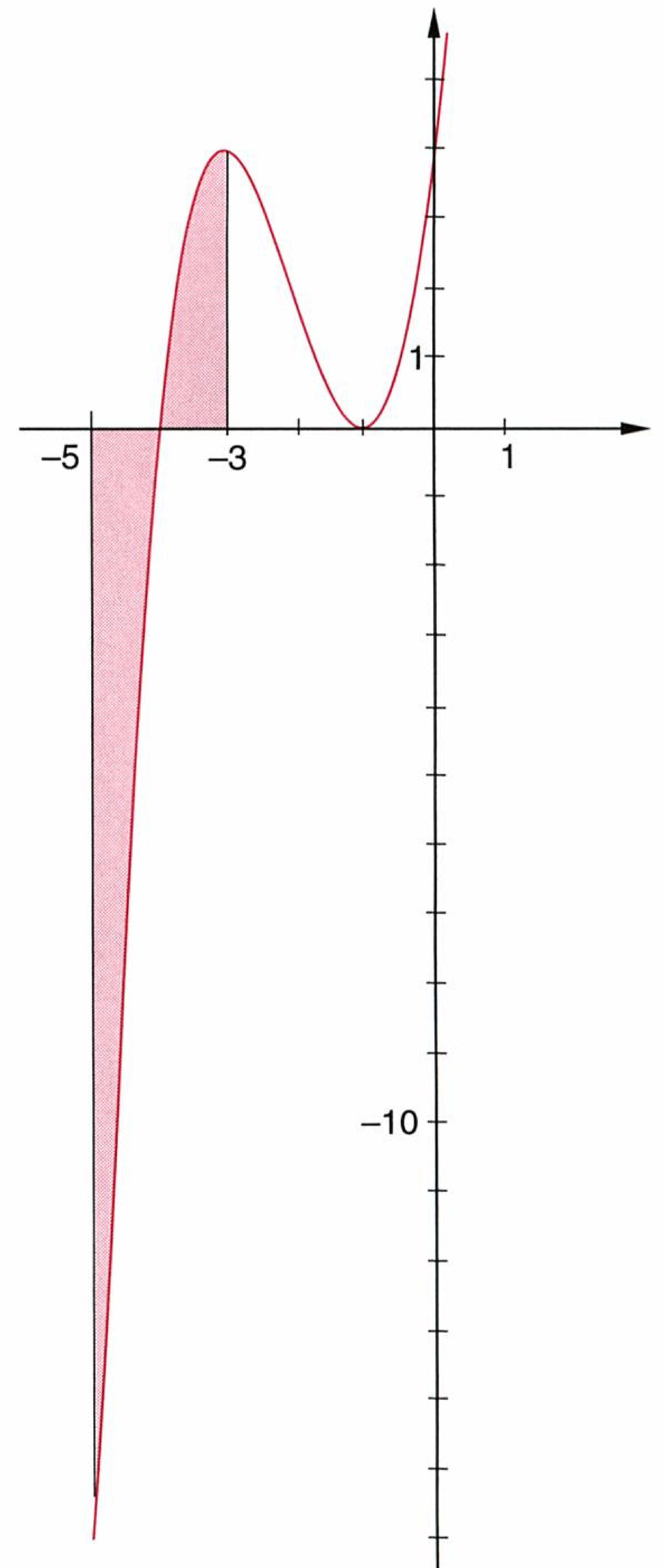
Wir berechnen zunächst weitere Nullstellen:

$(x^3 + 6x^2 + 9x + 4):(x + 1) = x^2 + 5x + 4$

reduzierte Gleichung: $x^2 + 5x + 4 = 0$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -4$

grafische Veranschaulichung
vgl. nebenstehende Figur:



Wir nehmen eine Unterteilung des Integrationsbereiches vor, wobei wir für den unterhalb der x-Achse befindlichen Flächenteil die Integrationsgrenzen vertauschen:

$$A = \int_{-4}^{-5} (x^3 + 6x^2 + 9x + 4)\,dx + \int_{-4}^{-3} (x^3 + 6x^2 + 9x + 4)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{-5} + \left[\frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{-3} =$$

$$= -1{,}25 - (-8) + (-5{,}25) - (-8) = 9{,}5 \qquad \mathbf{A = 9{,}5\ FE}$$

Beispiel:

Die Funktion $y = axe^{bx}\,(a \neq 0,\ b \neq 0)$ hat bei $W\left(2, \frac{12}{e^2}\right)$ einen Wendepunkt.

a) Die Funktionsgleichung $y = f(x)$ ist zu ermitteln.

b) Man untersuche die Funktion bezüglich Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten.

c) Man berechne den Inhalt jenes Flächenstücks, das vom Graphen von $f(x)$, der x-Achse und den beiden zur y-Achse parallelen Geraden durch den Hoch- bzw. Wendepunkt begrenzt wird.

d) Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers ist zu berechnen.

Lösung:

a) $f(x) = axe^{bx}$

$f'(x) = ae^{bx} + axe^{bx} \cdot b = ae^{bx}(1 + bx)$

$f''(x) = ae^{bx} \cdot b(1 + bx) + ae^{bx} \cdot b = abe^{bx}(2 + bx)$

(1) $W\left(2, \frac{12}{e^2}\right): \frac{12}{e^2} = 2ae^{2b} \Rightarrow ae^{2b} = \frac{6}{e^2}$

(2) $f''(2) = 0 :\ 0 = abe^{2b}(2 + 2b)$

(1) in (2): $0 = \frac{6}{e^2}(2+2b) \,\Big|\, :\frac{6}{e^2}$

$0 = 2+2b$

$b = -1$

$ae^{-2} = 6e^{-2} \Rightarrow a = 6 \qquad y = 6xe^{-x}$

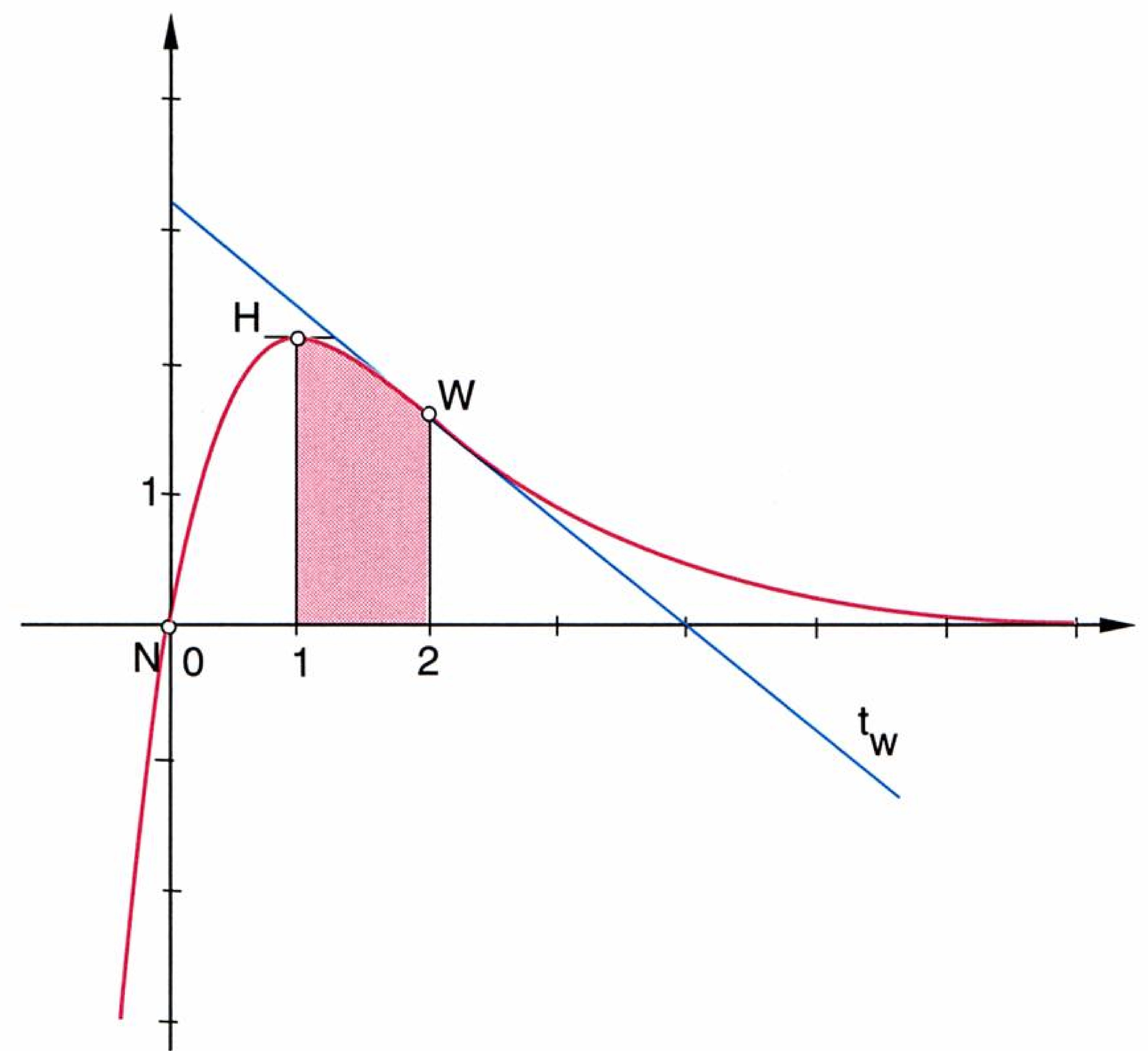
b) ① $f(x) = 6xe^{-x}$

$f'(x) = 6e^{-x}(1-x)$

$f''(x) = -6e^{-x}(2-x)$

$f'''(x) = 6e^{-x}(3-x)$

Es gilt: $e^{-x} = 0$ hat keine Lösung $\Rightarrow x = 0$ ist die einzige Nullstelle **N(0, 0)**



② $1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

③ $f(1) = 6e^{-1} = \frac{6}{e}$

④ $f''(1) = -6e^{-1}\cdot 1 < 0 \Rightarrow H\left(1, \frac{6}{e}\right)$

⑤ $2-x = 0 \Rightarrow x = 2$

⑥ $f(2) = 6\cdot 2e^{-2} = \frac{12}{e^2}$ (vgl. Angabe)

⑦ $f'''(2) = 6e^{-2}\cdot 1 \neq 0 \Rightarrow W\left(2, \frac{12}{e^2}\right)$

⑧ $f'(2) = 6e^{-2}(-1) = -\frac{6}{e^2}$

$\frac{12}{e^2} = -\frac{6}{e^2}\cdot 2 + d \Rightarrow \frac{24}{e^2} \qquad y = -\frac{6}{e^2}(x-4)$

c) Auf Grund der Kurvendiskussion wissen wir, dass H und W oberhalb der x-Achse liegen und sich dazwischen keine Nullstelle befindet.

$A = \int_1^2 6xe^{-x}dx = ?$

partielle Integration: $\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{-e^{-x}}_{v}\cdot\underbrace{1dx}_{du} = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1) + C$

$A = 6\cdot\left[-e^{-x}(x+1)\right]_1^2 = 6\cdot(-e^{-2}\cdot 3 + e^{-1}\cdot 2) = -\frac{18}{e^2} + \frac{12}{e} = 1{,}98 \qquad$ **A = 1,98 FE**

d) $V_x = \pi\int_1^2 36x^2e^{-2x}dx = ?$

partielle Integration: $\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^{-2x}dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_{v}\cdot\underbrace{2x\,dx}_{du} =$

$= -\frac{x^2e^{-2x}}{2} + \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{-2x}dx}_{dv} = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} + \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_{v}\cdot\underbrace{1dx}_{du} =$

$= -\frac{x^2e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C = -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C$

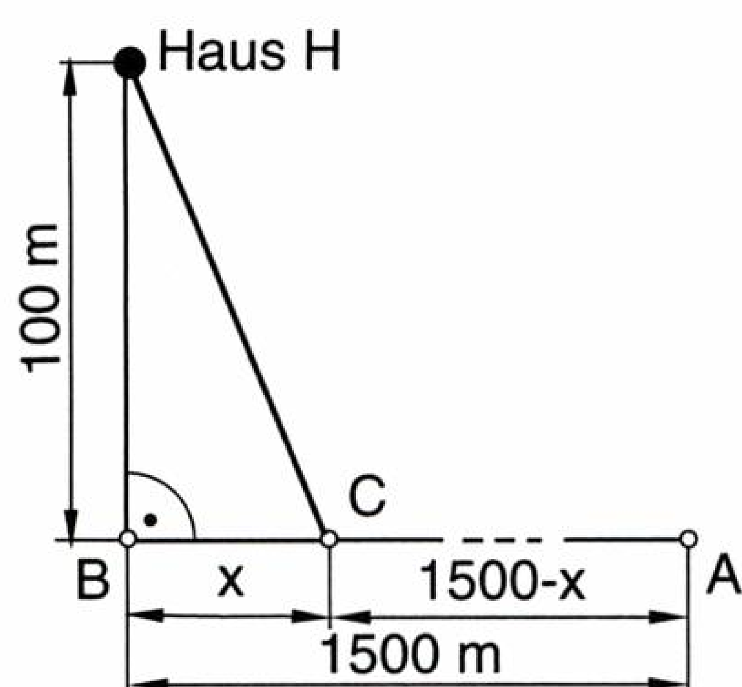
$V_x = -18\pi\cdot\left[e^{-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right]_1^2 = -18\pi(e^{-4}\cdot 6{,}5 - e^{-2}\cdot 2{,}5) = -\frac{117\pi}{e^4} + \frac{45\pi}{2^2} = 12{,}4 \qquad$ **V_x = 12,4 VE**

Extremwertaufgaben

Beispiel:
Ein Haus liegt 100 m abseits einer geradlinigen Straße, die von einem Fernheizwerk A wegführt. Das Haus soll an das städtische Fernheizsystem angeschlossen werden. Der Laufmeter Verlegung kostet längs der Straße 1000,— Euro, im Gelände hingegen 1400,— Euro. An welcher Stelle C der Straße muss die Abzweigung erfolgen, damit die Kosten minimal werden? Der hausnächste Punkt B der Straße liegt 1500 m von A entfernt.

Lösung:

(1)



(2) HB: Kosten $K(x) = 1000(1500 - x) + 1400\sqrt{x^2 + 100^2}$

$$K(x) = 1500000 - 1000x + 1400\sqrt{x^2 + 10000} \to \text{minimal}$$

(3), (4) entfällt, da nur eine Variable vorliegt.

(5) Vereinfachung (zuerst konstanten Summanden 1500000, dann konstanten Faktor 200 weglassen):

$$\overline{K}(x) = -5x + 7\sqrt{x^2 + 10000}$$

(6) $\overline{K}'(x) = -5 + 7 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+10000}} = -5 + \frac{7x}{\sqrt{x^2+10000}} = 0, \quad x \in [0, 1500]$

$$5\sqrt{x^2 + 10000} = 7x$$
$$25x^2 + 250000 = 49x^2$$
$$24x^2 = 250000$$
$$x = \pm\frac{500}{2\sqrt{6}} = \pm\frac{250}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow x = \frac{250}{\sqrt{6}}$ ist im Intervall [0, 1500] einzige mögliche Extremstelle.

(7) $\overline{K}''(x) = \frac{7\sqrt{x^2+10000} - 7x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+10000}}}{x^2+10000} = \frac{70000}{\sqrt{(x^2+10000)^3}} > 0 \Rightarrow$ Damit haben

$\overline{K}(x)$ und auch $K(x)$ bei $x = \frac{250}{\sqrt{6}} \approx 102$ ein relatives Minimum.

(8) entfällt

(9) $K_{min} = 1500000 - \frac{250000}{\sqrt{6}} + 1400\sqrt{\frac{62500}{6} + 10000} =$

$= 1597979{,}6 \approx 1{,}6$ Millionen Euro

Die Abzweigung muss **1398 m** von A entfernt erfolgen.

(1) Wenn möglich und notwendig, wird man den Sachverhalt in einer Skizze darstellen.

(2) Aufstellen der Hauptbedingung (HB).

(3) Aufstellen der Nebenbedingung(en) (NB).

(4) Substitution in der Hauptbedingung. Dadurch reduzieren sich die (unabhängigen) Variablen auf eine einzige.

(5) Vereinfachen der Hauptbedingung durch Weglassen von

— konstanten Summanden
$(f(x) + c$ ist extremal$) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x)$ ist extremal$)$,

— konstanten Faktoren ($k f(x)$ ist extremal) $\Leftrightarrow$ ($f(x)$ ist extremal), für $k > 0$,

— konstanten Exponenten die den Funktionsterm $f(x)$ potenzieren
$((f(x))^n$ ist extremal$) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x)$ ist extremal$)$, falls $f(x) > 0$, $n \in \mathbb{R}^+$.

(6) Feststellen der Definitionsmenge D der vereinfachten Hauptbedingung und Berechnung ihrer möglichen Extremstellen.

(7) Bestimmen der Art des relativen Extremums durch Berechnung der zweiten Ableitung an der „möglichen Extremstelle“ aus (6).

(8) Ermittlung der Werte aller übrigen Variablen mit Hilfe der Nebenbedingungen und den in (6) und (7) bestimmten Extremstellen.

(9) Berechnung des Extremwertes.

AUFGABEN

203. An die Kurve $y = -\frac{x^2}{4} - x + 8$ ist an der Stelle $x = 2$ die Tangente zu legen.

a) Wie lautet die Tangentengleichung? (Skizze 1E ≙ 1cm)

b) Es ist die Fläche zu bestimmen, die diese Kurve mit der Tangente und der x-Achse einschließt.

c) Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Welches Volumen entsteht dadurch?

204. Gegeben sind zwei Funktionen:

$f(x)$: $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$

$g(x)$: $y = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + x + 11)$

a) Man bestimme die Schnittpunkte beider Funktionen, führe für $f(x)$ eine Kurvendiskussion durch und bestimme für $g(x)$ alle Nullstellen auf zwei Dezimalstellen genau. Es ist für den Bereich der Schnittpunkte eine Zeichnung zu machen. (1E ≙ 1cm)

b) Wie groß ist die Fläche, die von beiden Funktionen gemeinsam umschlossen wird?

205. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{200} \cdot (x^5 - 30x^3)$.

a) Man ermittle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte mit den Steigungen der zugehörigen Wendetangenten und zeichne den Graphen dieser Funktion im Intervall [–5,5, 5,5].

b) Die Fläche, die $f(x)$ mit der positiven x-Achse einschließt, rotiert um die x-Achse. Auf diese Weise entsteht ein kreiselförmiger Rotationskörper. Man berechne sein Volumen und den Flächeninhalt seines Achsenschnittes.

206. **a)** Wie lautet die Gleichung der Polynomfunktion 3. Grads, deren Maximum an der Stelle –1 liegt, die den Wendepunkt W (1, 16) hat und die Abszisse bei $x = 3$ schneidet?

b) Man diskutiere die Kurve vollständig und gebe auch die Gleichung der Wendetangente an.

c) Wie groß ist die Fläche, die von der Kurve und der Abszisse eingeschlossen wird?

d) Man stelle die Kurve grafisch dar. (x-Achse: 1E ≙ 1cm, Ordinate: 1E ≙ 4 mm)

207. Eine Polynomfunktion 3. Grads hat in H (0, 4) einen Hochpunkt, bei $x = -2$ eine Nullstelle und ebendort den Anstieg $\frac{9}{2}$.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung?

b) Man diskutiere die Funktion (Angabe der Nullstellen, lokale Extremwerte, Wendepunkt, Wendetangente) und zeichne ihren Graphen im Intervall [–3, 5].

c) Man berechne den Inhalt jenes Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen, den beiden Koordinatenachsen und der Wendetangente begrenzt wird.

208. Eine Polynomfunktion 3. Grads hat bei $x = 3$ einen Extrempunkt und bei $x = 2$ den Wendepunkt. Die Gleichung der Wendetangente t_w lautet: $3x + y = 4$.

a) Man diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen im Intervall [0, 4].

b) Das vom Graphen und der x-Achse eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers?

209. Eine Polynomfunktion 3. Grads hat im Punkt P(1, 0) eine Nullstelle mit horizontaler Tangente und in $x = 0$ eine Wendetangente mit dem Anstieg $k = -3$.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung?

b) Man berechne alle Nullstellen, Extremwerte, den Wendepunkt und die Wendetangente und zeichne die Kurve. (1E ≙ 1cm)

c) Wie groß ist die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und den Nullstellen?

d) Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das entstehende Volumen?

210. Eine Polynomfunktion 3. Grads hat in $P\left(-\frac{3}{2}, y_1\right)$ die Steigung $-\frac{5}{4}$ und im Wendepunkt $W\left(0, \frac{2}{3}\right)$ die Steigung 1. Eine Polynomfunktion 2. Grads geht durch P und hat in W ihren Scheitelpunkt.
Man stelle die beiden Kurvengleichungen auf, diskutiere beide Kurven, fertige eine Zeichnung an ($1\,E \mathrel{\hat{=}} 3$ cm) und berechne die Fläche, welche beide Kurven gemeinsam umschließen.

211. **a)** Die Kurve $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat ihren Wendepunkt in $W(0, -4)$, einen Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = 2$ und eine Nullstelle $N_1(-2, 0)$. Man diskutiere die Kurve, stelle sie grafisch dar und berechne die Fläche, die die Kurve mit der Abszisse einschließt.
b) Eine zweite Kurve $y = px^2 + qx + r$ geht durch die gegebene Nullstelle der ersten Kurve und hat im Punkt $(1, -9)$ ein Minimum. Man berechne die Fläche, die die zweite Kurve mit der x-Achse einschließt und stelle sie grafisch dar.
c) Das Verhältnis der beiden Flächen ist anzugeben.
d) Man berechne die Fläche, die von beiden Kurven begrenzt wird.

212. Von einer Polynomfunktion 4. Grads kennt man die erste Ableitung $y' = \frac{x^3}{4} - 3x$. Die Funktion geht durch den Punkt $P(4, -3)$.
a) Man berechne die Funktionsgleichung.
b) Es ist eine vollständige Kurvendiskussion inklusive Zeichnung im Intervall $[-5, 5]$ durchzuführen.
c) Es ist die Fläche zu bestimmen, die die Kurve mit ihren Wendetangenten einschließt.
d) Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Man berechne das entstehende Volumen.

213. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ hat an der Stelle 2 den Funktionswert -3. Die erste Ableitung der Funktion f lautet $f'(x) = 4x^3 - 12x$.
a) Man bestimme $f(x)$.
b) Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ berührt die Funktion $f(x)$ in den beiden Wendepunkten von $f(x)$. Die Koeffizienten der Parabel sind zu berechnen.
c) Man bestimme Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte beider Funktionen.
d) Das von beiden Kurven eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des dabei entstehenden Körpers?

214. **a)** Man untersuche die Funktion $f(x) = \frac{120x}{(x^2+6)^2}$ in Bezug auf Nullstellen, relative Extremwerte und Wendepunkte (mit den Steigungen der Wendetangenten) und zeichne ihren Graphen im Intervall $[-6, 6]$.
b) Man berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f(x)$ und der Geraden $g: y = 0{,}3x$ begrenzt wird.

215. Die Funktion $f: x \to \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{x^2 - 2}$ hat an der Stelle $x = \sqrt{6}$ einen Extremwert. Der Graph der Funktion hat eine schräge Asymptote parallel zur ersten Mediane.[1)]
a) Wie lautet die Funktionsgleichung?
b) Der Graph der Funktion f und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Man berechne den Flächeninhalt im Intervall $[x_1, x_2]$, wobei x_1 die x-Koordinate der einzigen reellen Nullstelle und x_2 die x-Koordinate des Wendepunktes ist.
c) Der Kurvenverlauf ist zu skizzieren.

216. Eine Vase hat die Gestalt eines Rotationskörpers, der durch Drehung eines Flächenstücks um die x-Achse entstanden ist. Das Flächenstück wird vom Graphen der Funktion $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \to 3\sin\frac{x}{2} + 2$, von den Geraden g_1: $x = 0$ und g_2: $x = \frac{7\pi}{4}$ und der x-Achse begrenzt.
a) Man untersuche die Funktion f im Intervall $[0, 2\pi]$ auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Graphen durch Zusammensetzung aus Einzelfunktionen.
b) Man berechne den Längsschnitt der Vase.
c) Man berechne das Volumen der Vase. (Rotation um x-Achse)
d) Man berechne das Volumen einer zylinderförmigen Vase mit dem kleineren Kreis als Grundfläche und derselben Höhe wie die ursprüngliche Vase. Das Verhältnis der beiden Volumina ist zu bilden und auf ganze Zahlen zu runden.

---

1) Die Gerade mit der Gleichung $y = x$ heißt **erste Mediane**.

217. Funktionsdiskussion: $y = \ln(x^2+1) - 2$. Man untersuche auf:

a) Nullstellen (auf 5 Dezimalstellen genau)

b) Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten

c) Man zeichne den Graphen im Intervall $[-5, 5]$ ($1\text{E} \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{cm}$) auf Millimeterpapier und trage die Ergebnisse ein! Die Symmetrie ist zu begründen.

d) Der Graph rotiert um die Ordinate im Abschnitt $-2 \leqslant y \leqslant 1{,}3$ und bildet eine Schale. Wie groß ist der größte Durchmesser der Schale?

e) Volumen des Rotationskörpers bei einer Füllhöhe bis 0,3 E senkrecht unter dem oberen Rand?

218. Der Graph der Funktion $f\colon y = 2x + e^{\frac{x}{2}}$ hat eine zur Geraden $g\colon 3x - y + 7 = 0$ parallele Tangente.

a) Man berechne die Gleichung der Tangente und ihren Berührungspunkt B mit der Funktion f.

b) Man bestimme den Inhalt der von der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[0, B]$ eingeschlossenen Fläche.

c) Wie groß ist das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das Flächenstück, das die Funktion $h\colon y = x \cdot e^{-x}$ mit der x-Achse im Intervall $[0, 2]$ einschließt, um die x-Achse rotiert?

d) Man berechne die Extrema der Kurve h.

219. Die Funktion $f\colon x \to (a+bx)\,e^x$ hat den Hochpunkt $H(1, e)$.

a) Man bestimme die Funktionsgleichung $y = f(x)$.

b) Man diskutiere die Funktion (Nullstellen, lokale Extremwerte, Wendepunkt, Wendetangente) und zeichne ihren Graphen im Intervall $[-3, 2]$.

c) Man berechne den Inhalt jener Fläche, welche der Graph von f mit der x-Achse im ersten Quadranten einschließt.

220. Die Funktion $f\colon x \to (x^2 - a) \cdot e^{bx}$ hat bei $x = -2$ eine Nullstelle und bei $x = 2 + \sqrt{8}$ eine Extremstelle.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung $y = f(x)$?

b) Man berechne Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Wendetangenten und zeichne den Graphen im Intervall $[-2{,}5, 10]$.

c) Man berechne den Inhalt jenes Flächenstücks, das vom Graphen von $f(x)$, der x-Achse und den beiden zur y-Achse parallelen Geraden durch den Hoch- bzw. Tiefpunkt begrenzt wird.

221. Relation: $y^2 = x^2 \cdot (4 - x^2)$ $G = \mathbb{R}$

a) Man bestimme die Definitionsmenge und zeichne den Graphen der Relation. ($1\text{E} \mathrel{\hat{=}} 2{,}5\,\text{cm}$)

b) Man berechne den im ersten Quadranten liegenden Extremwert E_1 und bestimme mittels „Spiegelungen“ die übrigen drei Extremwerte.

c) Man berechne die Fläche unter der Kurve der Relation im ersten Quadranten.

222. Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ lautet $f'(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$. Der zugehörige Graph von $f(x)$ verläuft im Intervall $[-2, 2]$ durchwegs oberhalb der x-Achse und schließt mit dieser in diesem Intervall eine Fläche von 12,8 Flächeneinheiten ein.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung $y = f(x)$?

b) Man ermittle die Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten von $f(x)$ und zeichne den Graphen im Intervall $[-5, 5]$.

c) Wie groß ist das Volumen jenes Körpers, der bei Rotation des gegebenen Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

223. **a)** Ein oben offener Blechbehälter in der Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche soll ein Volumen von 13,5 Litern fassen. Wie sind die Ausmaße dieses Behälters zu wählen, damit möglichst wenig Blech benötigt wird? Wie groß ist dieser minimale Blechverbrauch?

b) Angenommen, man möchte zur Herstellung dieses Behälters nur $12\,\text{dm}^2$ Blech verbrauchen. Wie müsste man dann den Behälter dimensionieren, um ein maximales Volumen zu erreichen? Wie groß ist dieses maximale Volumen?

Bemerkung: Verschnitt wird nicht berücksichtigt.

224. **a)** Ein oben offener zylindrischer Blechbehälter soll derart dimensioniert werden, dass ein maximales Volumen entsteht, aber nur $20\,\text{dm}^2$ Blech zur Herstellung benötigt werden. Wie sind die Maße des Behälters zu wählen und wie viele Liter fasst er?

b) Angenommen, der Behälter soll 15 Liter fassen. Wie ist er dann zu dimensionieren, damit möglichst wenig Blech verbraucht wird? Wie groß ist dieser minimale Blechverbrauch?

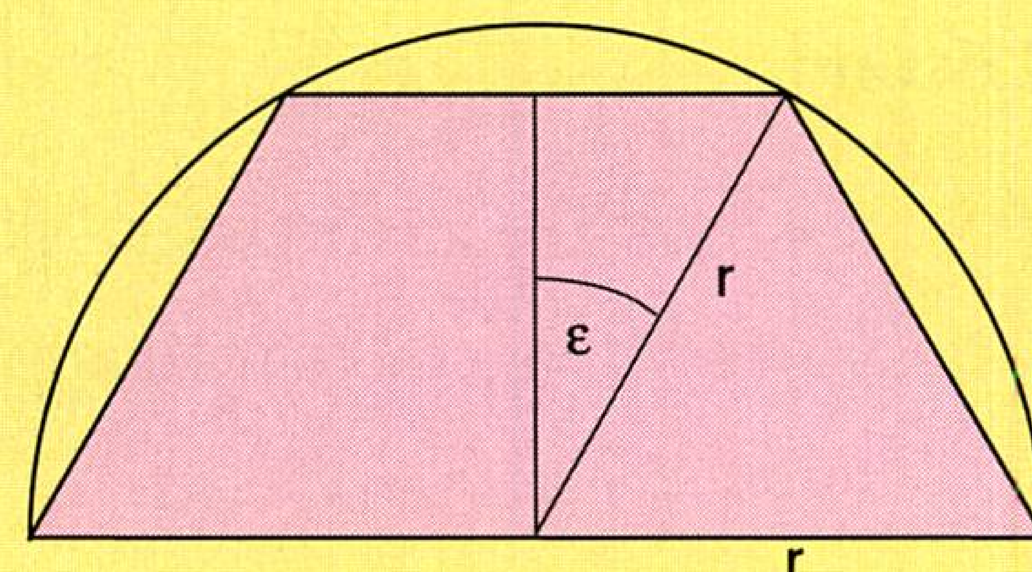
225. Einem Drehzylinder soll die volumskleinste regelmäßige quadratische Pyramide so umschrieben werden, dass deren Mantelflächen die Deckfläche des Zylinders berühren und die Basisfläche des Zylinders in der Basis der Pyramide steht. $V_{min} = ?$

226. Die beiden Punkte A und B liegen in einer Ebene. A ist von einer senkrechten Wand 16 m entfernt, B 36 m. In welcher Höhe h der Wand befindet sich derjenige Punkt, von welchem man die Strecke AB unter dem größten Sehwinkel sieht? Wie groß ist dieser Sehwinkel?

227. In einen quadratischen Turm, der innen eine Seitenlänge von 3 m hat, soll durch eine Türöffnung mit der Höhe von 2 m eine möglichst lange gerade Leiter in den Turm eingebracht werden. Welche maximale Länge kann diese Leiter haben? Man ermittle die Lösung **a)** mit Hilfe des Strahlensatzes **b)** mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen.

228. Einer Halbkugel (Radius r) ist ein Kegelstumpf von maximalem Volumen einzuschreiben. Das Volumen ist als Funktion des Winkels ε auszudrücken. Wie groß ist dieses Volumen?

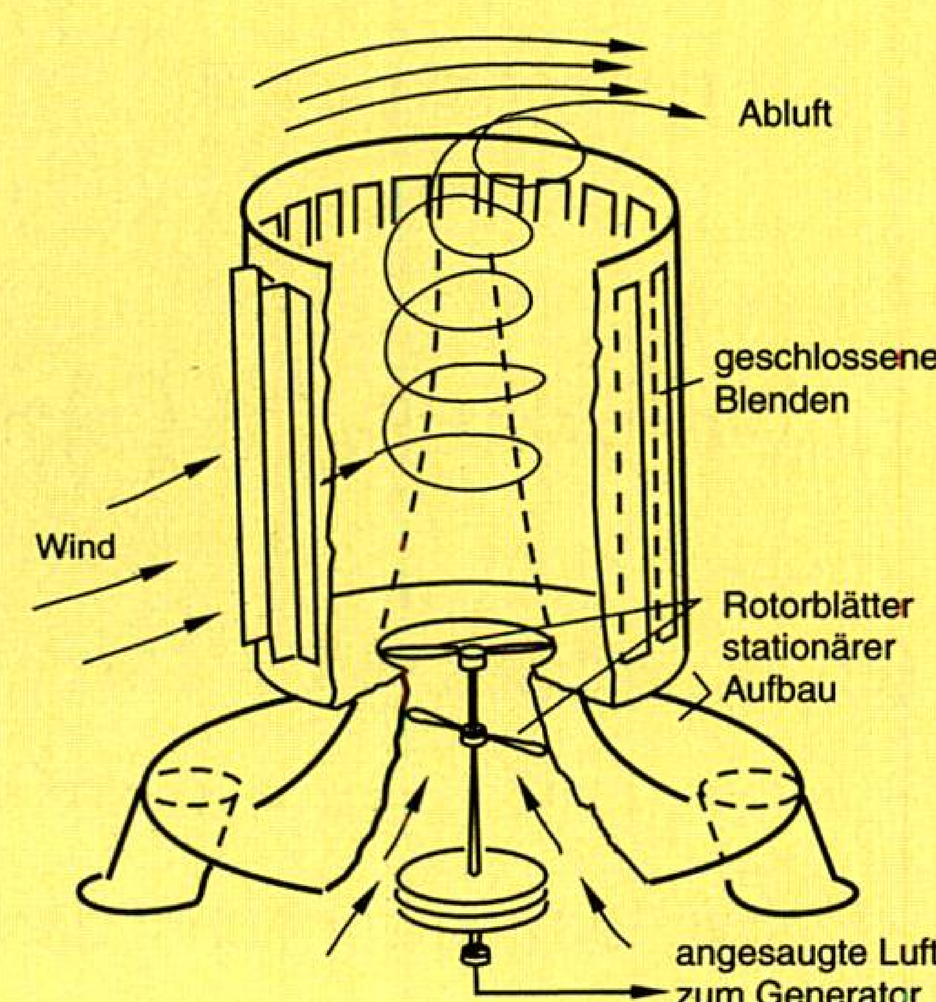
Anleitung: Die bei der Lösung auftretende kubische Gleichung ist mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens auf 4 Dezimalstellen genau zu lösen!



229. **Windmühle**

Mit einem neuen Konzept von J. T. YEN von Grumman Aerospace (USA) hofft man, die Energieausbeute von Windgeneratoren zu verbessern. Die von ihm entwickelte „Tornadomaschine" mit 2 m Turbinendurchmesser in einem 60 m hohen Turm läuft mit hoher Tourenzahl, sodass kein Getriebe zum Generator notwendig ist. Die Maschine soll etwa 1 MW elektrische Leistung liefern.
Bei Windmühlen dieser Art spiralt sich der seitlich einströmende Wind nach oben und erzeugt im Zentrum des Turms einen Unterdruck (vgl. nebenstehende Figur).
Die an die Windflügel abgegebene Leistung ist gegeben durch

$$P = \frac{dW}{dt} = C \cdot v_1^3 \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)\left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right).$$



Dabei ist v_1 die Geschwindigkeit der ausströmenden und v_2 die Geschwindigkeiten der abströmenden Luft. C ist eine Konstante, die von der Flügelzahl, der von den Flügeln überstrichenen Fläche und der Dichte der Luft abhängt ($C = 0{,}7\,\text{kgm}^{-1}$).

a) Man berechne die maximale Leistung P_{max} in Abhängigkeit von v_2, d. h. für welchen Quotienten $\frac{v_1}{v_2}$ wird die Leistungsausbeute maximal?

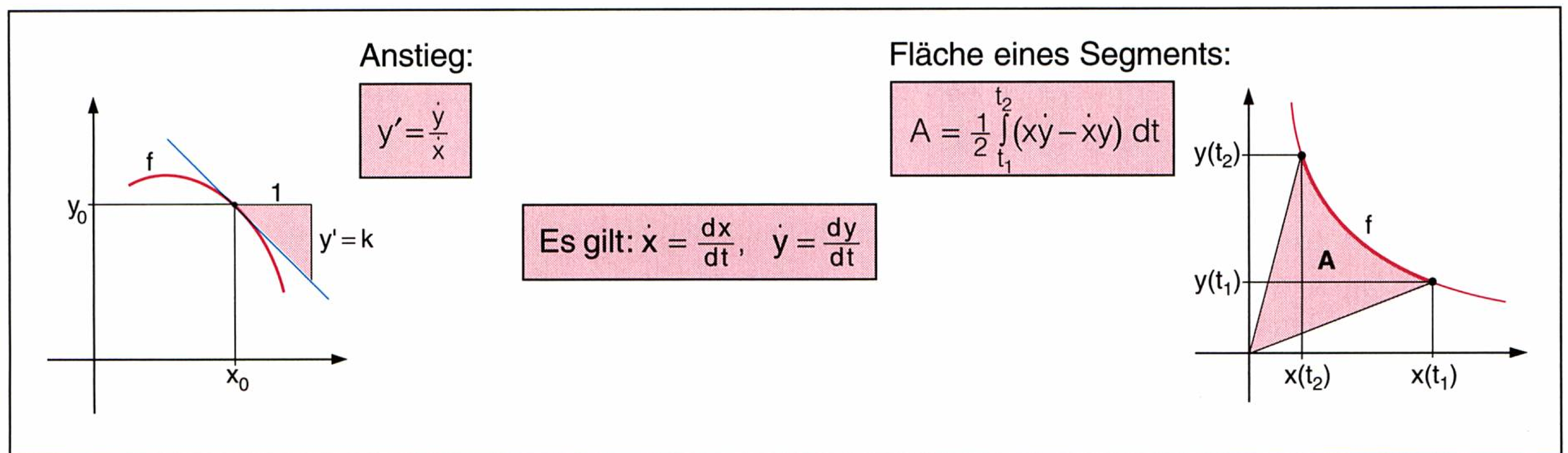
b) Man berechne den Wirkungsgrad $\eta = \frac{P}{2Cv_1^3}$. Wie viel Prozent der anströmenden Windenergie lassen sich somit prinzipiell verwerten?

2. Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung

Zu den Begriffen **Zykloide**, **Epizykloide** und **Hypozykloide** vgl. Band 2, Seite **169**.

Kann man Funktionen, die in Parameterdarstellung gegeben sind, differenzieren? Wie ist der Anstieg einer solchen Kurve definiert?

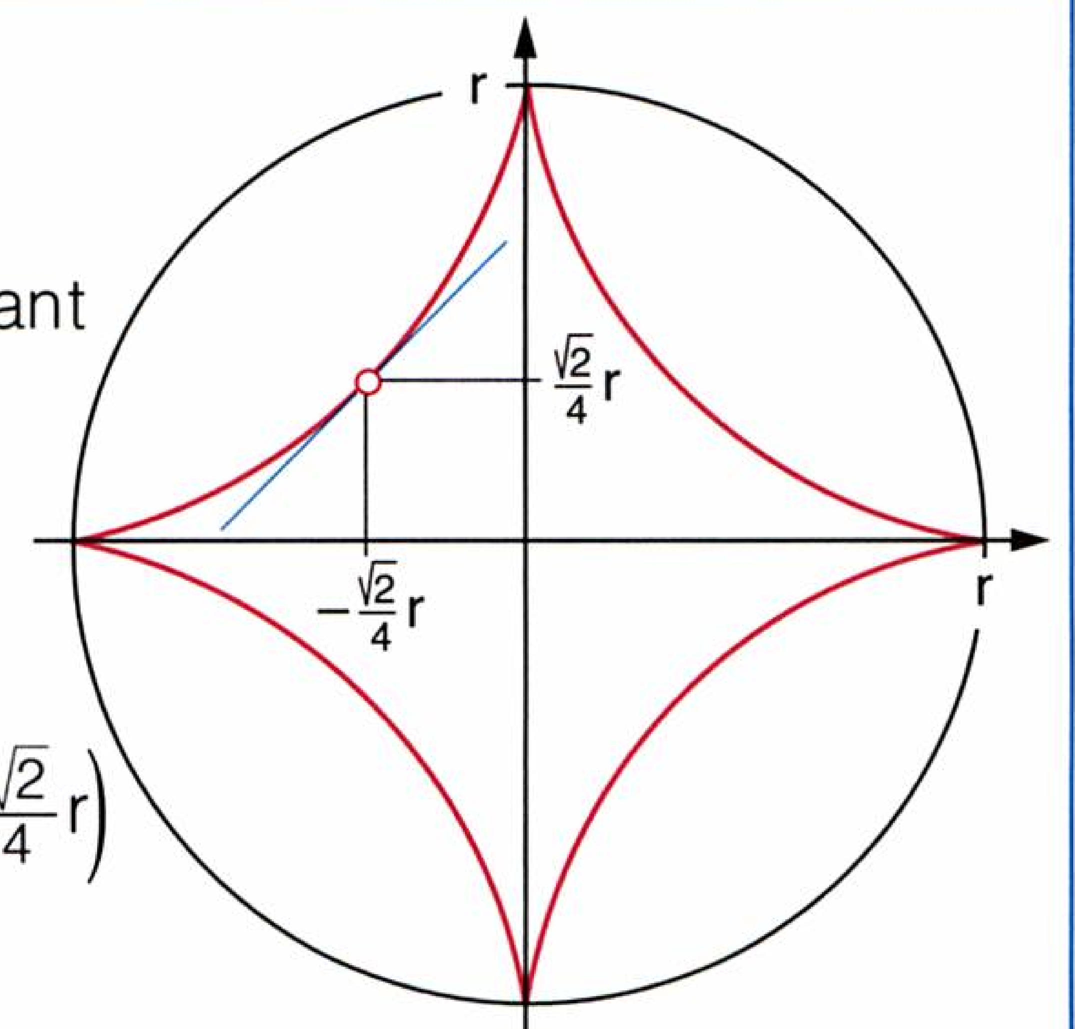
Diese Fragen der Infinitesimalrechnung lassen sich leicht beantworten. Die folgende Übersicht gibt Auskunft:



Beispiel:

Anstieg der Astroide[1)] $f: t \mapsto \begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases}$ im Punkt $P\left(t = \frac{3\pi}{4}\right)$[2)] sowie Flächeninhalt A?

Lösung:



(1) $\left.\begin{array}{l} x = r\cos^3 t \Rightarrow \dot{x} = 3r\cos^2 t(-\sin t) \\ y = r\sin^3 t \Rightarrow \dot{y} = 3r\sin^2 t\cos t \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{3r\sin^2 t\cos t}{3r\cos^2 t\sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$

$\Rightarrow y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\tan\frac{3\pi}{4} = 1$

Koordinaten von P: $\left.\begin{array}{l} x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = r\cos^3\frac{3\pi}{4} = r\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = -\frac{\sqrt{2}}{4}r \\ y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = r\sin^3\frac{3\pi}{4} = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}r \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r, \frac{\sqrt{2}}{4}r\right)$

Im Punkt $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}r, \frac{\sqrt{2}}{4}r\right)$ hat die Astroide den Anstieg 1!

(2) $\left.\begin{array}{l} x = r\cos^3 t \Rightarrow \dot{x} = -3r\cos^2 t\sin t \\ y = r\sin^3 t \Rightarrow \dot{y} = 3r\sin^2 t\cos t \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3r^2\sin^2 t\cos^4 t + 3r^2\cos^2 t\sin^4 t\right)dt$

Wir formen zunächst den Integranden um:

$$3r^2\sin^2 t\cos^4 t + 3r^2\cos^2 t\sin^4 t = 3r^2\sin^2 t\cos^2 t\overbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}^{=1} = 3r^2\cdot\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4}\sin^2 2t =$$

$$= \frac{3r^2}{8}\left(\sin^2 2t + \sin^2 2t\right) = \frac{3r^2}{8}\left(1 - \cos^2 2t + \sin^2 2t\right) = \frac{3r^2}{8}\left[1 - \left(\cos^2 2t + \sin^2 2t\right)\right] = \frac{3r^2}{8}(1 - \cos 4t)$$

$$\Rightarrow A = \frac{3r^2}{16}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)\,dt = \frac{3r^2}{16}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi} \Rightarrow A = \frac{3r^2\pi}{8}$$

---

1) Sternkurve, eine spezielle Hypozykloide mit $r_1 = 4r_2$.

2) Die Koordinaten x und y sind also nicht explizit gegeben.

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist der Anstieg der Tangenten der gegebenen Funktionen an der Stelle t_0 zu ermitteln:

230. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = 8t - 7\sin t \\ y = 8 - 7\cos t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{7}$

231. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = 9\cos t - 2\cos 3t \\ y = 9\sin t - 2\sin 3t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3}$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = \tan t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \quad t_0 = 0$

Bei den folgenden Aufgaben ist die Tangente an die durch die gegebenen Funktionen beschriebenen Kurven für den jeweiligen Wert von t zu ermitteln:

232. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = t + \ln t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t = e$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = t^2 \sin t \\ y = t\cos t \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{2}$

233. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \cos t \end{cases} \quad t = 4$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = \ln t \\ y = 5 + t^2 \end{cases} \quad t = \sqrt{e}$

Bei den folgenden Aufgaben sind die Flächeninhalte der durch die gegebenen Funktionen und Intervalle definierten Sektoren zu bestimmen:

234. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = 5 + 3\cos t \\ y = 7 + 2\sin t \end{cases} \quad \pi < t < \frac{3\pi}{2}$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = 8\cos t - 2 \\ y = 8\sin t - 10 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

235. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases} \quad 1 < t < 10$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = 6\cos t - 2\cos 3t \\ y = 6\sin t - 2\sin 3t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$

236. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = 8\cos t - 2\cos 4t \\ y = 8\sin t - 2\sin 4t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = 8\cos t + 2\cos 5t \\ y = 8\sin t - 2\sin 5t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{5}$

237. a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = 10\cos t - 5\cos 2t \\ y = 10\sin t - 5\sin 2t \end{cases} \quad 0 < t < \pi$

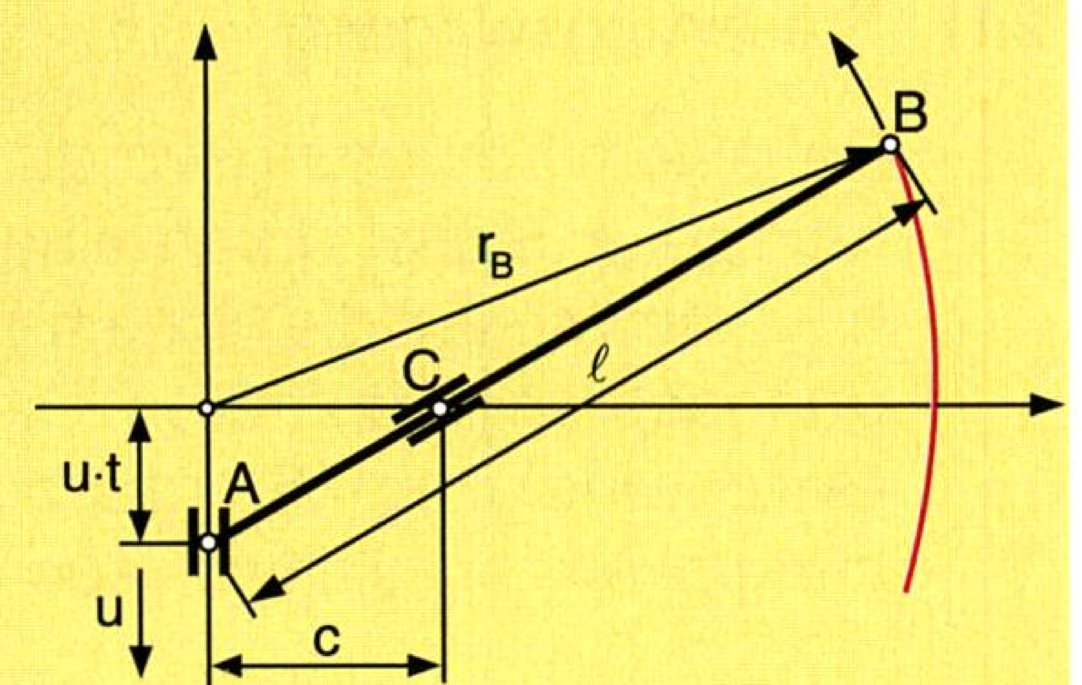
238. Konchoidenlenker

Bei vielen Modellgeräten ist die mechanische Aufgabe zu lösen, eine drehende oder wippende Bewegung in eine annähernd geradlinige umzuwandeln (z. B. Doppelwipphafenkran).

Dies erreicht man bei vielen Problemstellungen mit Hilfe des sogenannten **„Konchoidenlenkers"**.

Für die Überlegung wird das umgekehrte Problem skizziert:

Eine Stange der Länge ℓ gleitet an der Stelle C durch eine drehbar gelagerte Hülse. Das eine Ende A der Stange wird mit konstanter Geschwindigkeit u längs einer Schiene geführt, die den Abstand c vom Punkt C hat. Das freie Ende B beschreibt dann eine sogenannte **Konchoide**.



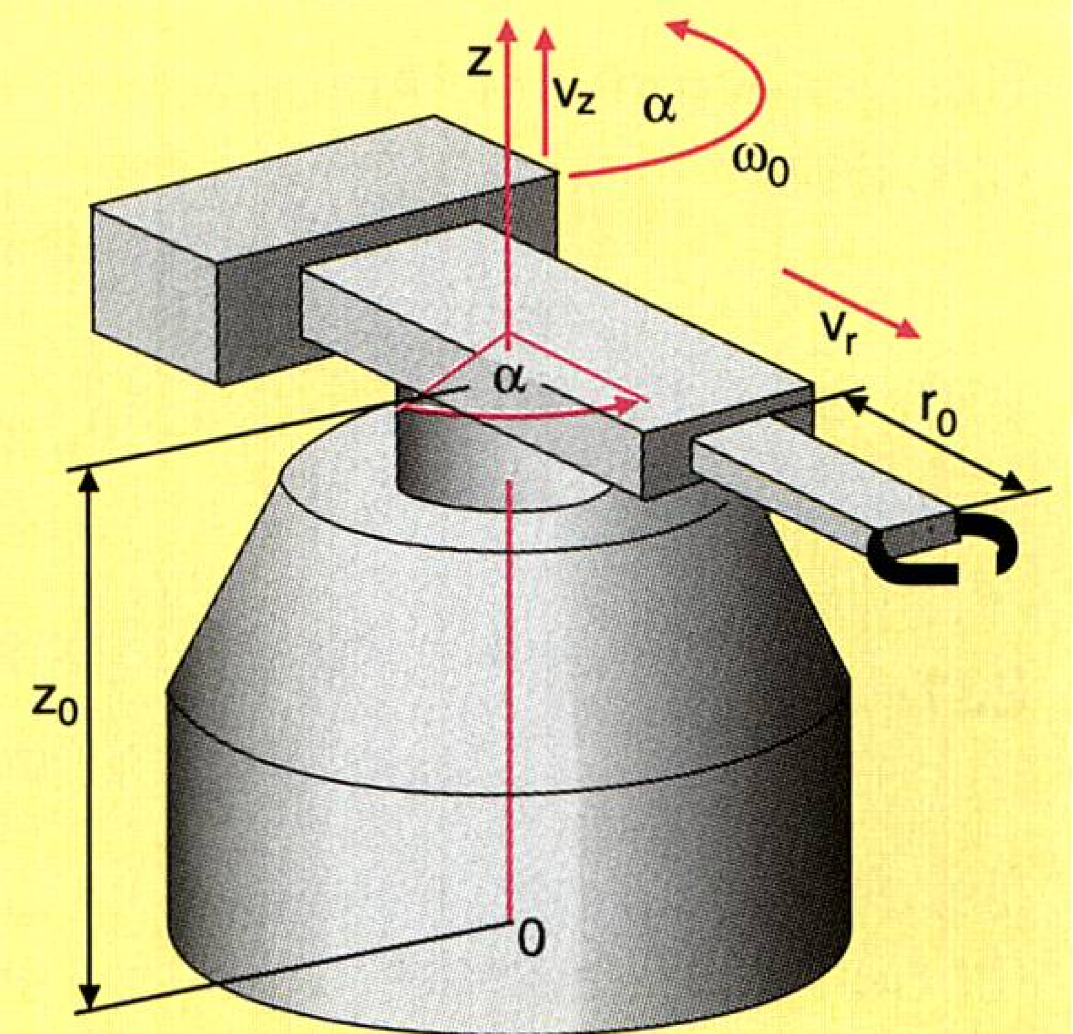
a) Man ermitte die jeweilige Position des Endpunktes B, wobei von Folgendem auszugehen ist: $u = 10\frac{cm}{s}$, $\ell = 12$ cm, $c = 4$ cm, $y_B = -4$ cm bis $y_B = 2$ cm für $\Delta t = 0{,}1$ s.

b) Nun soll für den Punkt B der Ortsvektor $\vec{r}_B = (x_B, y_B)$ allgemein bestimmt werden.

c) Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_B$ und der Beschleunigungsvektor $\vec{a}_B$ sind zu bestimmen und für $t = 0{,}25$ zahlenmäßig auszuwerten (Längenangaben wie oben). (Kettenregel $x = f(\varphi(t))$ verwenden!) Man berechne $|\vec{v}_B|$ und $|\vec{a}_B|$!

239. Roboter

Ein Handhabungsroboter kann 3 Bewegungsarten ausführen. Die Säule wird in z-Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $v_z = 0{,}4$ m/s ausgefahren und mit $\omega_0 = 1\,s^{-1}$ gedreht. Gleichzeitig wird der Schlitten mit der Greiferzange mit $v_r = 0{,}5$ m/s radial nach außen bewegt. Alle drei Geschwindigkeiten sind konstant.
Wie bewegt sich der Greifer, wenn er sich zur Zeit t = 0 an den durch die Koordinaten $r = r_0$, $z = z_0$ und $\alpha = 0$ bestimmten Ort befindet?

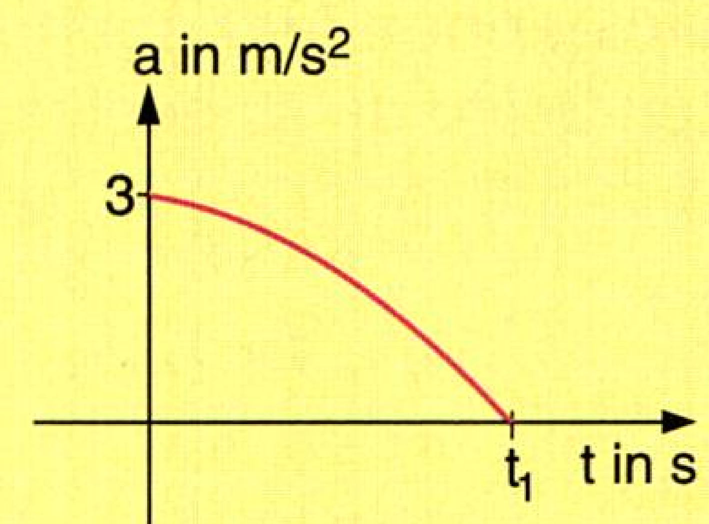


a) Man bestimme in Abhängigkeit von der Zeit t den Ortsvektor (q_x, q_y, q_z) des Greifers, die Komponenten v_x, v_y, v_z des Geschwindigkeitsvektors und die Komponenten a_x, a_y, a_z des Beschleunigungsvektors.

Anleitung: $\alpha = \omega_0 \cdot t$

b) An welcher Stelle im Raum befindet sich die Greifzange nach 1 s und nach 4 s im Raum ($r_0 = 1$m, $z_0 = 1{,}5$ m). Welche Werte ergeben sich in diesen Zeitpunkten für die Komponenten des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungsvektors?

240. Der Wiener U-Bahnzug „Silberpfeil" hat folgendes Beschleunigungsverhalten: Die Beschleunigung a nimmt nach einem Anfangswert von $a_0 = 3\,m/s^2$ (unmittelbar nach dem Abfahren s = 0, v = 0) mit der Zeit in Form einer Cosinusfunktion ab:



$a = A \cdot \cos(B \cdot t)$

Der gesamte Beschleunigungsvorgang dauert $t_1 = 10$ s.

a) Man berechne die Konstanten A und B aus den Bedingungen $a(t = 0) = a_0$ und $a(t_1) = 0$.

b) Man berechne die Geschwindigkeitsfunktion v (t) [Anleitung: $a = \frac{dv}{dt}$] und die Endgeschwindigkeit v_1 nach Ende des Beschleunigungsvorganges. T sei eine beliebige Zeitspanne im Beschleunigungsvorgang: $0 < T \leqslant t_1$

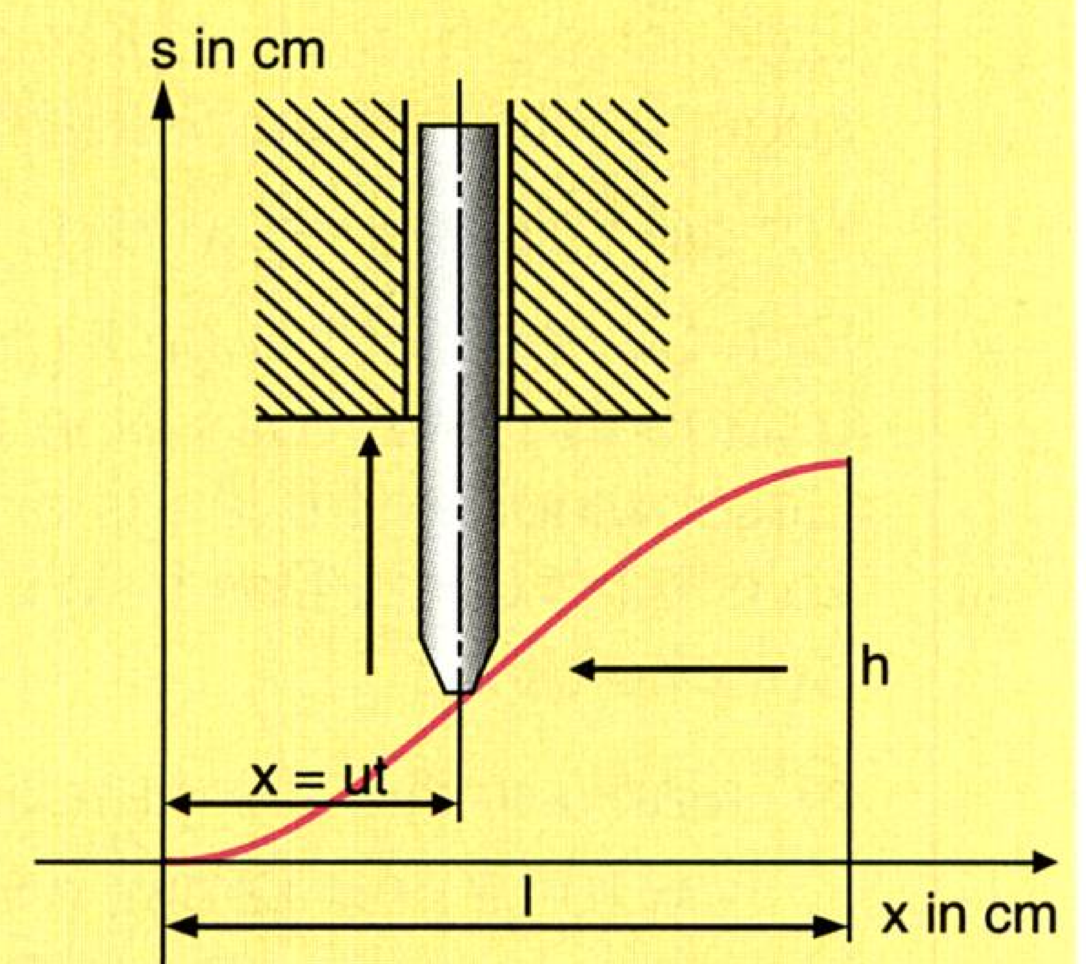
c) Man berechne die Weg-Zeitfunktion s(t) [Anleitung: $v = \frac{ds}{dt}$] und den Gesamtweg s_1, den der U-Bahnzug bis Ende der Beschleunigungszeit t_1 zurücklegt.

d) Man zeichne die Graphen der Funktionen a (t), v(t), s(t) und a (s).

241. Steuerungsvorgang

Bei einem Steuerungsvorgang einer Fertigungsstraße soll ein federbelasteter Stößel durch eine Schiebekurve (Länge $\ell = 8$ cm, Höhe h = 2 cm) so auf die Höhe h gehoben werden, dass keine Beschleunigungssprünge auftreten. Die Schiebekurve wird mit der konstanten Geschwindigkeit 16 cm/s bewegt. Die Beschleunigung wird in Abhängigkeit zur relativen Koordinate x vorgegeben mit

$$a = a_0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{\ell}$$



a) Man bestimme die Funktionen a(t), v(t) und s(t) und die Gleichung der Hubkurve s (x).

Anleitung: $a = \frac{dv}{dt}$, $v = \frac{ds}{dt}$, $x = ut$, Bestimmung der Integrationskonstanten aus v(0) =0 und s(0)=0.

b) Man bestimme den Ort x_a und die Größe a_{max} der maximalen Stößelbeschleunigung und den Ort x_v und v_{max} der maximalen Stößelgeschwindigkeit.

242. Wankelmotor

Der NSU-RD80 war 1960 das erste Automobil mit einem Wankelmotor. Dieses revolutionäre Kreiskolbenmotorkonzept wurde dann von japanischen Automobilherstellern in Lizenz gekauft und für Sportwagen verwendet. In den letzten Jahren ist es aber um den Wankelmotor recht still geworden.

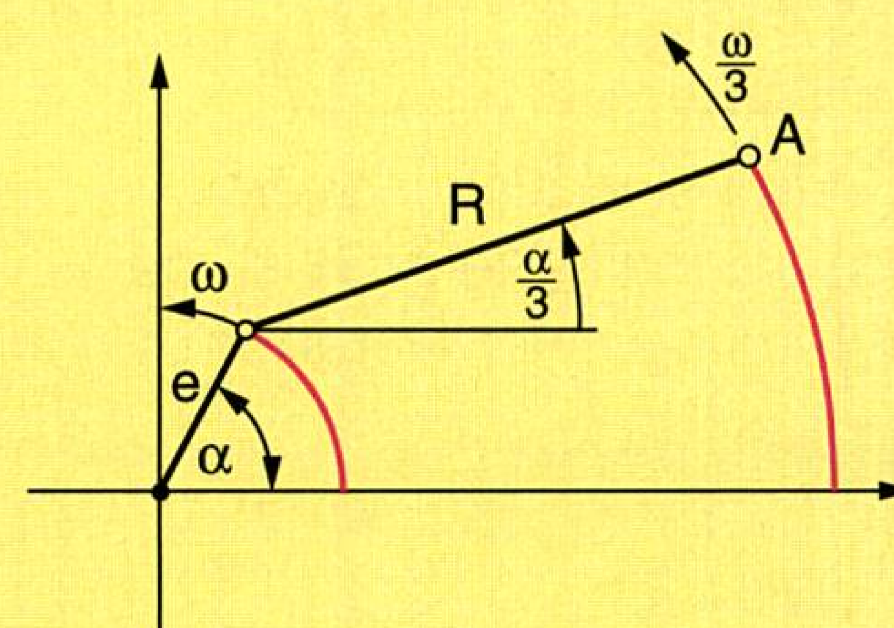
Ein Schnitt durch den Kreiskolbenmotor ergibt folgendes Bild: Der Zylinderschnitt, senkrecht auf die Erzeugenden des Zylinders, ist eine gestreckte Epizykloide, die von den drei Schnittpunkten der Kolbenkanten durchlaufen wird. In den unterschiedlich großen „Kammern" zwischen Kreiskolben und Gehäusekontur werden alle Takte eines Motors durchlaufen (Einlass, Verdichtung, Verbrennung-Arbeitstakt, Abgasausstoß).

Die Mechanik des Kreiskolbenmotors ist durch die rotierenden Bauteile besonders günstig, an den Kolbenkanten entstehen jedoch Dichtungsprobleme.

Die Hüllkurve, die Epizykloide, lässt sich mathematisch auch Folgendermaßen beschreiben:

Zwei Strecken e (Exzentrizität des Rollkreises) und R (Kolbenradius) liegen in Strecklage auf der positiven x-Achse. e rotiert mit einer konstanten Geschwindigkeit ω um den Ursprung, schließt also nach der Zeit t den Winkel $\alpha = \omega \cdot t$ mit der x-Achse ein. R rotiert um den Endpunkt von e mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_R = \frac{\omega}{3}$, bildet nach t also den Winkel $\frac{\alpha}{3}$.

a) Man bestimme für $\alpha = 0°, 30°, \ldots, 270°$ grafisch die Lage des Endpunktes A, der die Gehäusekontur beschreibt (e = 1 cm, R = 4 cm).
Wenn e einen vollen Umlauf von 360° ausgeführt hat, unter welchem Winkel steht R? (Skizze!)



b) Man skizziere die Lage des Dreieckskolbens für $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$ (angenäherte Hüllkurve aus obiger Figur verwenden).

c) Man bestimme die Kurve von A in Parameterdarstellung $A = f(e, R, \alpha)$

d) Man berechne die Geschwindigkeiten v_x und v_y der Kolbenstirnkante durch A und bestimme den Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y)$ für $\omega = 628\ s^{-1}$.
(Anleitung: $v_x = \frac{dx(\omega \cdot t)}{dt}$, Kettenregel!) e = 15 mm und R = 75 mm.

243. Es sind die Graphen folgender Funktionen zu ermitteln:

$$f: t \mapsto \begin{cases} x = 3\sin t \\ y = \sin(3t + \varphi) \end{cases}$$ mit **a)** $\varphi = 0$ **b)** $\varphi = \frac{\pi}{4}$ **c)** $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **d)** $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

Diese Graphen heißen **LISSAJOUS-Figuren**. Sie sind in der Phasenmessung elektrischer Wechselgrößen mittels Oszilloskop von Bedeutung. Ihre allgemeine Gleichung in Parameterdarstellung lautet:

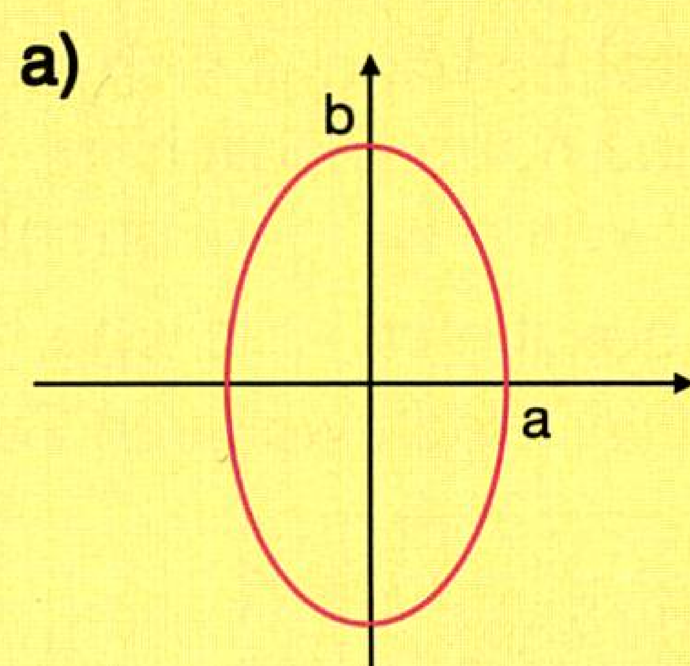
$$f: t \mapsto \begin{cases} x = a \cdot \sin\omega t \\ y = b \cdot \sin(n\,\omega t + \varphi) \end{cases}$$

244. Welche Figuren erhält man für

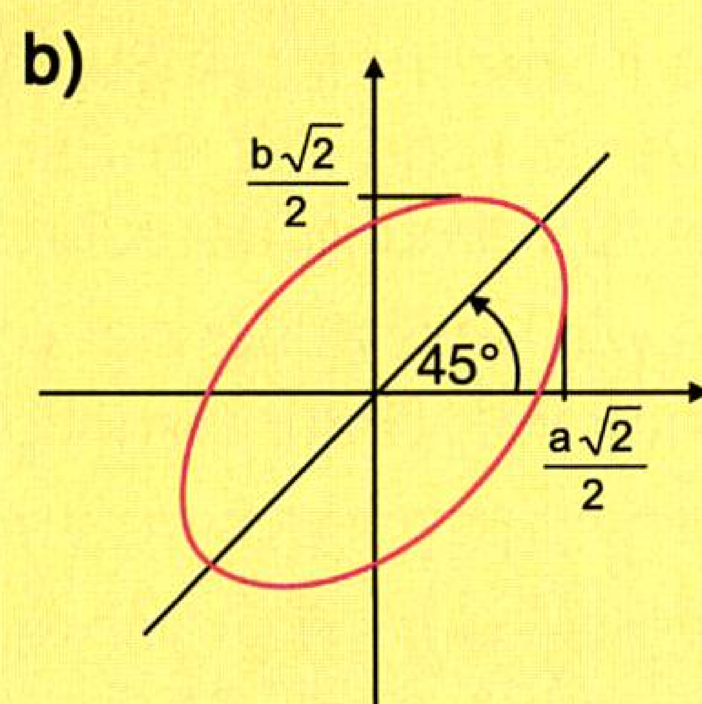
a) $n = 1,\ \varphi = 0,\ a = b$ **b)** $n = 1,\ \varphi = \pi,\ a = 2b$ **c)** $n = 3,\ \varphi = 0,\ a = b$ **d)** $n = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ a \neq b$

245. Es ist aus nachstehenden Diagrammen die Phasenverschiebung φ zu ermitteln. Eine mögliche Parameterdarstellung ist anzugeben.

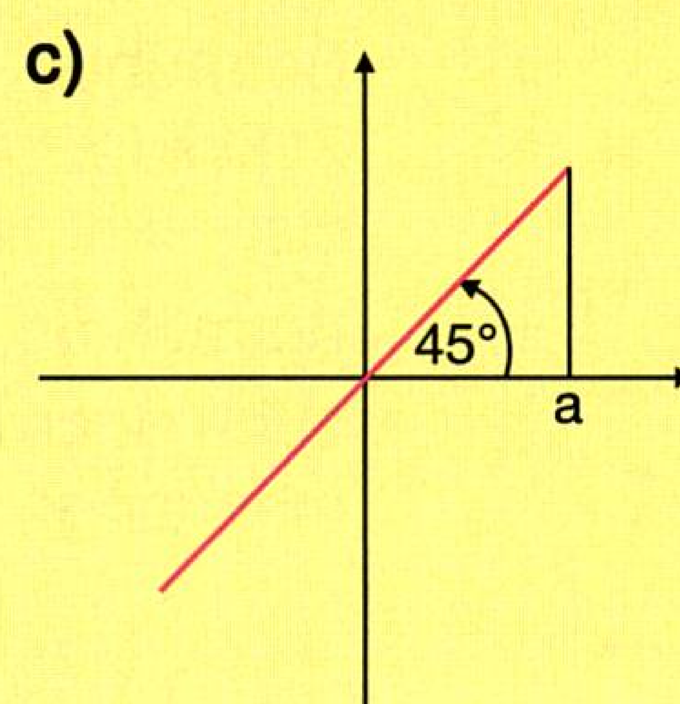
a)



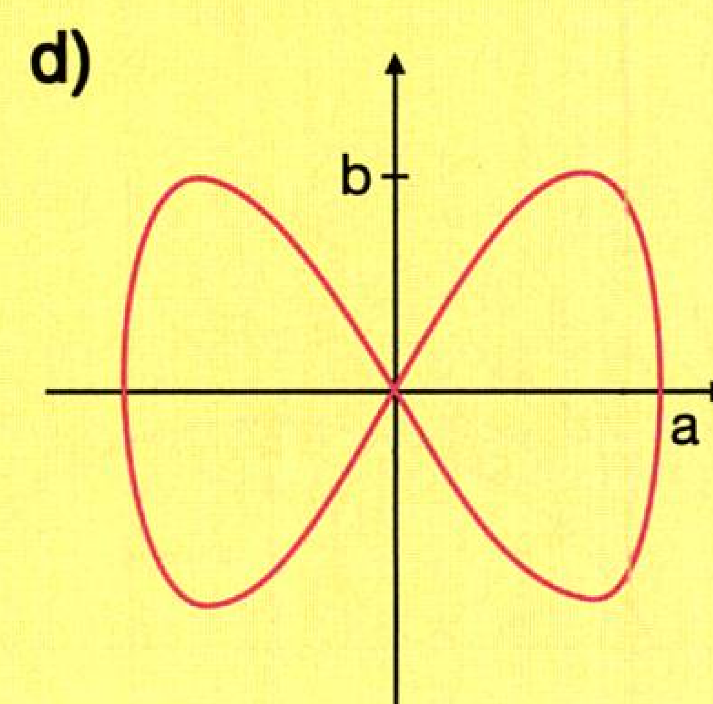
b)



c)



d)



3. Krümmung



Jeder Motorradfahrer weiß, dass die Krümmung auf einer Kreisbahn konstant ist. Wird die Kurve enger, muss er sich mehr „hineinlegen“. Es besteht also ein indirektes Verhältnis zwischen Kurvenradius und Krümmung.

Durch welchen Term können wir die Krümmung einer allgemeinen Funktion y = f(x) ermitteln?

Kreiskrümmung:

$\kappa_K = \frac{1}{r}$

κ_K und r sind also indirekt proportional! Wie groß ist die Krümmung einer Geraden?

Krümmung ebener Kurven y = f(x):

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

κ klein

κ groß

Beispiel:

Es ist die Krümmung der Parabel $y = \frac{1}{6}x^2$ im Punkt $P(3, \frac{3}{2})$ zu ermitteln.

Lösung :

(1) $y = \frac{1}{6}x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x$

(2) $1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 1 + \frac{1}{9}x^2$

(3) $y'' = \frac{1}{3}$

(4) $\kappa = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{1}{9}x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$

$\kappa = \frac{1}{3(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{12}$

$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{12}$

$y = \frac{x^2}{6}$

$\frac{3}{2}$ P 3

Rechenregel:

(1) $y' =$

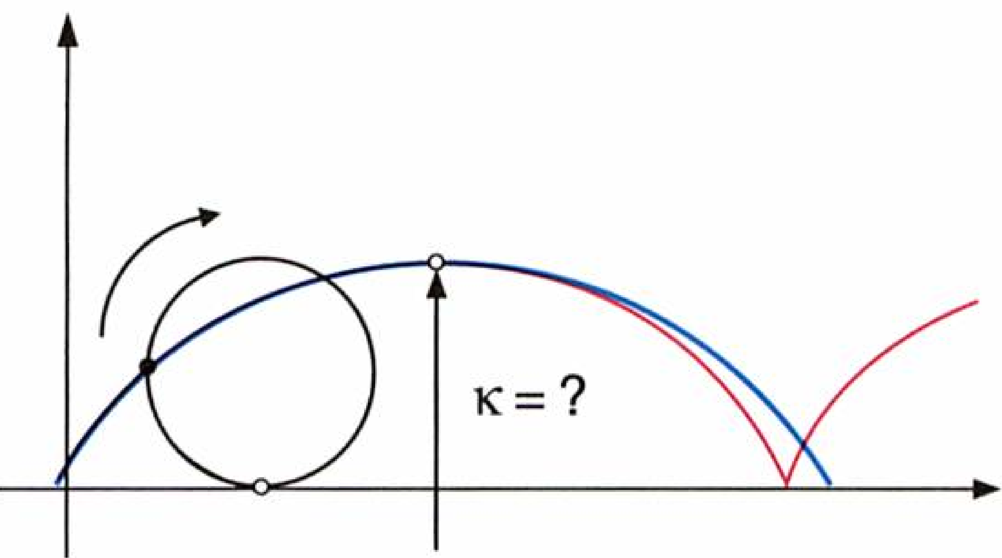
(2) $1 + y'^2 =$

(3) $y'' =$

(4) $\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

Betrachten wir die Kurve in der Außenspalte! Es handelt sich um eine Zykloide, deren Darstellung nur in Parameterform möglich ist. Lässt sich auch hier die Krümmung berechnen? Wenn wir die Formel für κ betrachten, sehen wir, dass außer der uns bekannten Ableitung $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ auch noch y'' vorkommt. Dafür benötigen wir einen weiteren Zusammenhang:

$$y'' = \frac{1}{\dot{x}^3}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) \text{ mit } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$



Beispiel:

Gegeben: Zykloide $f: t \mapsto \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$

Gesucht: Krümmung κ im Scheitel $\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$

Lösung :

$$(1) \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = r(1 - \cos t) \\ \dot{y} = r \sin t \end{cases} \Rightarrow \quad (2) \begin{cases} \ddot{x} = r \sin t \\ \ddot{y} = r \cos t \end{cases}$$

$$(3) \; y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r \sin t}{r(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$(4) \; y'' = \frac{1}{\dot{x}^3}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) = \frac{1}{r^3(1 - \cos t)^3}\left[r^2 \cos t(1 - \cos t) - r^2 \sin^2 t\right] =$$

$$= \frac{1}{r(1 - \cos t)^3}(\cos t \underbrace{- \cos^2 t - \sin^2 t}_{-1}) = \frac{\cos t - 1}{r(1 - \cos t)^3} = \frac{-1}{r(1 - \cos t)^2}$$

$$(5) \; 1 + y'^2 = 1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} = \frac{1 - 2\cos t + \overbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}^{1}}{(1 - \cos t)^2} = \frac{2(1 - \cos t)}{(1 - \cos t)^2} = \frac{2}{1 - \cos t}$$

$$(6) \quad \kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{-1}{r(1 - \cos t)^2}}{\left(\frac{2}{(1 - \cos t)}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\, r(1 - \cos t)^2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}\, r\sqrt{1 - \cos t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{für } t = \frac{\pi}{2}: \quad \kappa = -\frac{1}{2\sqrt{2}\, r}$$

Reihenfolge der Berechnung für Krümmung von Kurven in Parameterdarstellung:

(1) $\dot{x} = , \dot{y} =$

(2) $\ddot{x} = , \ddot{y} =$

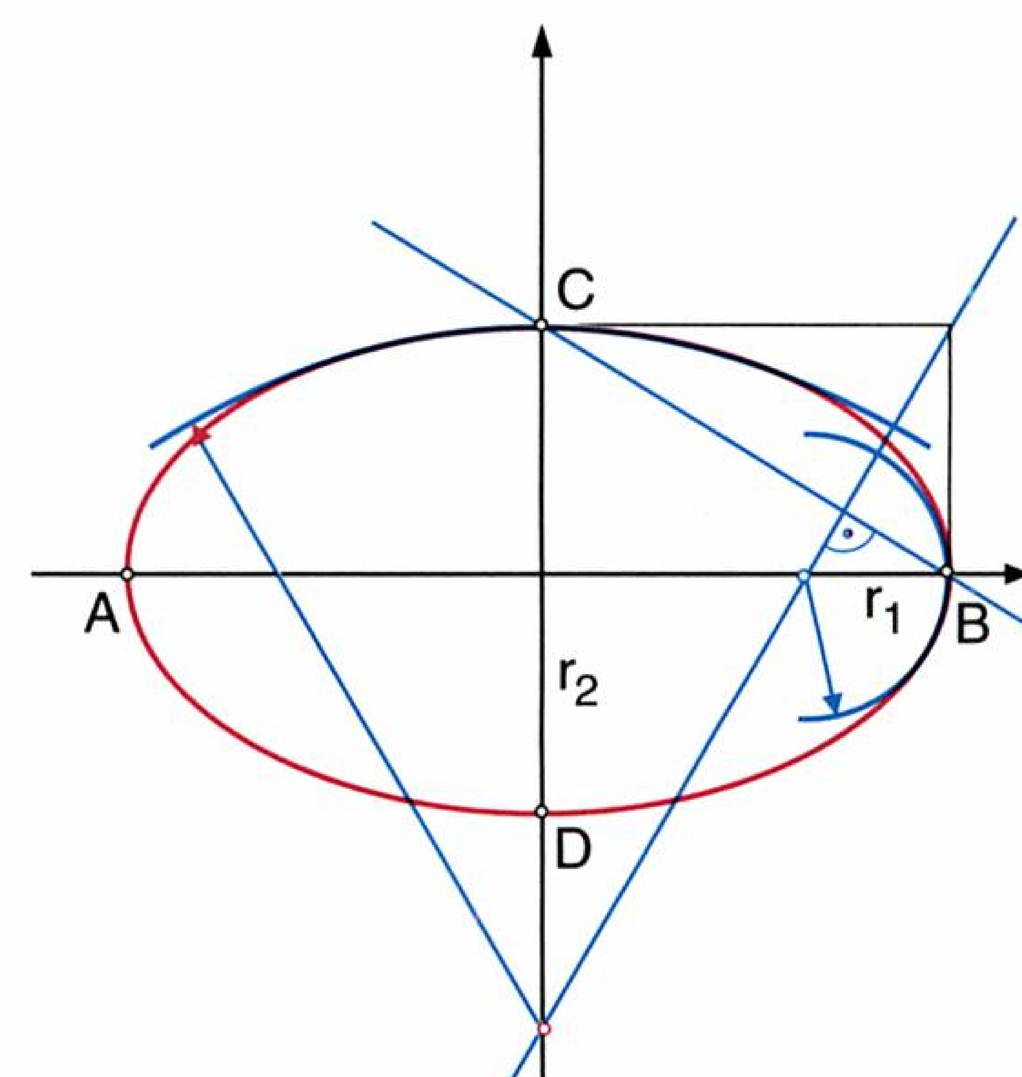
(3) $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

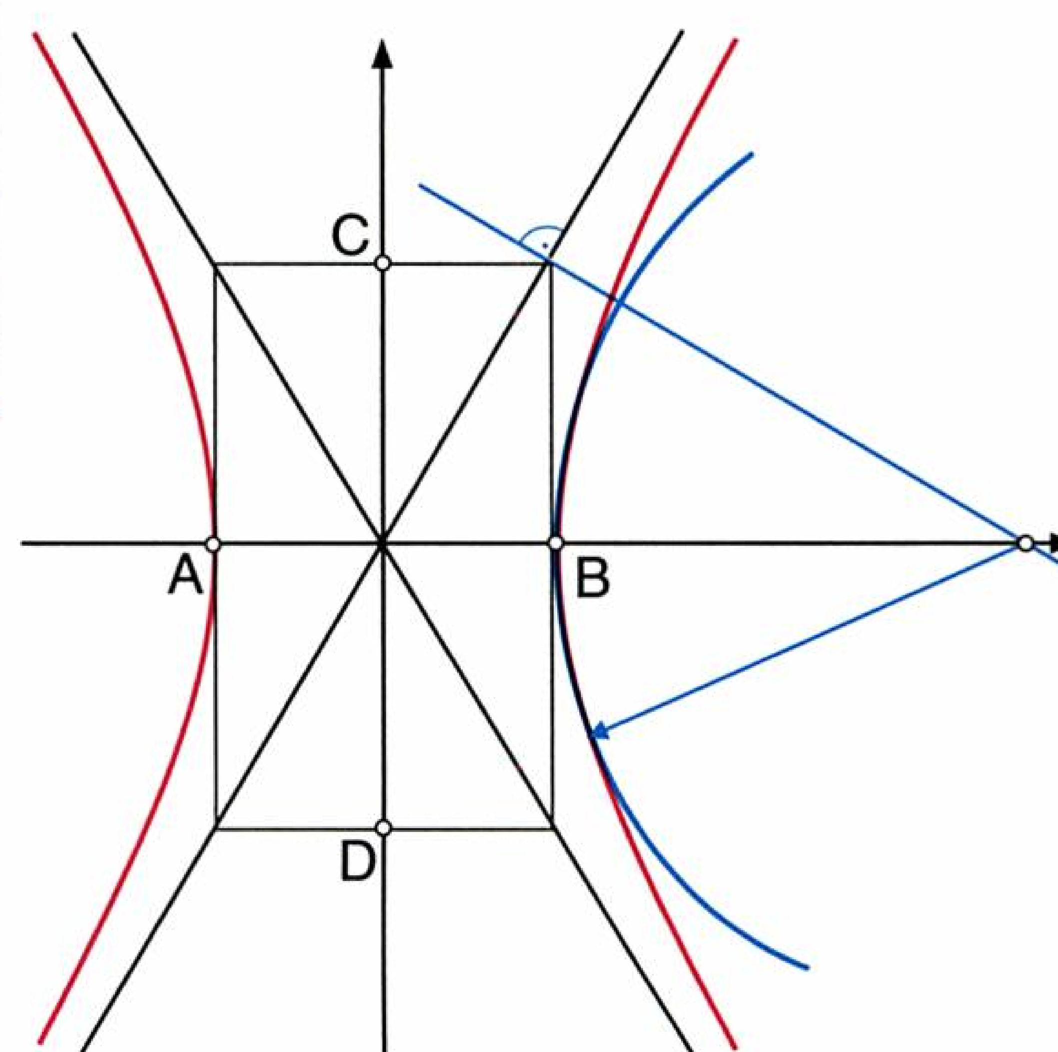
(4) $y'' = \frac{1}{\dot{x}^3}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})$

(5) $1 + y'^2 =$

(6) $\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

Eine aufwendige Rechnung!





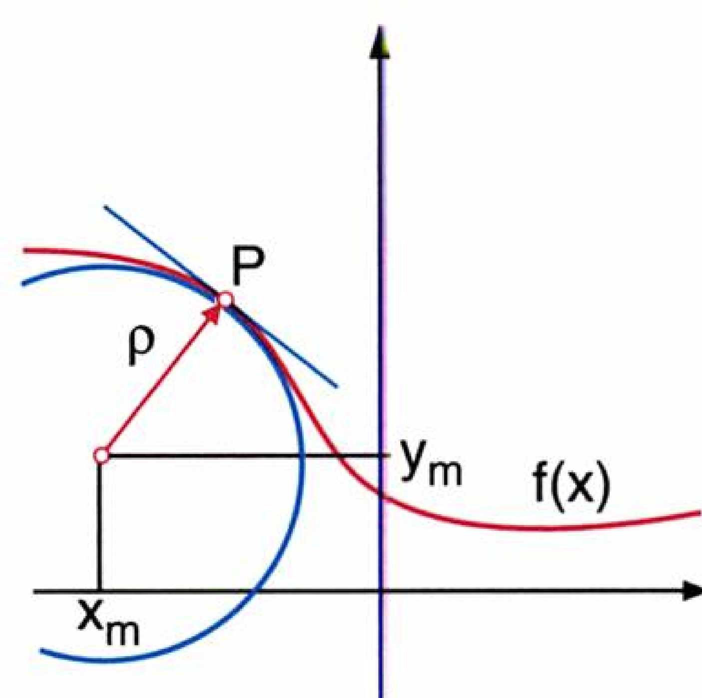
Was aber fangen wir mit dem Wert für κ an? Hat er eine praktische Bedeutung? Ja, der Wert für κ ist sogar sehr wichtig. Mit ihm kann man die sogenannten **Krümmungskreise** berechnen. Für die Kegelschnitte Ellipse, Hyperbel und Parabel werden die Konstruktionen dieser Krümmungskreise in der Außenspalte wiederholt. Mit dem folgenden Formelsatz ist es kein Problem, die Sache auch zu berechnen.

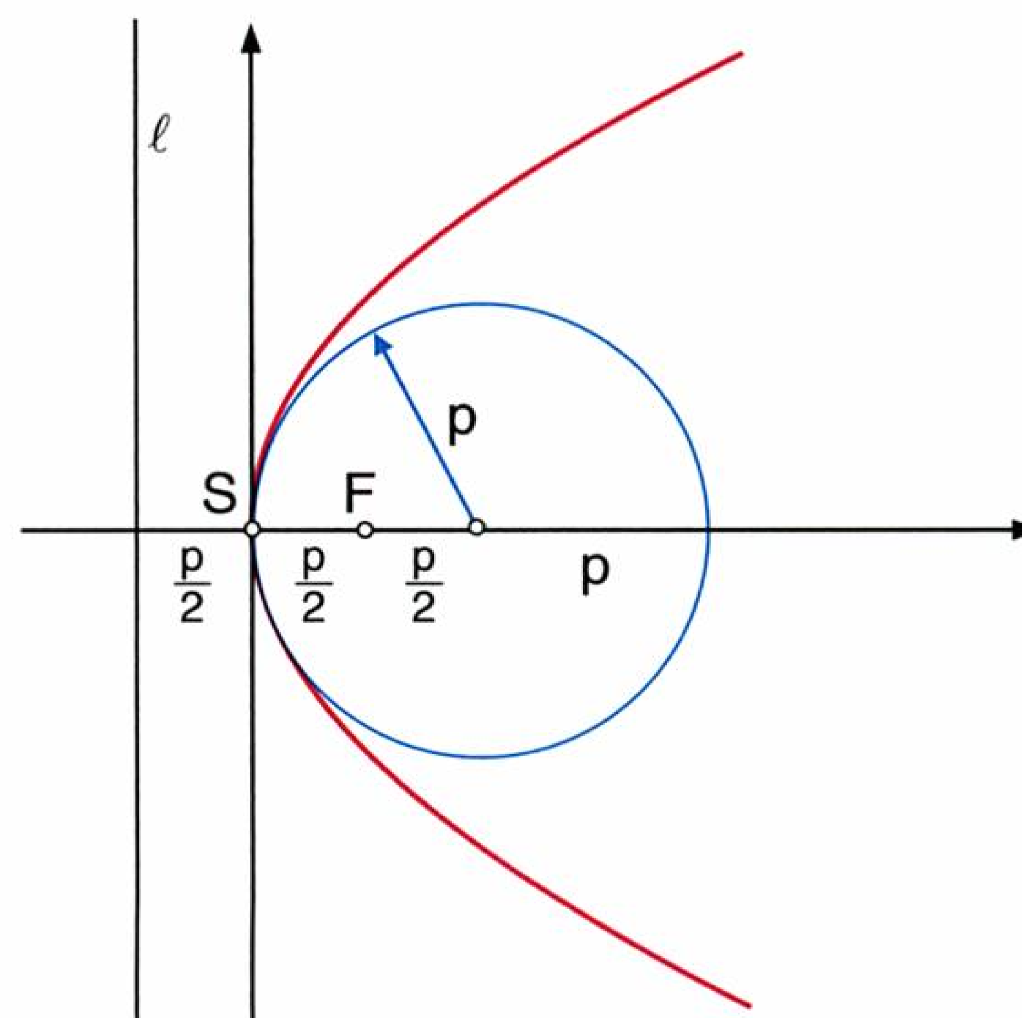
Krümmungskreis: $k(x_m, y_m, \rho)$

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

$$x_m = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)$$

$$y_m = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)$$





AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist die Krümmung der gegebenen Kurven in Punkt P zu berechnen:

246. **a)** $y = \frac{1}{2}x^2 \quad P(4, y)$ **b)** $y = 7x^2 \quad P(0, y)$
c) $y = \frac{4}{x} \quad P(8, y)$ **d)** $y = 2x^3 \quad P(1, y)$

247. **a)** $y = \sqrt{x} \quad P(3, y)$ **b)** $y = \sqrt[3]{x+1} \quad P(-1, y)$
c) $y = x^2 + x - 1 \quad P(2, y)$ **d)** $y = (x-1)^2 (x+4)^2 \quad P(3, y)$

248. **a)** $y = \sin 2x \quad P\left(\frac{\pi}{4}, y\right)$ **b)** $y = 4\cos x \quad P(0, y)$
c) $y = \tan x \quad P\left(\frac{\pi}{6}, y\right)$ **d)** $y = 2\ln x \quad P(e^3, y)$

249. **a)** $y = e^{-x} \quad P(0, y)$ **b)** $y = e^x + e^{-x} \quad P(0, y)$ **c)** $y = x\ln x + 2 \quad P(1, y)$

250. Folgende Kurven sind in Parameterform gegeben. Es ist die Krümmung für den gegebenen Wert t zu ermitten:

a) $f: t \mapsto \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad t = \pi$ **b)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = 3(t - 2\sin t) \\ y = 3(1 - 3\cos t) \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{2}$ **c)** $f: t \mapsto \begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin^2 t \end{cases} \quad t = 1$

251. Für die Astroide $f: t \mapsto \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ ist die Krümmung allgemein in Abhängigkeit von t anzugeben.

Bei den folgenden Aufgaben ist der Krümmungskreis k an die gegebenen Kurven im Punkt P zu bestimmen:

252. **a)** $y = \frac{5}{2}x^2 \quad P(0, y)$ **b)** $y = x^3 - 3 \quad P(1, y)$
c) $y = \ln 2x \quad P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ **d)** $y = e^{7x} \quad P(2, y)$

253. **a)** $y = \tan x - x \quad P\left(\frac{\pi}{3}, y\right)$ **b)** $y = \frac{1}{x^2} \quad P(\sqrt[3]{2}, y)$
c) $y = \sin^2 x \quad P\left(\frac{\pi}{4}, y\right)$ **d)** $y = \cos^3 \frac{x}{2} \quad P(4\pi, y)$

254. Es sind die Konstruktionsvorschriften für die Schmiegekreise **a)** der Ellipse und **b)** der Hyperbel zu beweisen.

255. Man leite die Formel für den Krümmungskreis einer in Parameterform gegebenen Kurve her.

Anleitung: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \; y'' = \frac{1}{\dot{x}^3}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})$

$\Rightarrow \rho = \ldots, x_m = \ldots, y_m = \ldots$

256. **Gegeben:** Astroide $f: t \mapsto \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

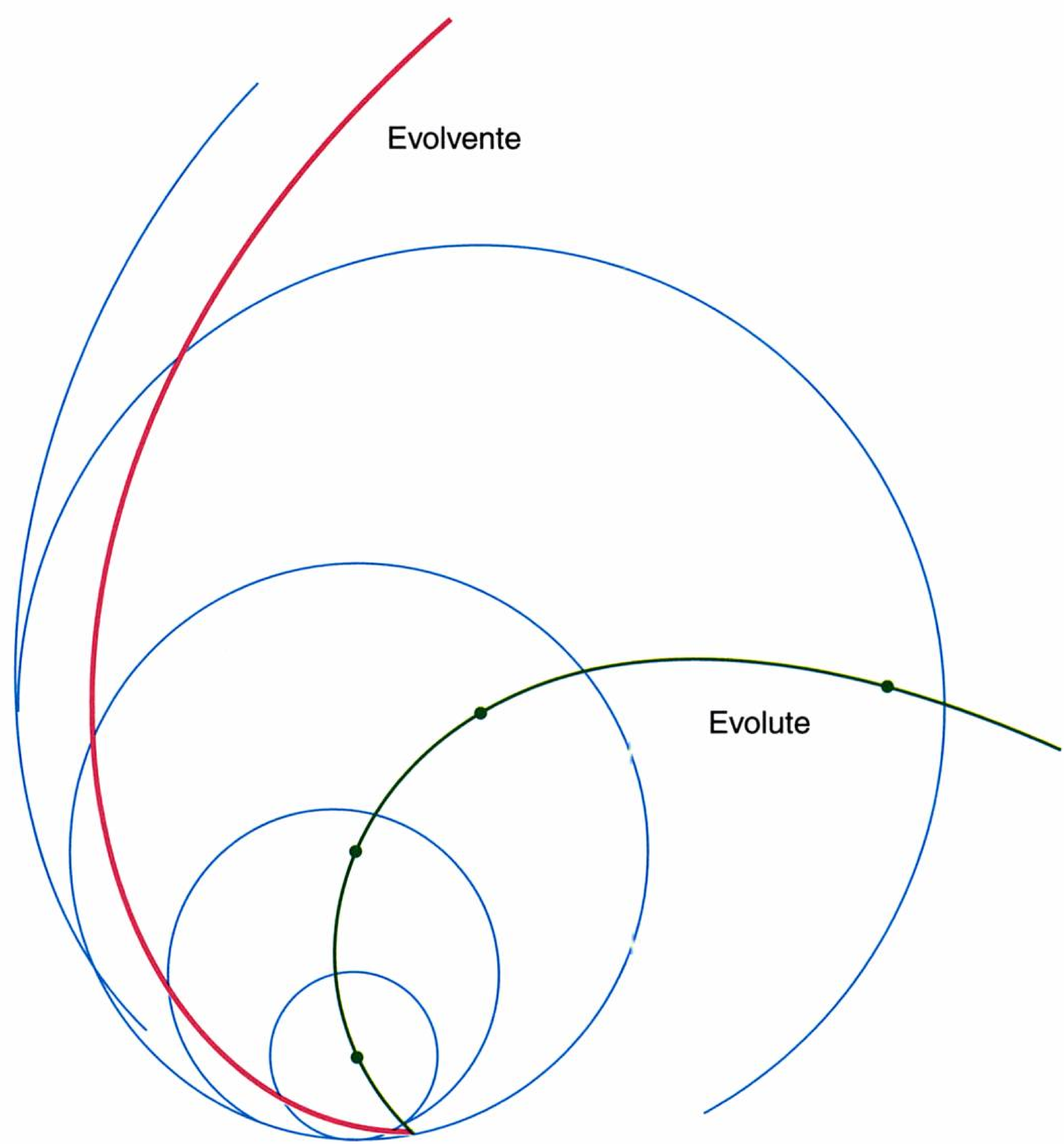
Gesucht: Krümmungskreise in **a)** $P\left(t = \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $Q\left(t = \frac{3\pi}{8}\right)$

257. Für folgende Kurven sind die Stellen maximaler Krümmung, κ_{max}, ρ_{min} und die zugehörigen x_m, y_m zu ermitteln.

a) $y = e^x$ **b)** $y = \cos x$
c) $y = \sqrt{x}(x - 2)$ **d)** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Anleitung: Die Krümmung wird dann maximal, wenn $\frac{d\kappa}{dx} = 0$ und $\frac{d^2\kappa}{dx^2} < 0$.

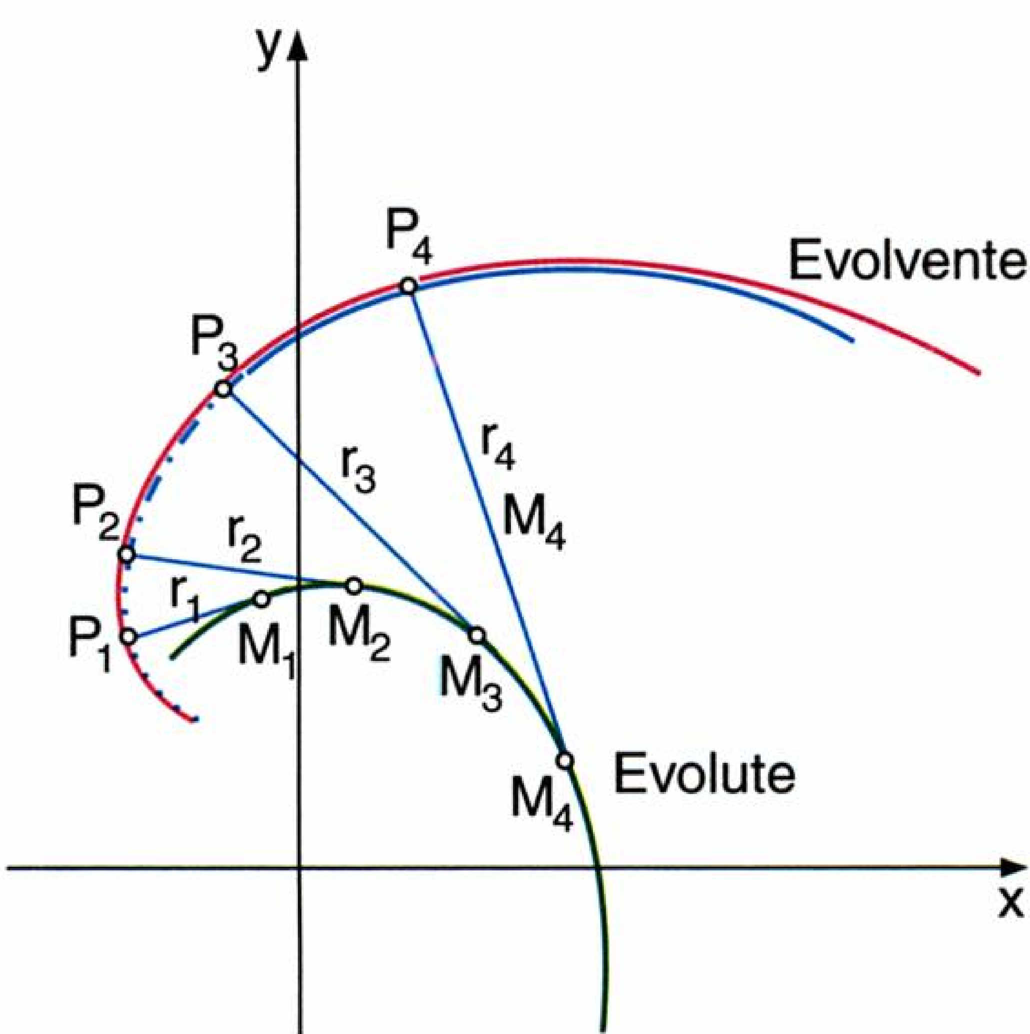
4. Evolute, Evolvente



Was soll diese Grafik illustrieren? Im vorigen Abschnitt haben wir eine Methode kennengelernt, die es uns ermöglicht, den Krümmungskreis k in einem beliebigen Punkt P einer Funktion zu ermitteln.

Wenn wir nun **alle** Krümmungskreismittelpunkte einer Funktion miteinander verbinden, entsteht eine neue Kurve: die **Evolute**[1]. Die ursprüngliche Kurve heißt dann **Evolvente**[2] der Evoluten.

In obiger Grafik sind Evolvente (ursprüngliche Kurve, rosa), deren Krümmungskreise (blau) und die Verbindungskurve der Krümmungskreismittelpunkte, also die Evolute (grün) eingezeichnet. In der Außenspalte ist dieser Zusammenhang noch einmal grafisch dargestellt.



Die Berechnung erfolgt mittels folgender Formeln:

Parameterdarstellung der Evoluten:

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} \xi = x - \frac{y'}{y''}\left(1 + y'^2\right) \\ \eta = y + \frac{1}{y''}\left(1 + y'^2\right) \end{cases} \quad y = f(x) \ldots\ldots \text{ Evolvente}$$

Die Parameterdarstellung der Evolute entspricht formal den Formeln für den Krümmungskreismittelpunkt. Der Unterschied besteht darin, dass wir keinen konkreten Wert für x einsetzen, sondern die Krümmungsmittelpunkte in Abhängigkeit von x darstellen: Ein Beispiel soll diesen — nicht einfachen — Zusammenhang erläutern.

---

[1]) evolutum (lat.): herausgerollt.
[2]) evolvens (lat.): herauswickelnd.

Strecken mit oftmaliger und starker Krümmungsänderung sind dann notwendig, wenn auf wenig Fläche eine große Höhendifferenz zu bewältigen ist.

Rechenregel:

(1) $y' = , \quad y'' =$

(2) $1 + y'^2 =$

(3) $\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)$

(4) $\eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)$

(5) $f(x): x \mapsto \begin{cases} \xi = \xi(x) \\ \eta = \eta(x) \end{cases}$

(6) Explizite Darstellung $f(\eta) = \eta$ möglich?

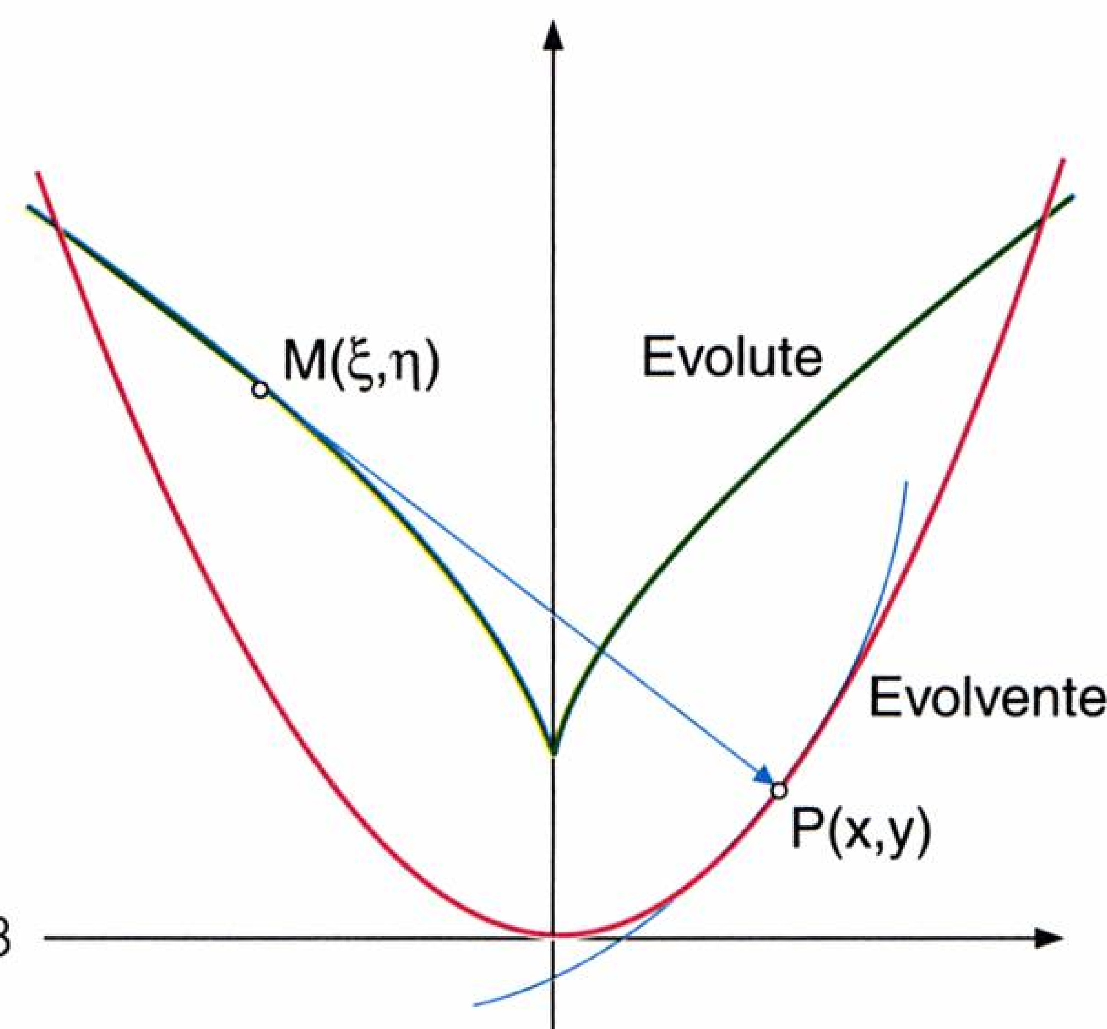
In dieser Darstellung ist **x** der **Parameter**, die von x abhängigen Variablen heißen ξ und η!

Beispiel:

Es ist die Evolute des Graphen der Funktion $y = \frac{1}{5}x^2$ gesucht.

Lösung:

(1) $y = \frac{1}{5}x^2 \Rightarrow y' = \frac{2}{5}x \Rightarrow y'' = \frac{2}{5}$



(2) $1 + y'^2 = 1 + \frac{4}{25}x^2$

(3) $\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) =$

$= x - \frac{\frac{2}{5}x}{\frac{2}{5}}\left(1 + \frac{4}{25}x^2\right) =$

$= x - x\left(1 + \frac{4}{25}x^2\right) = -\frac{4}{25}x^3$

$\xi = -\frac{4}{25}x^3$

(4) $\eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) =$

$= \frac{1}{5}x^2 + \frac{5}{2}\left(1 + \frac{4}{5}x^2\right) =$

$= \frac{5}{2} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^2 =$

$= \frac{5}{2} + \frac{3}{5}x^2 \qquad \eta = \frac{5}{2} + \frac{3}{5}x^2$

(5) $f(x): x \mapsto \begin{cases} \xi = -\frac{4}{25}x^3 \\ \eta = \frac{5}{2} + \frac{3}{5}x^2 \end{cases}$

(6) $\xi = -\frac{4}{25}x^3 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{25\xi}{4}}$

$\Rightarrow \eta = \frac{5}{2} + \frac{3}{5}\left(\frac{25\xi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben sind die Evoluten der gegebenen Kurven zu ermitteln:

258. **a)** $y = 2x^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^2$ **c)** $y = 5x^3$ **d)** $y = -\frac{1}{4}x^3$

259. **a)** $y = \frac{2}{x}$ **b)** $y = -\frac{1}{3x}$ **c)** $y = \frac{1}{x^2}$ **d)** $y = \frac{4}{x^2}$

260. **a)** $y = 2\sin x$ **b)** $y = \sin 3x$ **c)** $y = \frac{1}{2}\cos x$ **d)** $y = \tan x$

261. **a)** $y = e^{\frac{x}{2}}$ **b)** $y = e^{-x}$ **c)** $y = 2\ln x$ **d)** $y = \ln^2 x$

262. **Gegeben: a)** Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ **b)** Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
Gesucht: Gleichungen der Evoluten

263. Die Parameterdarstellung der Zykloide lautet: $f: t \mapsto \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}$. Es ist zu zeigen, dass die Evolute der Zykloide wieder eine Zykloide ist.

Anleitung: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, y'' = \frac{1}{\dot{x}^3}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}), \ldots$

264. Wie lautet die „Gleichung" der Kreisevolute zu k: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

265. Anhand der Evolute der Funktion $y = x^2$ ist zu zeigen, dass die Evolutentangenten die Evolvente rechtwinkelig schneiden.

5. Länge eines Kurvenbogens (Rektifikation)[1)]

Dunkel und unheimlich erhob sich der tropische Regenwald zu beiden Seiten des Flusses. Es war ein Gewirr von Stämmen, Lianen und Unterholz, dessen Durchdringen der Expedition unter der Leitung des einstigen Fabriksarbeiters und späteren Arztes David LIVINGSTONE die letzten Kräfte kostete. Die Teilnehmer der Forschungsreise waren zu ermattet, als dass sie den fauligen Geruch des Moders, dieses Markenzeichen des undurchdringlich erscheinenden Waldes, und das Summen der lästigen Moskitos wahrgenommen hätten. Zu oft schon waren sie die ersten Weißen gewesen, die mit den afrikanischen Wundern der Natur konfrontiert wurden: Nashornkäfer, Gespensterheuschrecken und Kakerlaken, Wanderameisen, die ihre lebende Beute bis aufs Skelett abnagen. Die Tier- und Pflanzenwelt schien manchmal über die nichtigen Bemühungen der Menschen, Meter um Meter an Terrain zu gewinnen, zu lachen.

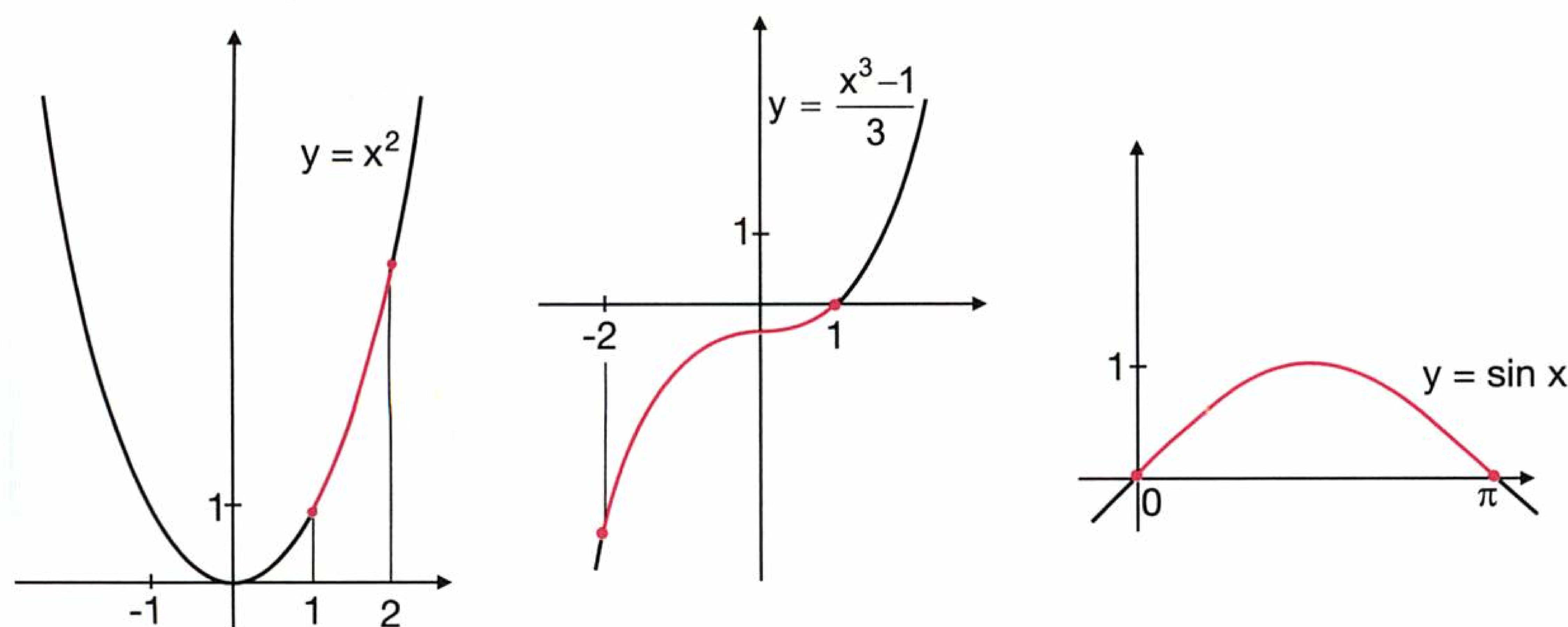


David LIVINGSTONE (1813–1873) wurde als Sohn eines Krämers in Blantyre bei Glasgow geboren. 1840 ging er als Missionar nach Südafrika. 1849 unternahm er seine ersten großen Expeditionen. Durch zahlreiche Forschungsreisen nach Zentral- und Südafrika wurde LIVINGSTONE zu einem der bedeutendsten Entdecker des vorigen Jahrhunderts.

Unermüdlich kämpfte sich die Crew durch dieses unwirtliche Gebiet. Galt es doch, geografische Besonderheiten ebenso zu entdecken, wie damals in Europa unbekannte Fauna und Flora. So war es dann auch einer der schönsten Momente im Leben des Forschers, als sich die tapfere Gruppe vor einer noch nicht entdeckten Gegend fand:

Am 1. August 1849 erreichte die Crew einen riesigen See. Es war LIVINGSTONEs Verdienst, diese Wassermassen erschlossen zu haben, die später unter dem Namen Ngamisee in die Geschichte eingehen sollten. Alle zwei Stunden notierte David LIVINGSTONE auf seiner sich langsam entwickelnden Landkarte markante Punkte und den unmittelbaren Weg zwischen diesen „Stützstellen". Die stille erste Stunde nach Sonnenuntergang benützte er, um sich zu orientieren und die weitere Route festzulegen. Durch Addition der Einzeldistanzen konnte er seine wöchentliche Kilometerleistung überprüfen. Dieses einfache Verfahren, die Gesamtlänge des zurückgelegten Weges durch Addition der Einzelstrecken zu ermitteln, ist der Grundgedanke, der hinter der Berechnung von Bogenlängen steckt.

Werfen wir einen Blick auf die folgenden Graphen:



Bogenlänge von expliziten Funktionen:

Formel (1) für $y = y(x)$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Die Länge des rosa eingezeichnenten Bogens können wir jeweils leicht berechnen, wenn wir die Formel (1) heranziehen.

[1)] recte facere (lat.): gerademachen.

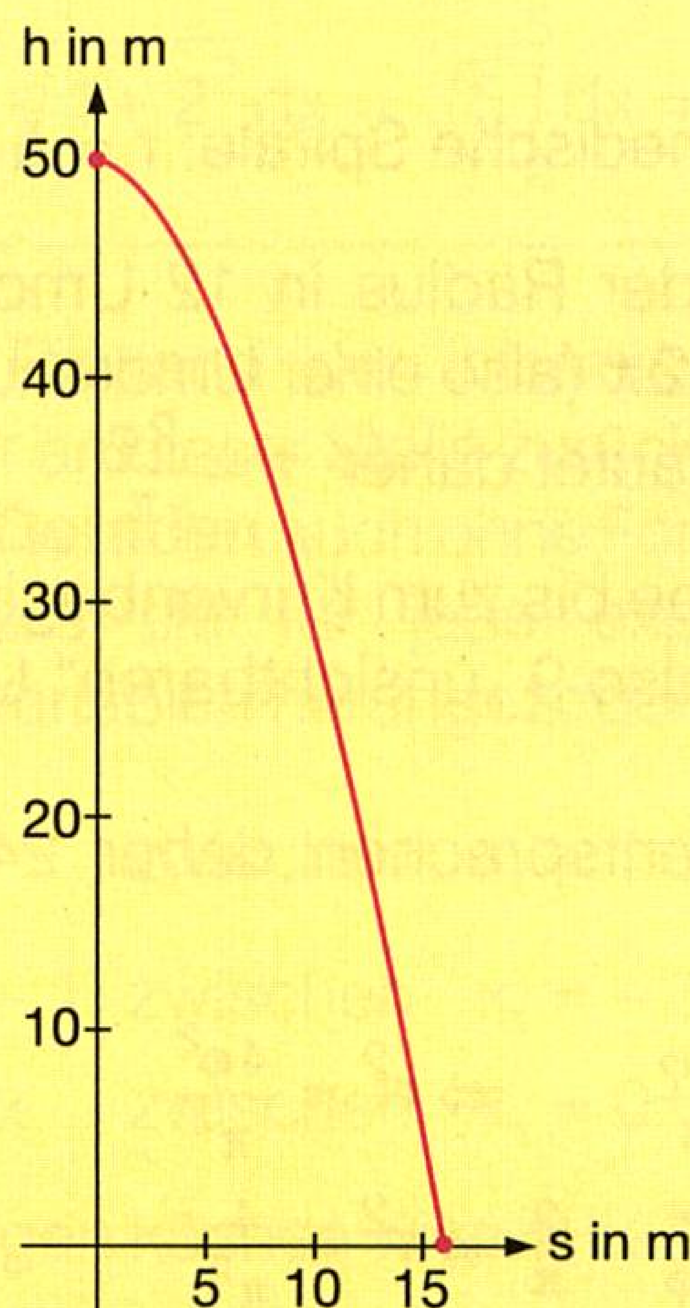
AUFGABEN

266. Es sind die Bogenlängen folgender Kurven im gegebenen Intervall zu berechnen:
a) $y = x^2$, [1,4] **b)** $y = x^3 - 1$, [−2,1] **c)** $y = \sin x$, [0, π]

267. Man berechne die Bogenlänge der Parabel mit **a)** $y = 3x^2$ **b)** $y = 1{,}5\,x^2$ **c)** $y = \frac{x^2}{3}$ von $x_1 = 2$ bis $x_2 = 5$.

268. Es ist der Weg W gesucht, den ein Stück Holz zurücklegt, wenn es die „Niagara Falls" hinabfällt: Höhendifferenz h = 50 m, Flussgeschwindigkeit $v = 5\,\text{ms}^{-1}$

Anleitung: Man berechne zunächst die Fallzeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ und daraus die horizontale Weglänge $s = v \cdot t$. Das Holzstück beschreibt eine Parabel $y = -ax^2 + b$, deren Koeffizienten sich aus s und h berechnen lassen.





Im Grunde genommen bestehen die Niagarafälle aus **zwei** Wasserfällen: den „Horseshoe Falls" auf der kanadischen Seite des Flusses „Niagara River" und den „American Falls". Letztere sind ca. 55 m hoch und 330 m breit. Pro Minute fließen ca. $136 \cdot 10^6$ l Wasser über die Fälle.

269. Gegeben: **a)** $x^2 = 5y^3$ **b)** $x^2 = 2y^3$

Gesucht: Bogenlänge im Intervall [0, 1]

270. Man berechne die Länge des Zykloidenbogens $f: t \mapsto \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \leqslant t < 2\pi$

271. Länge s der logarithmischen Spirale $r = 2e^{\varphi}$ $0 \leqslant \varphi < 2\pi$?

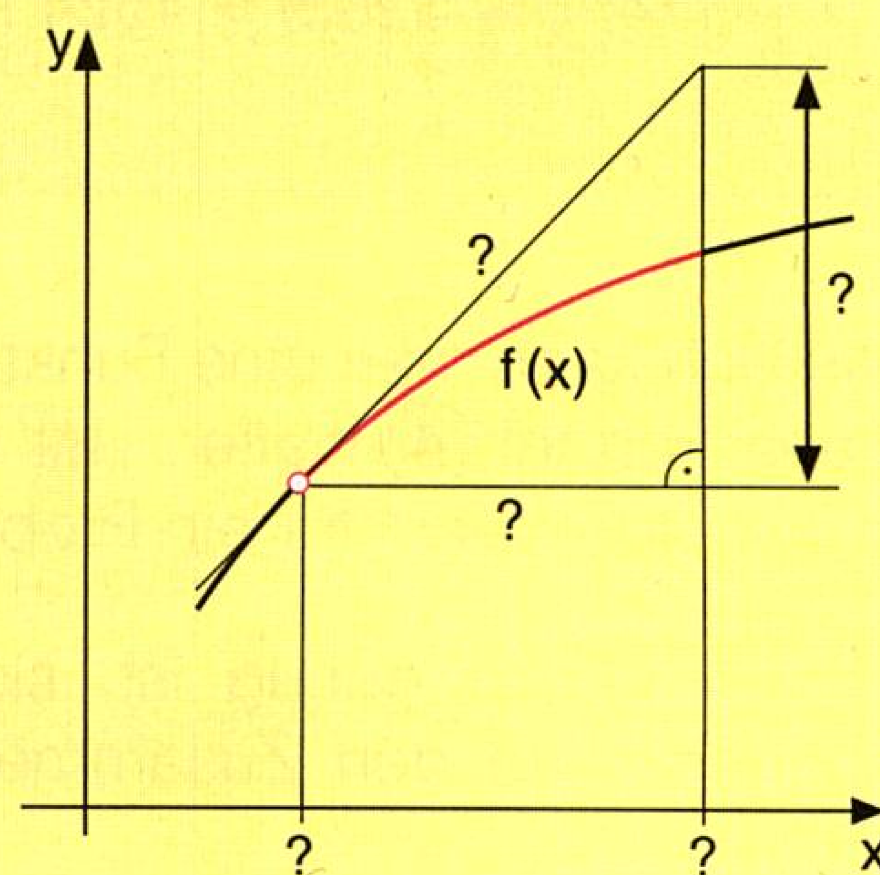
Vermischte Aufgaben

272. **a)** Die Figur ist mit x_1, x_2, dx, dy und ds zu beschriften.

b) ds = ? (Explizite Darstellung!)

c) Mit $s = \int ds$ (Summe der Teilintervalle) ist Formel (1) herzuleiten.

d) Warum muss man über ds integrieren und nicht über dx?



273. **a)** Falls x und y Funktionen einer Variablen t sind, wird $dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt = \dot{x}dt$ und dy = ... Formel (2) ist herzuleiten.

b) Die Formeln (3) und (4) sind aus Formel (2) herzuleiten.

Anleitung: Man bilde zunächst für $r = r(\varphi)$ bzw. $x = x(y)$ die entsprechende Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$.

274. Der Umfang u der Ellipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ist zu berechnen.[1)]

275. Der Bogen der Hyperbel $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ ist zwischen G(2, 0) und $H(4, y_H)$ für $y_H < 0$ zu ermitteln.[1)]

276. Länge s der Kosinuskurve im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?[1)]

277. **Gegeben:** $y = 3 \sin 5x$ **Gesucht:** Bogenlänge in $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.[1)]

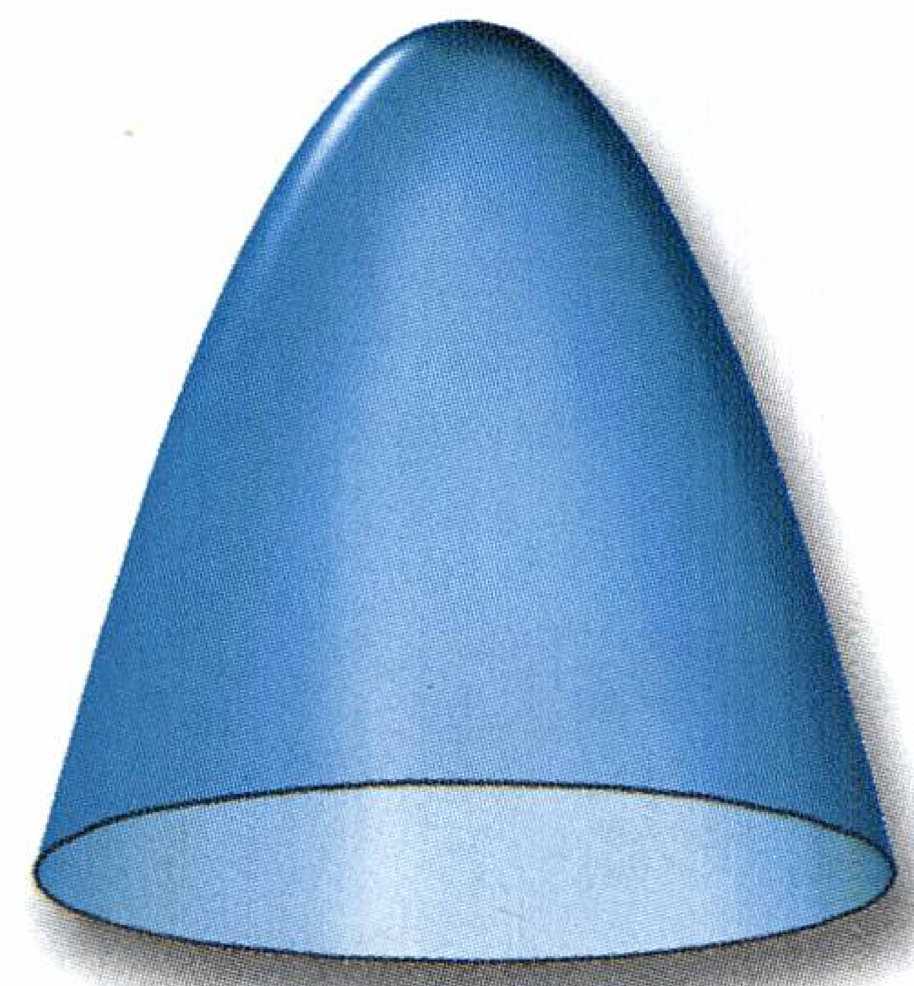
278. **Gegeben:** Astroide (Sternkurve) mit $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9$ **Gesucht:** Graph, Bogenlänge s

279. Es ist die Länge s der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ im Intervall [−1, 1] zu ermitteln.[1)]

1) Es ist die KEPLERsche Fassregel zu verwenden.

6. Inhalt einer Drehfläche (Komplanation)[1)]

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem Inhalt krummer Flächen. Dieser Begriff zählt wohl zu den kompliziertesten, welcher innerhalb der Messung geometrischer Größen auftritt: Man versuche nur einmal — in Gedanken — den Flächeninhalt einer Kugel oder beispielsweise eines Paraboloids „auszumessen". So wird die Leserin / der Leser schon ahnen, dass für die **Definition** dieses Begriffes gehörig viel Hirnschmalz nötig ist. Überlassen wir Amateure das also ruhig den Professionisten.

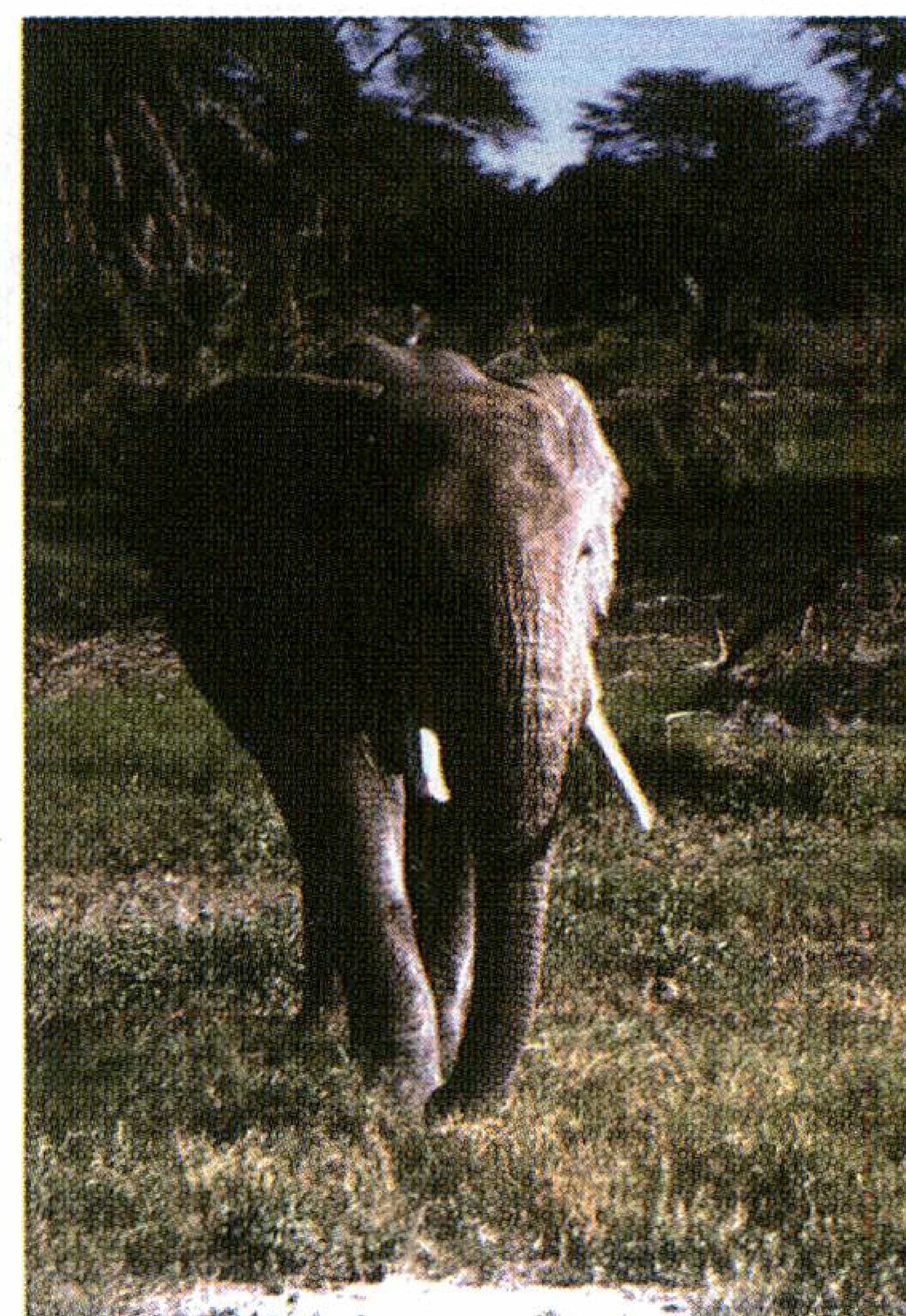


Da Oberflächen aber sehr oft praktische Bedeutung haben, werden wir uns mit der **Inhaltsberechnung** befassen. Beispielsweise spielt das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen bei thermischen Prozessen eine wesentliche Rolle. Ein kleiner Körper mit großer Oberfläche wird in einer kühlen Umgebung rasch Wärme abgeben, bis sich seine Temperatur der Umgebungstemperatur angeglichen hat. Wenn aber diese höher als die Eigentemperatur ist, wird er sich auch rascher erwärmen als ein großvolumiger Körper mit relativ kleiner Oberfläche.

Das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen hängt von der **Körperform** ab: Eine Kugel besitzt die kleinste Oberfläche gegenüber allen anderen volumsgleichen Körpern. Soll ein Körper also **langsam** Wärme aus der Umgebung aufnehmen oder an diese abgeben, muss er eine kugelähnliche Gestalt aufweisen. Hat er hingegen **rasch** Wärme abzugeben oder aufzunehmen, muss seine Oberfläche groß und seine Gestalt daher möglichst „unkugelig" sein. Denken wir doch an Kamine mit großen, sich nach außen wölbenden noppenförmigen Kacheln, denken wir an den rippenförmigen Bau moderner Warmwasser-Radiatoren oder an **Kühlbleche** bei Motoren: All diese Strukturen vergrößern die Oberfläche, an welcher der Wärmeaustausch stattfindet.



Diese Tatsachen sind auch biologisch bedeutsam. Kleine Eidechsen, die wie alle Reptilien wechselwarm sind (d. h. ihre Körpertemperatur hängt von der Umgebungstemperatur ab), werden sich morgens rasch erwärmen. Sie können daher ihre täglichen Aktivitäten früher beginnen als größere Echsen, die sich nur entsprechend langsam erwärmen. Warane, Krokodile oder Riesenschlangen bleiben deshalb auch auf warme, äquatoriale Gebiete beschränkt. Manche Großechsen haben sogar Hautfalten, Hautkämme oder Halskrausen ausgebildet, die ihre Oberfläche vergrößern und so ein rasches Aufwärmen ermöglichen.



Für Warmblütler stellt sich das Problem in entgegengesetzter Weise. Kleinsäuger, wie etwa die **Spitzmaus**, verlieren auf Grund ihrer Kleinheit viel Wärmeenergie über ihre relativ große Körperoberfläche. Das zwingt diese Tiere zu einer fast ununterbrochenen Nahrungsaufnahme (= Energieaufnahme): Eine Spitzmaus frisst pro Tag mehr als ihr eigenes Körpergewicht an Insekten! Großsäuger in den Tropen hingegen haben wiederum überschüssige Wärme, die von ihren Körpern erzeugt wird und entsprechend rasch an die Umgebung abgeführt werden muss. Vor allem die auffallend großen und stark durchbluteten Ohrmuscheln dienen dabei als „Radiatoren".

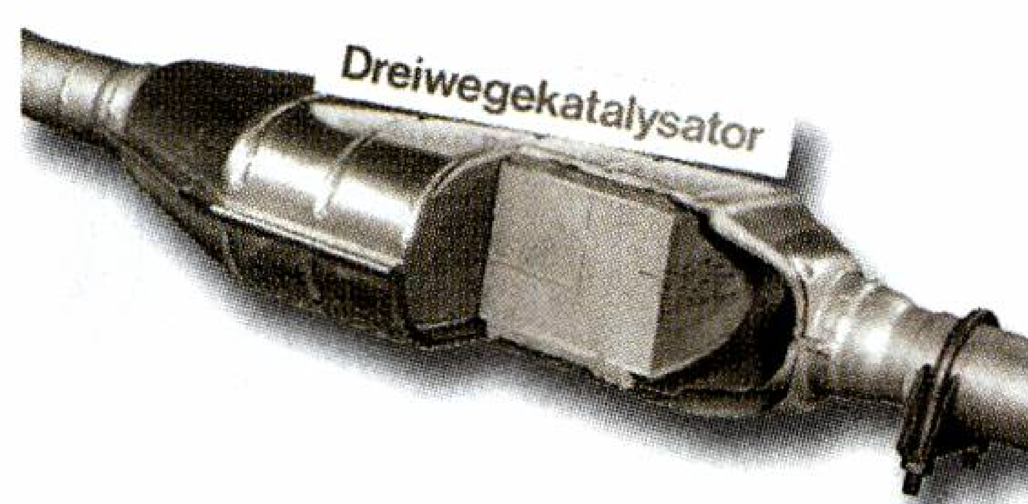
Eindrucksvoll zeigt das der Vergleich eines afrikanischen **Steppenelefanten,** der seine quadratmetergroßen Ohren ständig bewegt und so die Kühlung zusätzlich steigert, mit dem kleinohrigen und dicht behaarten **Mammut,** das noch während der letzten Eiszeit die kalten Taiga- und Tundrengebiete Europas und Asiens bewohnte. Die Berechnung von Oberflächen bei Tieren aber auch bei Pflanzen ist äußerst schwierig.

---

[1]) complanare (lat.): einebnen.

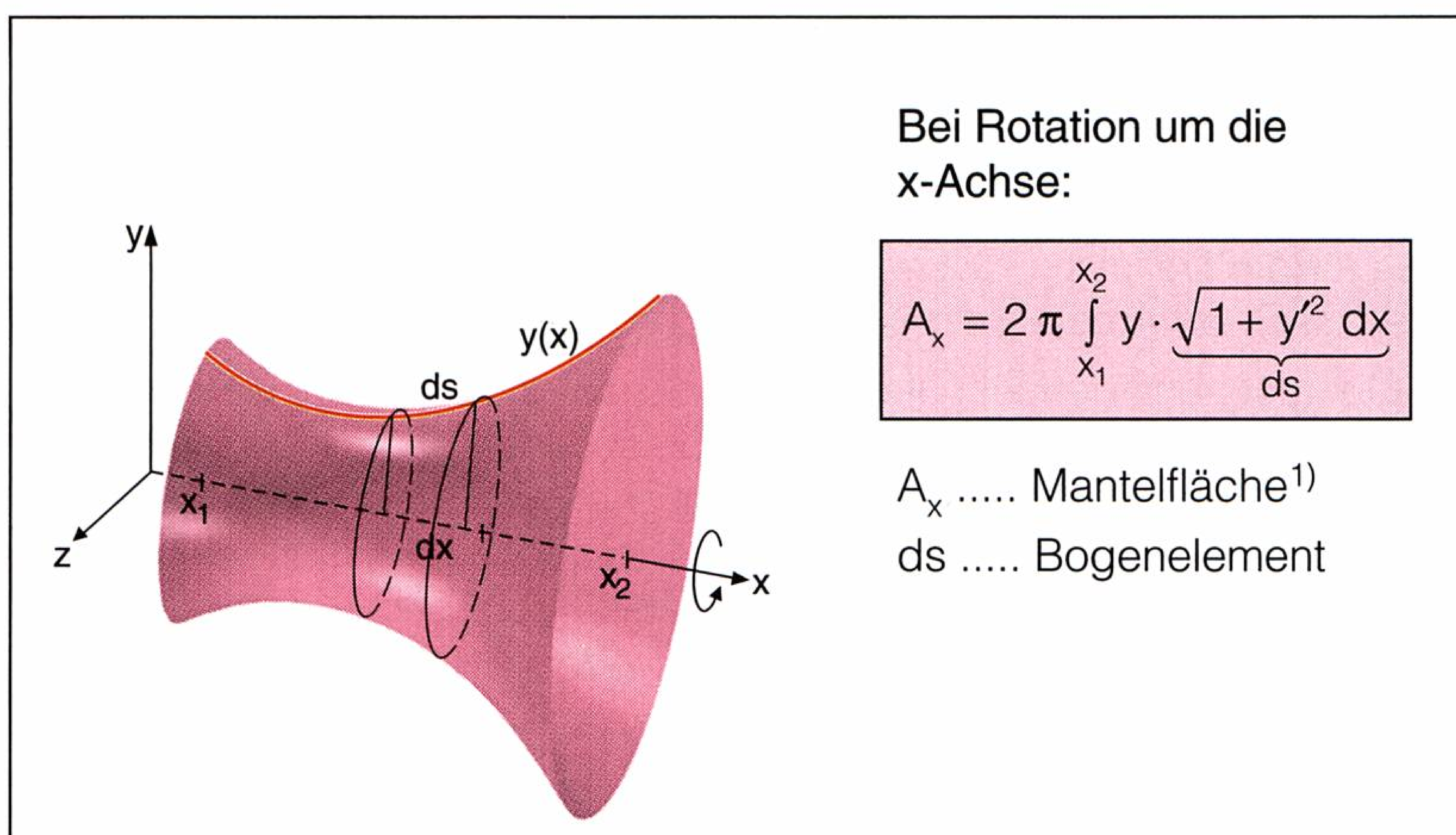
Wir wollen uns auf Drehflächen beschränken, deren Inhalte über folgende einfache Formel ermittelt werden können:

In der Technik treten Oberflächenbestimmungen unter anderem bei der Bestimmung des Wirkungsgrads von Oberflächenkatalysatoren und Wärmetauschern auf.



Dreiwege-Katalysator geschnitten





Bei Rotation um die x-Achse:

$$A_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \underbrace{\sqrt{1+y'^2}\,dx}_{ds}$$

A_x ..... Mantelfläche[1)]
ds ..... Bogenelement

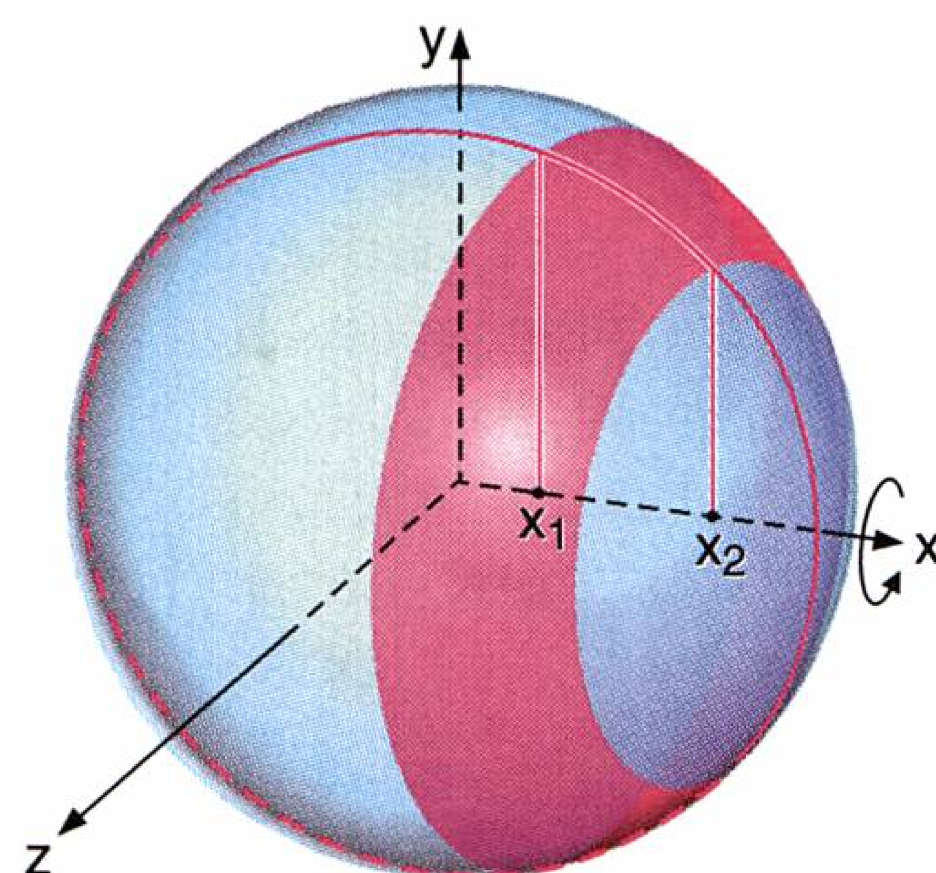
Die Berechnung der Mantelfläche A gliedert sich in folgende drei Abschnitte:

(1) $y' = ?$
(2) Bogenelement ds
(3) $A = ?$

Wir überprüfen nun die Formel, indem wir die Oberfläche einer Kugel berechnen.

Beispiel:
Wie groß ist die Oberfläche O einer Kugel mit dem Radius r ?

Lösung:
Die von der rosa eingezeichneten Relation $x^2 + y^2 = r^2$ begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse.



(1) $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2$
$\Rightarrow 2yy' = -2x$
$\Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$
$\Rightarrow y'^2 = \frac{x^2}{y^2}$

(2) Nun berechnen wir ein Bogenelement ds:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx = \frac{r}{y}\,dx$$

(3) Schließlich setzen wir in die Formel $A_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1+y'^2}\,dx$ ein.

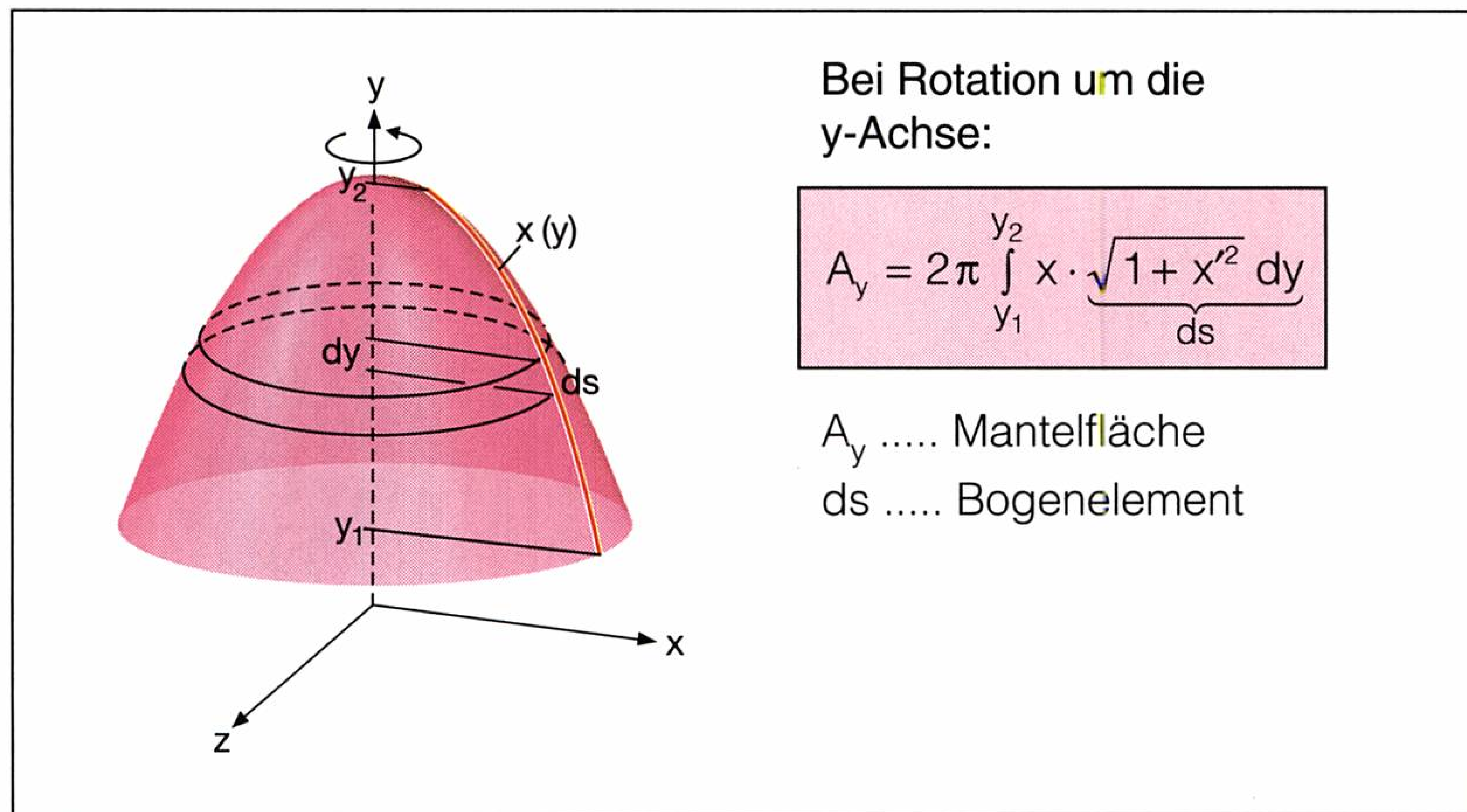
Die Grenzen lauten: $x_1 = -r$, $x_2 = r$

$$A_x = 2\pi \int_{-r}^{r} y \cdot \frac{r}{y}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\,dx = 2\pi[rx]_{-r}^{r} = 2\pi \cdot 2r^2 = 4\pi r^2.$$

Die Oberfläche O der Kugel beträgt daher 4 πr^2.

1) Die Bezeichnung A für einen Mantelflächeninhalt wurde eingeführt, um einer Verwechslung mit den — später zu besprechenden — statischen Momenten M vorzubeugen.

War das letzte Beispiel verständlich? Nur wer es mit Bleistift und Papier „gelesen" hat, sollte ruhigen Gewissens im Text weitergehen. So trivial es auch klingen mag: Übung erwirbt man nicht durch Kennen, sondern durch Können. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, nunmehr die Oberfläche der Kugel zu berechnen, indem man die von der Relation $x^2 + y^2 = r^2$ begrenzte Fläche um die **y-Achse** rotieren lässt. Die Formel, die hiefür benötigt wird, lautet:



Bei Rotation um die y-Achse:

$$A_y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \cdot \underbrace{\sqrt{1 + x'^2}\, dy}_{ds}$$

A_y ..... Mantelfläche
ds ..... Bogenelement



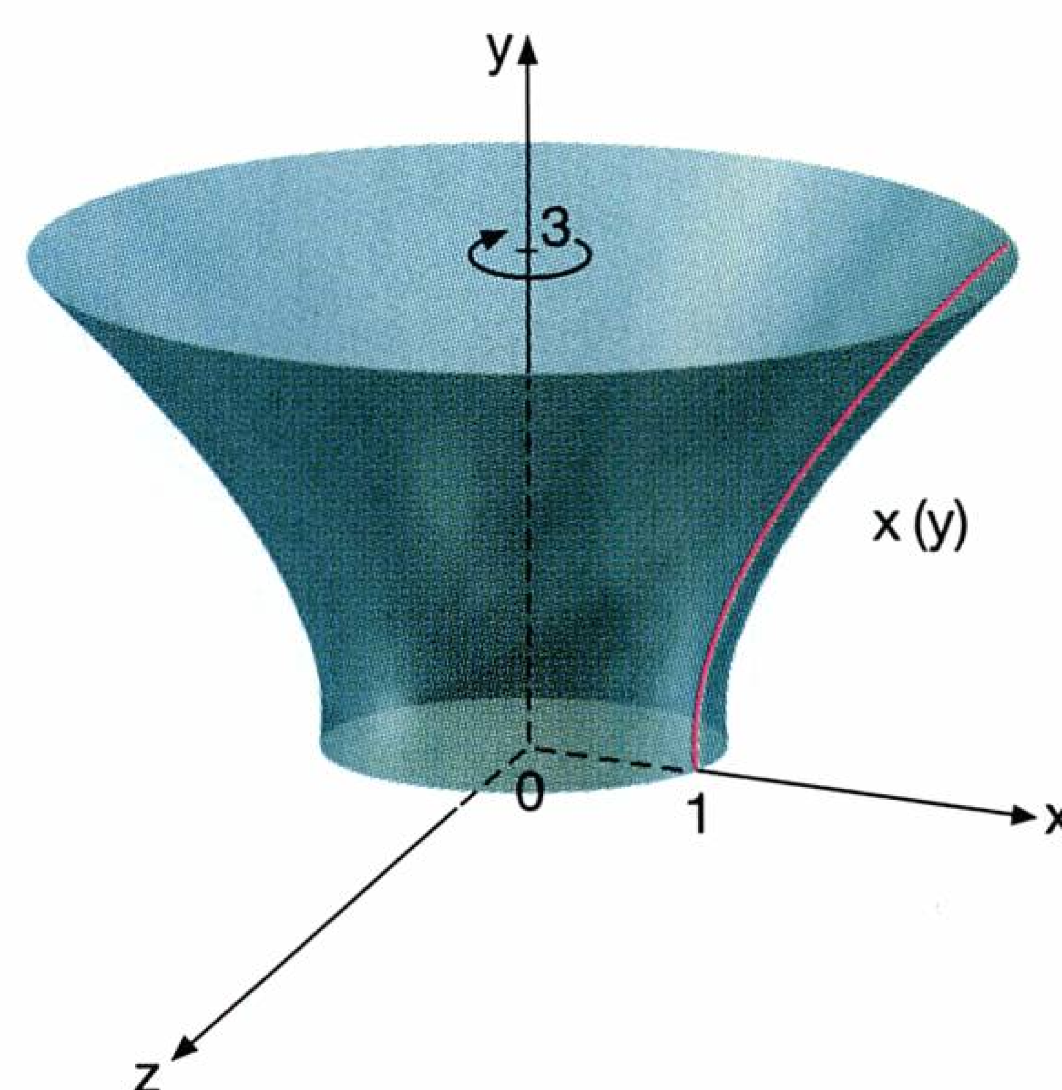
Nicht nur die gebogenen Zähne von Dracula, sondern auch sein Mantel kann mit Hilfe der nebenstehenden Formel berechnet werden.

Beispiel:
Die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ rotiert im Intervall von $y_1 = 0$ bis $y_2 = 3$ um die y-Achse. Mantelfläche A_y ?

Lösung:

(1) $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1 + y^2}$

$$x' = \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow x'^2 = \frac{y^2}{1+y^2}$$



(2) Auch hier empfiehlt es sich aus Gründen der Übersicht zunächst das Bogenelement $dx = \sqrt{1 + x'^2}dy$ zu berechnen:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{y^2}{1+y^2}}\, dy = \sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}}\, dy$$

(3) Nun setzen wir diesen Ausdruck in die Formel

$A_y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + x'^2}\, dy$ ein:

$$A_y = 2\pi \int_0^3 \sqrt{1+y^2}\sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}}\, dy = 2\pi \int_0^3 \sqrt{1+2y^2}\, dy = 2\pi \int_0^3 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + y^2}\, dy = 2\sqrt{2}\,\pi \int_0^3 \sqrt{\tfrac{1}{2} + y^2}\, dy$$

Diese Umformung ist notwendig, damit wir mit $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \cdot \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|\right] + C$ (vgl. Seite **109**) das Integral berechnen können, wobei $a^2 = \frac{1}{2}$ gilt und die Variable y heißt.

So erhalten wir:

$$A_y = \sqrt{2}\pi\left[y\sqrt{\tfrac{1}{2} + y^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left|y + \sqrt{\tfrac{1}{2} + y^2}\right|\right]_0^3 = \sqrt{2}\,\pi(10{,}149 + 0{,}173) = 45{,}862$$

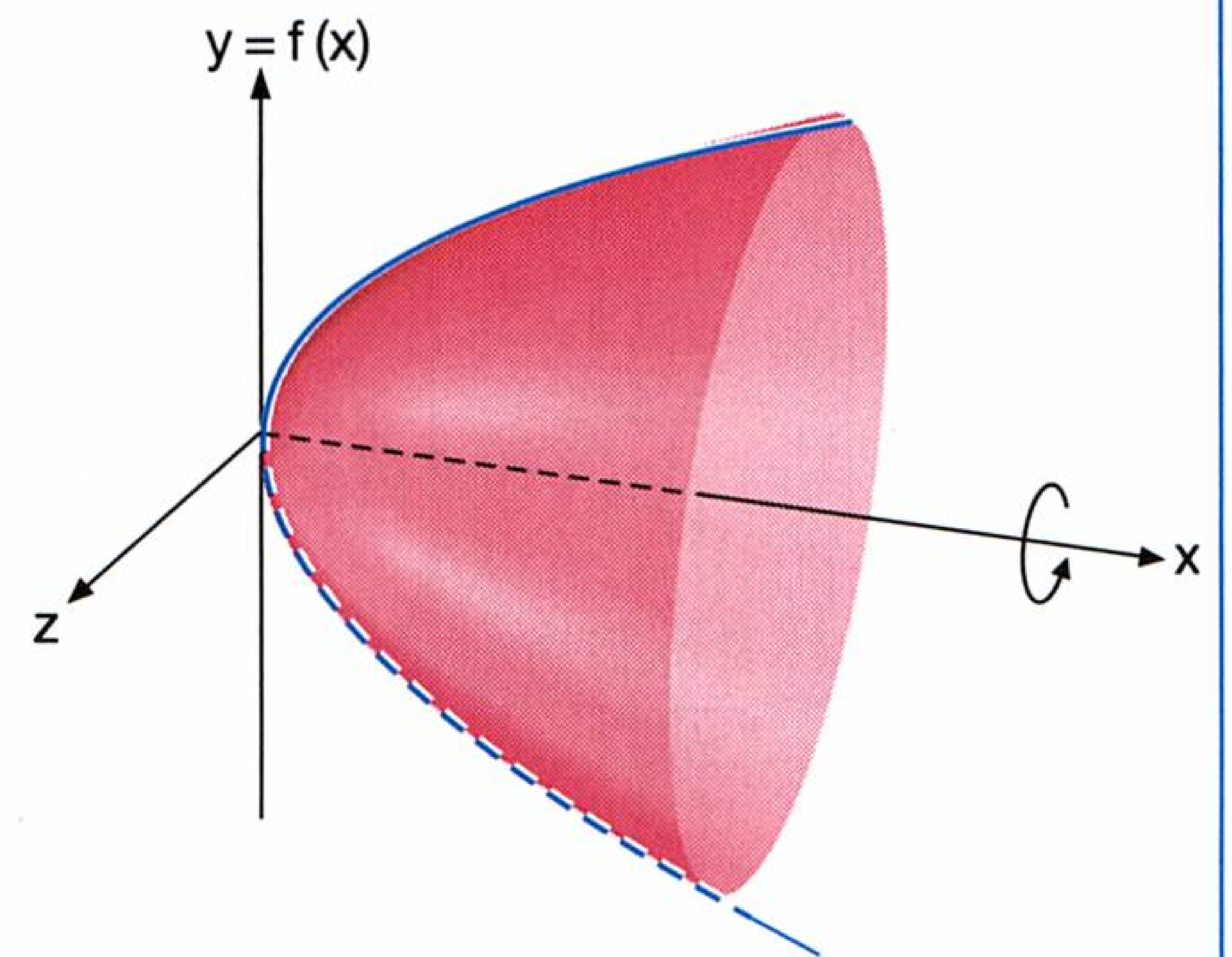
A_y **= 45,86 FE**

Beispiel:
Es sind die Mantelflächen A_x, A_y zu berechnen, die entstehen, wenn die Parabel $y^2 = 2x$ um **a)** die x-Achse zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ **b)** die y-Achse zwischen $y_1 = 1$ und $y_2 = 2$ rotiert.

Lösung:

a) (1) $y^2 = 2x \Leftrightarrow y = \sqrt{2x}$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \Rightarrow y'^2 = \frac{1}{2x}$$



(2) Wir berechnen zunächst $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx = \sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx$$

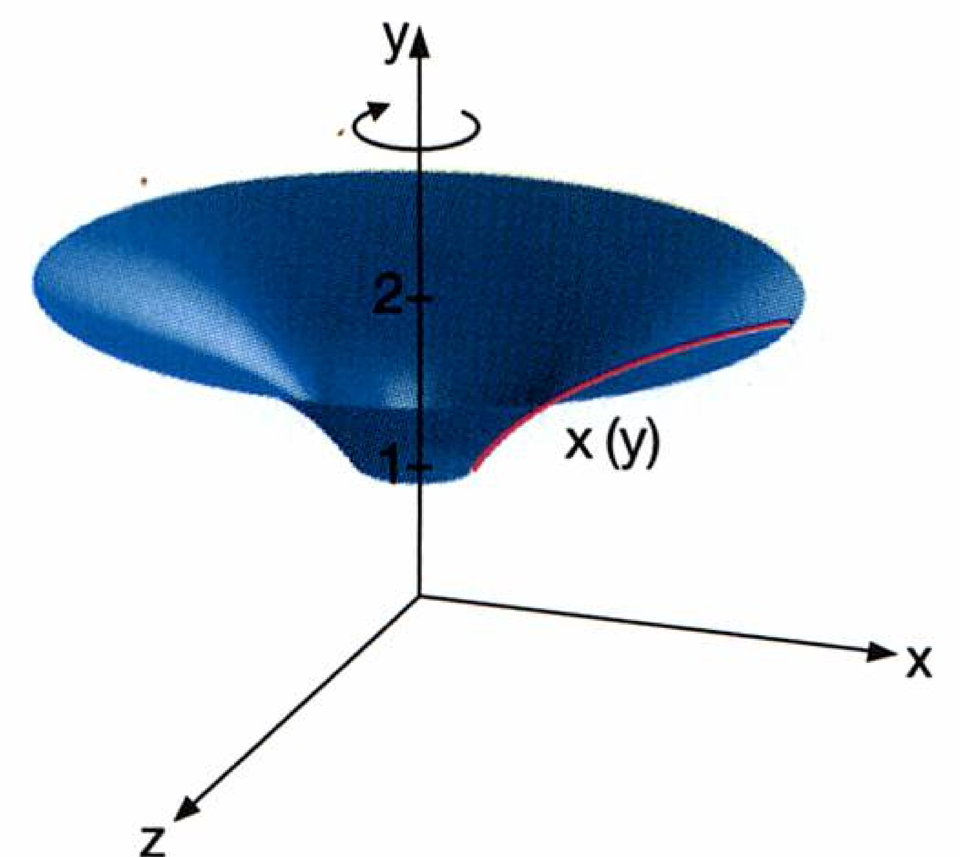
Es wird in $A_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ eingesetzt:

(3) $$A_x = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = 2\pi\left[\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right]_0^4 = \frac{2\pi}{3}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2\pi}{3}(27-1) =$$

$$= \frac{52\pi}{3} = 54{,}454$$ **$A_x = 54{,}45$ FE**

b) (1) $y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}$

$$\Rightarrow x' = y \Rightarrow x'^2 = y^2$$



(2) Mit $ds = \sqrt{1 + x'^2}\,dy$ folgt:

$ds = \sqrt{1 + y^2}\,dy$ und mit $A_y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + x'^2}\,dy$ gilt weiters:

(3) $$A_y = 2\pi \int_1^2 \frac{y^2}{2}\sqrt{1 + y^2}\,dy = \pi \int_1^2 y^2\sqrt{1 + y^2}\,dy$$

Dieses Integral ist zwar lösbar, die Sache ist jedoch recht aufwendig. Wir verwenden daher die KEPLERsche Fassregel.

$$A_y = \frac{\pi}{6} \cdot \left(\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} + 4 \cdot \sqrt{5}\right) = 13{,}919$$ **$A_y = 13{,}92$ FE**

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist im Falle von analytisch nicht lösbaren Integralen[1]) die KEPLERsche Fassregel anzuwenden.

280. Wie groß ist die Mantelfläche A des Körpers, der bei Rotation des Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ zwischen den Grenzen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ um die x-Achse entsteht?

281. Man berechne die Mantelfläche A des bei Rotation der Graphen von **a)** $y = 2x^2$ in [1, 3] **b)** $y = 5x^2$ in [0, 2] **c)** $y = \frac{1}{2}x^2$ in [2, 4] um die x-Achse entstehenden Drehkörpers.

282. Man berechne die Oberfläche O des bei Rotation des Graphen von $y = \sin x$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers zwischen den Grenzen 0 und π.

283. Die Kurve $y = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ rotiert im Intervall [1, 4] um die x-Achse. Mantelfläche A?

[1]) Man sagt auch: „Das Integral ist geschlossen integrierbar“, um auszudrücken, dass das Integral analytisch lösbar ist.

284. Man bestimme die Mantelfläche A des Körpers, der bei Rotation des Graphen von

a) $y^2 = x^3 + 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ **b)** $y = \cos x$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}5$ **c)** $y = \ln x$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$ um die y-Achse entsteht.

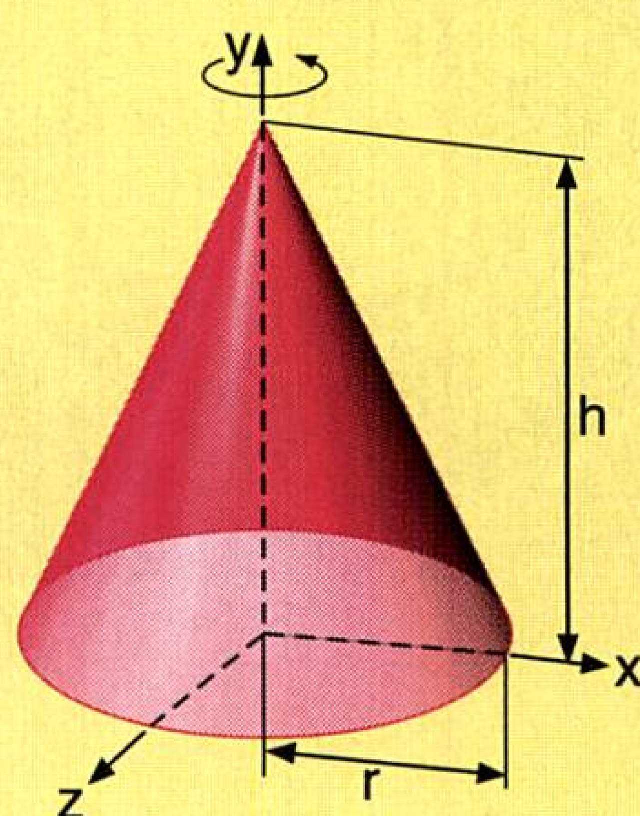
285. Der Funktionsgraph von $y = e^x$ rotiert zwischen $y_1 = 1$ und $y_2 = e^3$ um die y-Achse. Wie groß ist die Mantelfläche A?

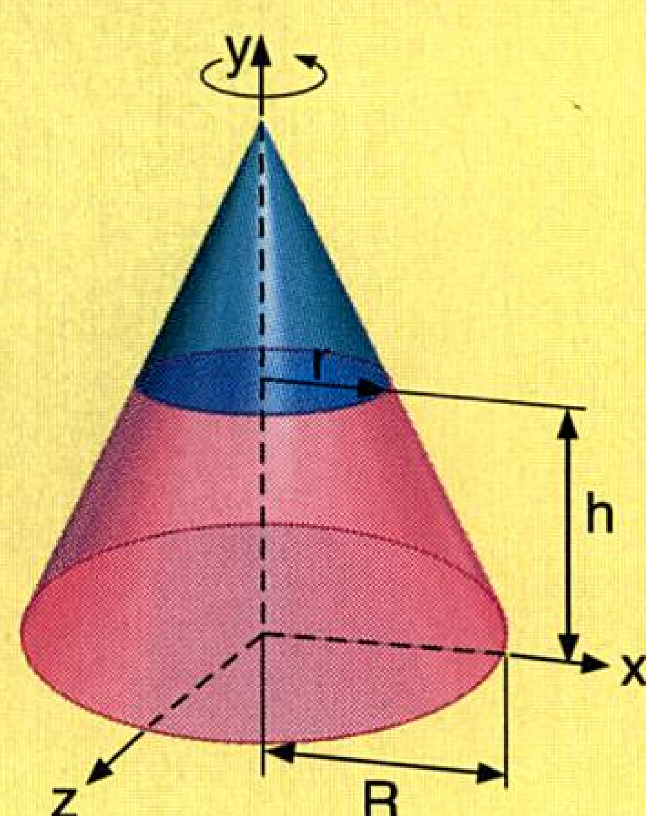
286. Die Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ rotiert **a)** um die x-Achse **b)** um die y-Achse. Oberflächen O_x, O_y?

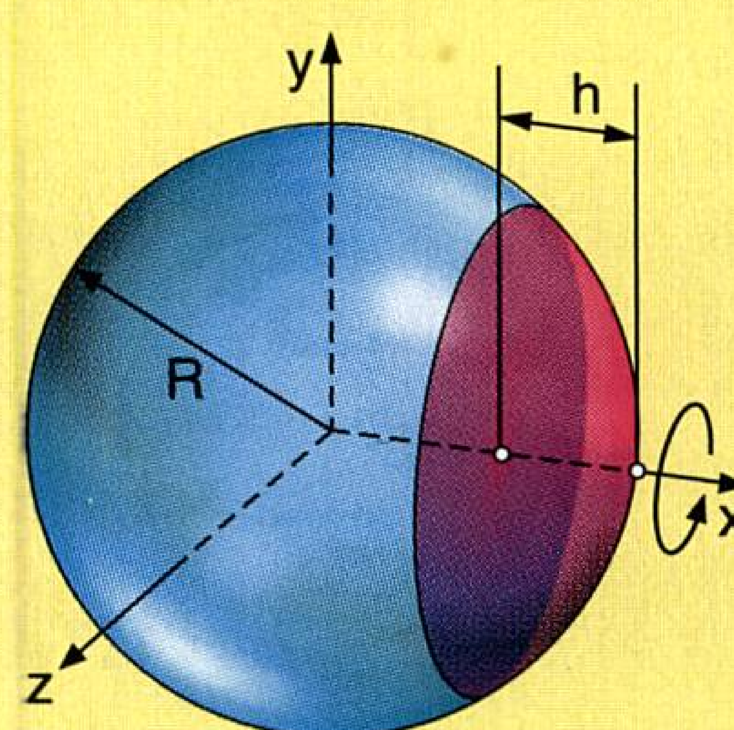
Vermischte Aufgaben

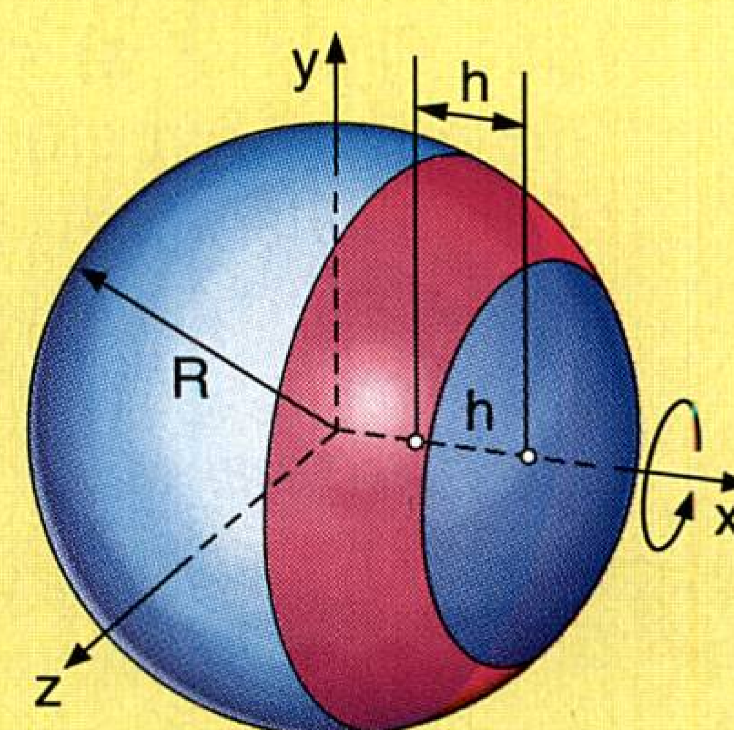
287. Es sind die Formeln für die Mantelflächen A von

a) einem Kegel **b)** einem Kegelstumpf **c)** einem Kugelabschnitt **d)** einer Kugelzone









$A = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$ $A = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$ $A = 2\pi Rh$ $A = 2\pi Rh$

zu überprüfen.

288. Die kubische Parabel mit $y = x^3$ rotiert um die x-Achse. Es ist die Mantelfläche A zwischen den Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ zu bestimmen.

289. **a)** Bei der Herleitung der Formel für die Bogenlänge einer Kurve haben wir diese durch einen Sehnenzug ersetzt. Wodurch können wir uns einen Körper, der durch Rotation einer Funktion um die x-Achse entsteht, ersetzt denken?

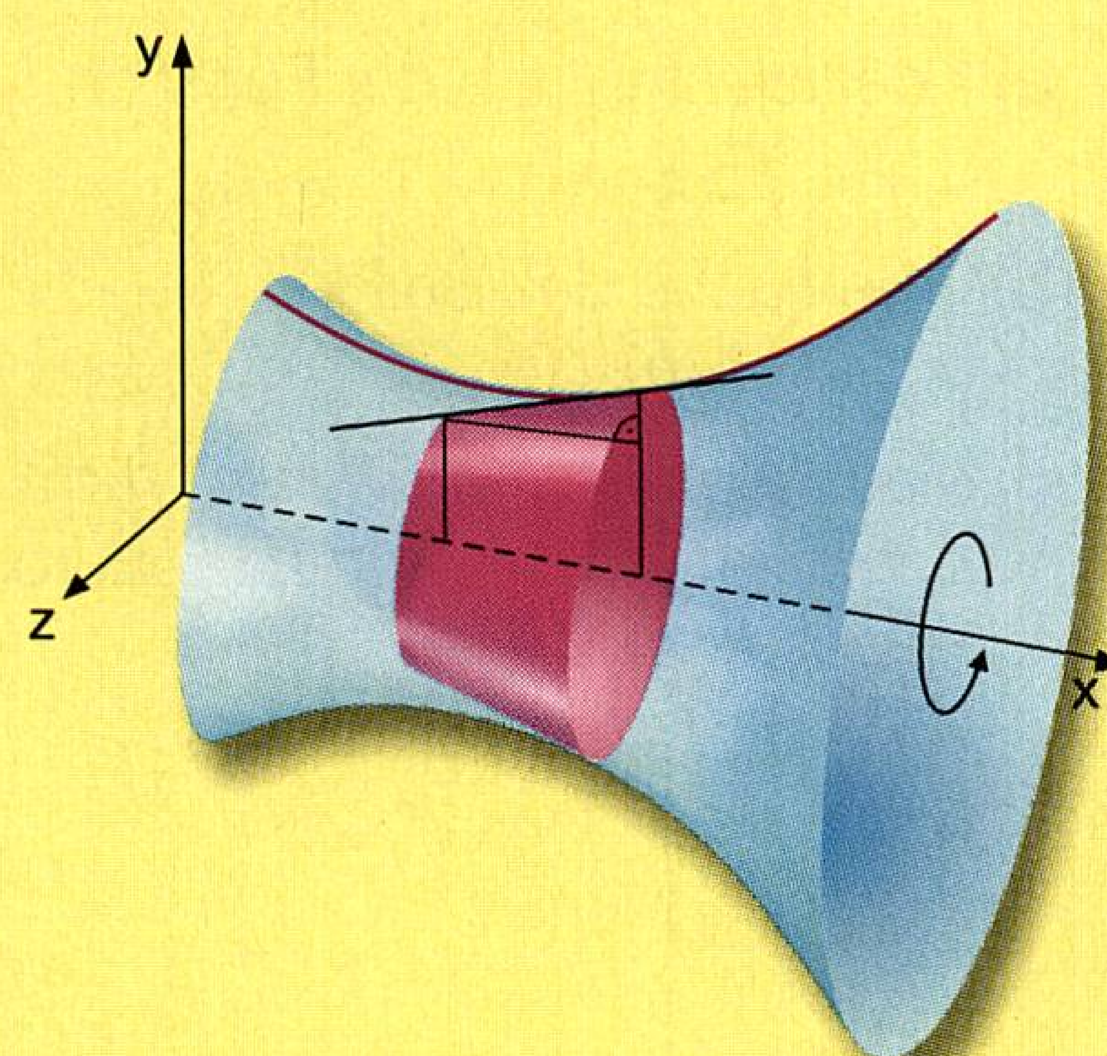
b) Wie lautet die Formel für die Mantelfläche A dieser Körper?

c) Man beschrifte die Figur mit x_1, x_2, y, dx, dy, ds und dA.

d) Wie groß ist daher ein Mantelelement dA?

e) Man leite nun die Formel $A_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ her.

f) Warum darf man nicht, wie bei der Volumsberechnung von Rotationskörpern, eine Unterteilung in **Elementarzylinder** vornehmen?



290. **a)** Angenommen, eine Funktion $y = f(x)$ ist in Parameterform gegeben. Was wird in diesem Fall aus ds und dx im Hinblick auf $A_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$? Wie lautet also die Formel für A_x?

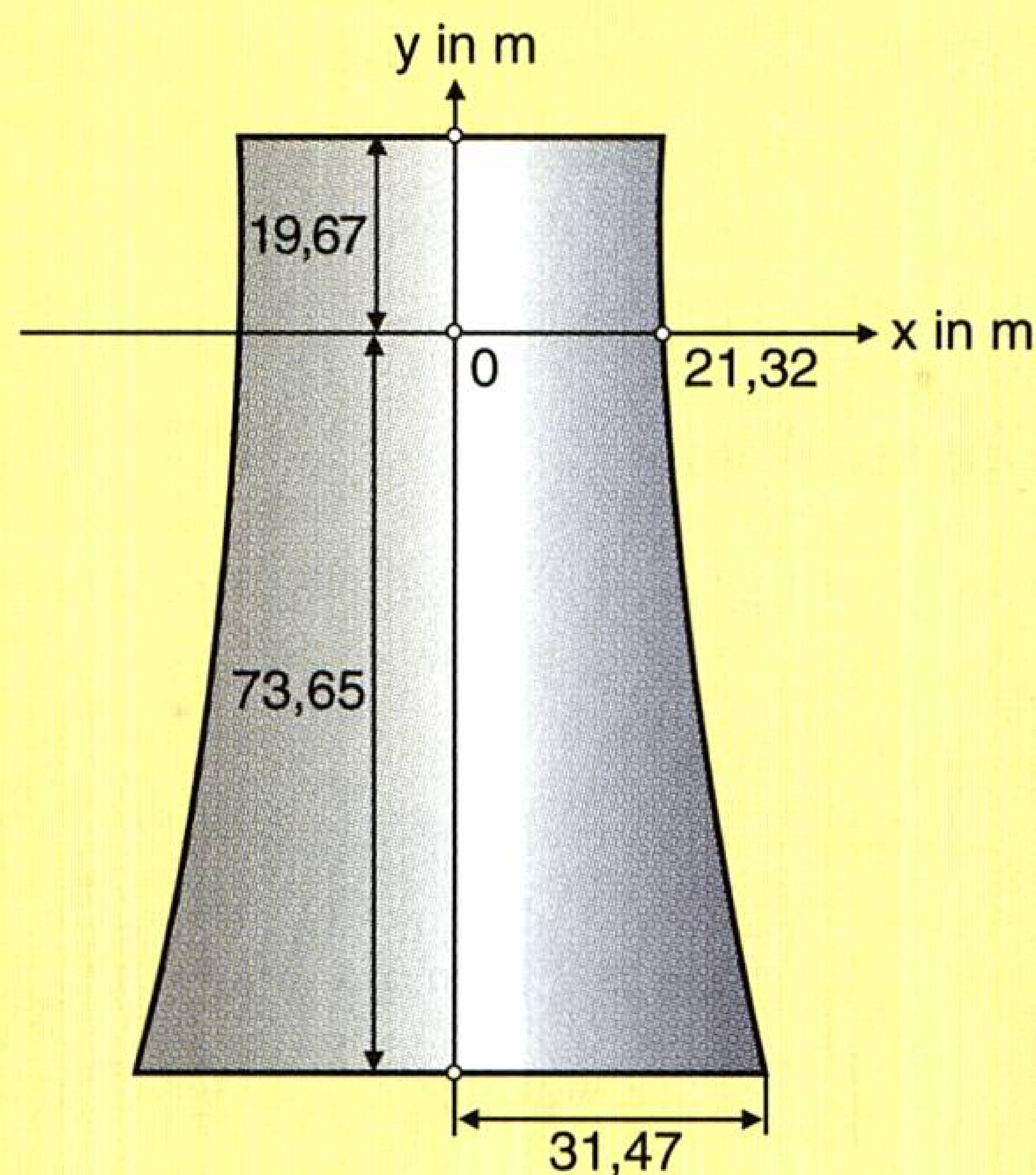
b) Man überprüfe das Ergebnis für $\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$! Was erwarten wir?

291. Der Graph der Funktion **a)** f: $t \mapsto \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ **b)** f: $t \mapsto \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sin t \end{cases}$ rotiert um die x-Achse. Mantelfläche A der entstehenden Rotationskörper für **a)** $t \in [0, 2\pi]$ bzw **b)** $t \in [0, \pi]$?

Anleitung zu b): Es ist zuerst $y = f(x)$ zu berechnen!

292. Der Nasskühlturm des steirischen Dampfkraftwerks Voitsberg 3 lässt sich durch Rotation einer Hyperbel um die Symmetrieachse des Bauwerkes entstanden denken.

Mit Hilfe der nebenstehenden Figur ist **a)** die Gleichung der Hyperbel **b)** die Oberfläche des Turmes **c)** die zum Bau notwendige Betonmenge (durchschnittliche Schalendicke: 17 cm) zu ermitteln.





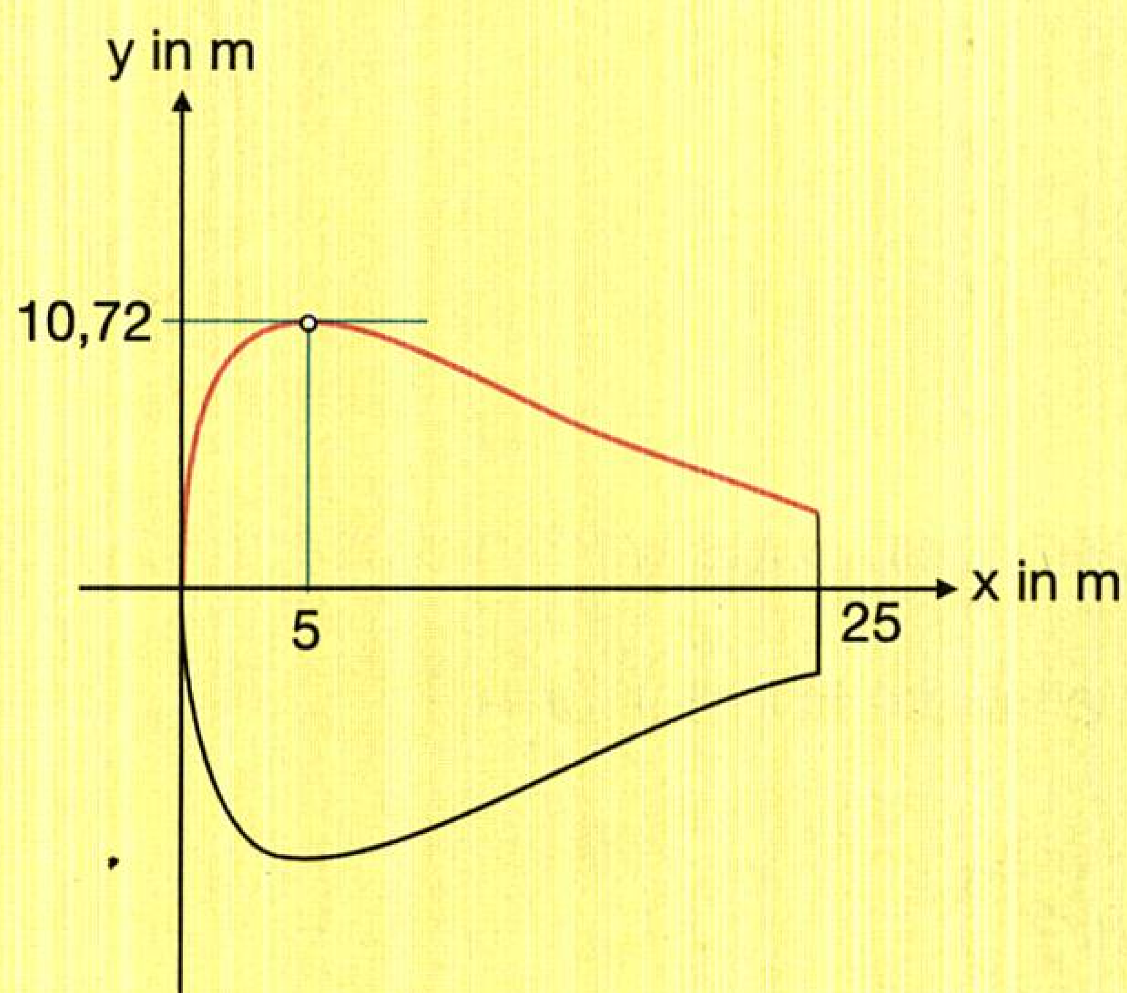
293. Der rechts dargestellte Ballon lässt sich durch Rotation der Funktion mit der Gleichung $y = a\sqrt{bx} \cdot e^{-bx}$ um die x-Achse entstanden denken.

Unter Verwendung der in der nachstehenden Figur gegebenen Daten ist zu ermitteln:

a) Koeffizienten a, b der Funktion $y = a\sqrt{bx} \cdot e^{-bx}$

b) Oberfläche des Ballons ($x_1 = 0{,}1$ m)

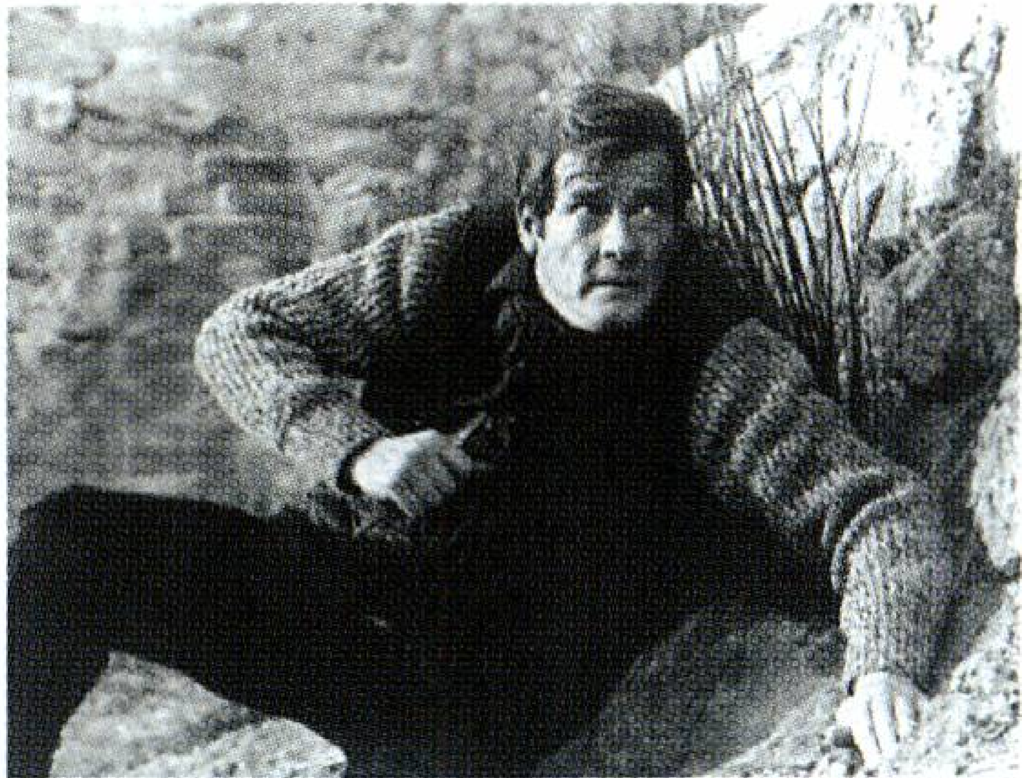
c) Materialpreis, wenn ein 1 m² beschichtetes Nylon 6,– Euro kostet. ($x_1 = 0{,}1$ m)





7. Schwerpunkt und statische Momente

„Mit meinem rechten Fuß trete ich das Gaspedal des Wagens selbst dann noch durch, als ich den Tunnel verlassen habe und vor mir die schlecht befestigte Landstraße liegt. Das grelle Sonnenlicht durchdringt die getönten Scheiben meines schlitternden, weißen Mercedes — und dann sehe ich ihn: James Bond steht vielleicht 50 m von mir entfernt, in der Mitte der Straße, breitbeinig; seine Hände umklammern die Handfeuerwaffe, mit der er auf mich zielt. Der erste Schuß peitscht durch die Windschutzscheibe. Einen Sekundenbruchteil danach übertönen zwei weitere, gezielte Schüsse das Motorengeräusch. In meiner Schulter fühle ich eine betäubende Explosion. Ich kann das Fahrzeug nicht länger steuern. Beinahe im Zeitlupentempo dreht sich der PKW mehrmals um die eigene Achse, schleudert gegen die Absperrung, durchbricht sie — und kommt halb über dem Abgrund hängend zum Stillstand. Wie gebannt erkenne ich tief unter mir das Meer, durchzogen von feinen, weißen Schattierungen. Mein Verstand ist kristallklar, als mir bewußt wird, daß mein Fahrzeug jeden Augenblick die Klippen hinunterstürzen kann. Ich spüre, wie sich ein weiterer Stein löst und die Schweißtropfen auf meiner Stirn immer zahlreicher werden, „Wo hat dieser verdammte Wagen seinen Schwerpunkt?“, fragte ich mich, um im nächsten Moment meinen Körper in einer instinktiven Reaktion meines Lebenswillens gegen die Tür des Fahrzeugs zu werfen. Doch diese Gewichtsverlagerung kommt zu spät, die eiserne Faust der Schwerkraft packt mich und ich stürze in eine ferne, drohende Finsternis ...“ [1)]

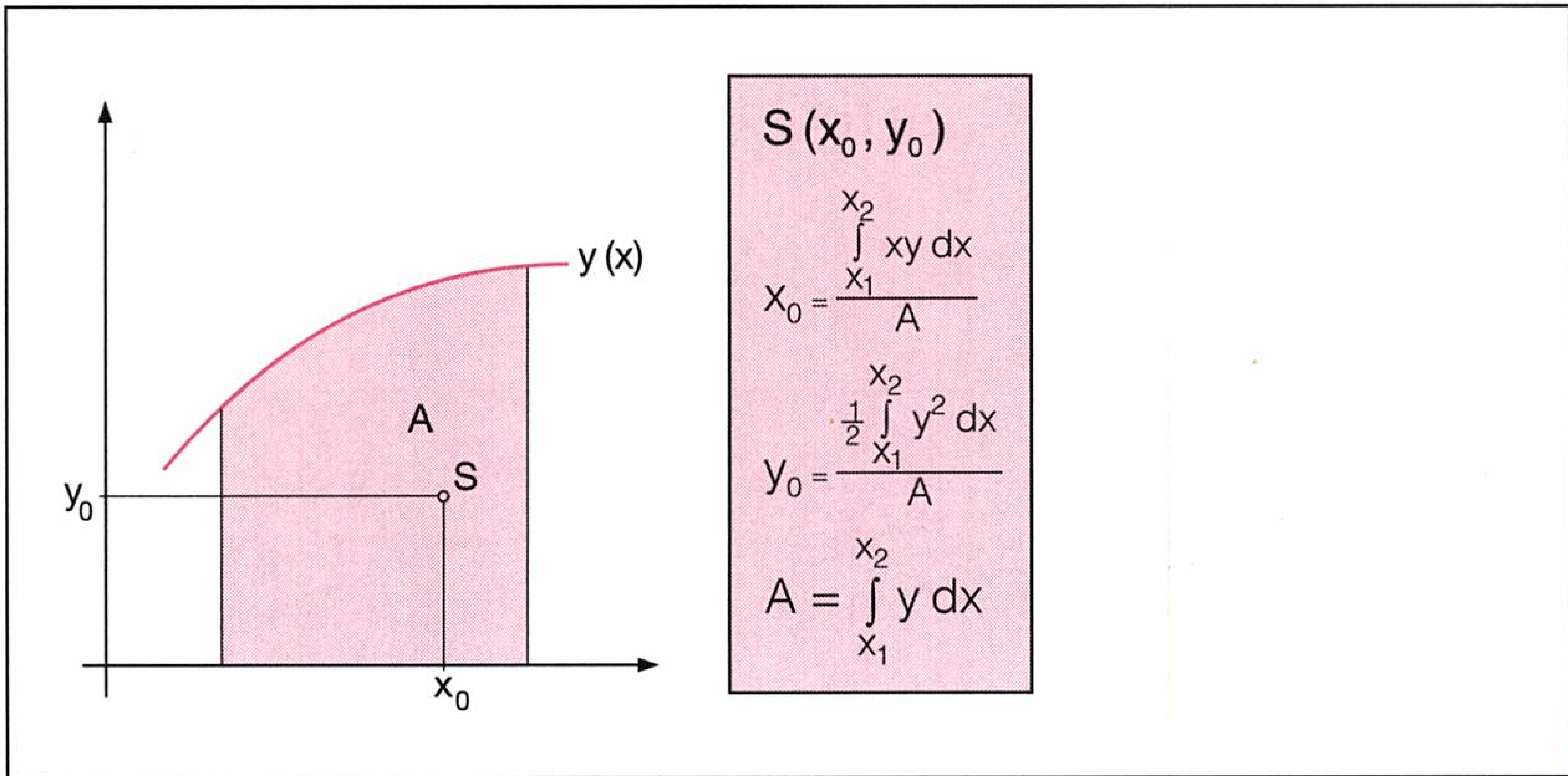


Liegt der Schwerpunkt über der Kippkante, stürzt das Auto mit 007s Gegenspieler ab.

7.1 Schwerpunkt und statische Momente von Flächen

Das Schicksal von Bonds Gegenspieler hängt also von der Lage des Schwerpunkts ab. Wie wir sehen, kann dieses Wissen sogar lebenswichtig sein. James Bonds Gegenspieler hätte, sofern ihm einschlägige Bücher zur Verfügung gestanden wären, die entsprechenden Formeln nachgeschlagen. Hier sind sie:

Flächen haben keine Masse. Und dennoch ordnen wir Flächen einen Schwerpunkt zu? Letzteres ist lediglich dann vernünftig, wenn wir uns die Fläche gleichmäßig mit „Masse belegt“ vorstellen. Unter diesem Gesichtspunkt ist der Begriff „Flächenschwerpunkt“ durchaus sinnvoll.



Dem Bösewicht im James-Bond-Film nützt es in der oben beschriebenen Situation nichts, wenn er diese Formeln kennt. Er wäre mit ihnen (und mit seinem Fahrzeug) im wahrsten Sinne des Wortes abgestürzt — **denn diese Formeln beziehen sich auf Flächen!**

Wer es nicht erwarten kann, der sei einstweilen auf später vertröstet. Erst im Abschnitt „7.4 Drehkörper“ kommen wir — wie die Kapitelüberschrift treffend informiert — auf Körper zu sprechen.

[1)] Aus „James Bond und seine Gegenspieler“ von A. B. Battle.



DIN-Formate sind genormte Papierformate, deren Seiten sich wie $1:\sqrt{2}$ verhalten. So hat ein A4-Blatt die Abmessungen 210 mm × 297 mm.

Beispiel:

Gesucht ist der Schwerpunkt eines A4-Blattes.

Lösung:

Bereits Volksschüler wissen, an welcher Stelle sie ein A4-Blatt mit dem Zeige- oder Mittelfinger unterstützen müssen, wenn das A4-Blatt nicht fallen soll. Wir wollen das als bekannt vorauszusetzende Ergebnis rechnerisch überprüfen:

$y = 210$ (konstante Funktion)

$x_1 = 0,\ x_2 = 297$

$$A = \int_0^{297} 210\,dx = [210x]_0^{297} = 62370$$

$$\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx = \int_0^{297} 210x\,dx = \left[105x^2\right]_0^{297} = 9261945$$

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = 22050\int_0^{297} dx = 22050\,[x]_0^{297} = 6548850$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{9261945}{62370} = 148{,}5 \quad y_0 = \frac{6548850}{62370} = 105 \Rightarrow \mathbf{S\,(148{,}5,\ 105)}$$

Definition:

Unter dem **statischen Moment** eines Massenpunkts in Bezug auf eine Achse oder Ebene versteht man das Produkt aus der Masse m und ihrem mit Vorzeichen versehenen Abstand ℓ von der Achse oder Ebene.

Wer möchte Physik im Mathematikbuch finden? Alle, die sich das wünschen, sind eingeladen, die Definition in der Außenspalte zu lesen. (Um sie anschließend gleich ein zweites Mal zu lesen, damit die exakte Formulierung besonders gut im Gedächtnis haften bleibt!)

Für die „Nichtphysiker" und für das Verständnis der weiteren Ausführungen genügt es, folgendes zu wissen:

Die während der Berechnung auftretenden Integrale $\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx$ bzw. $\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$ haben eigene Namen: sie heißen **statische Momente**.

Genauer:

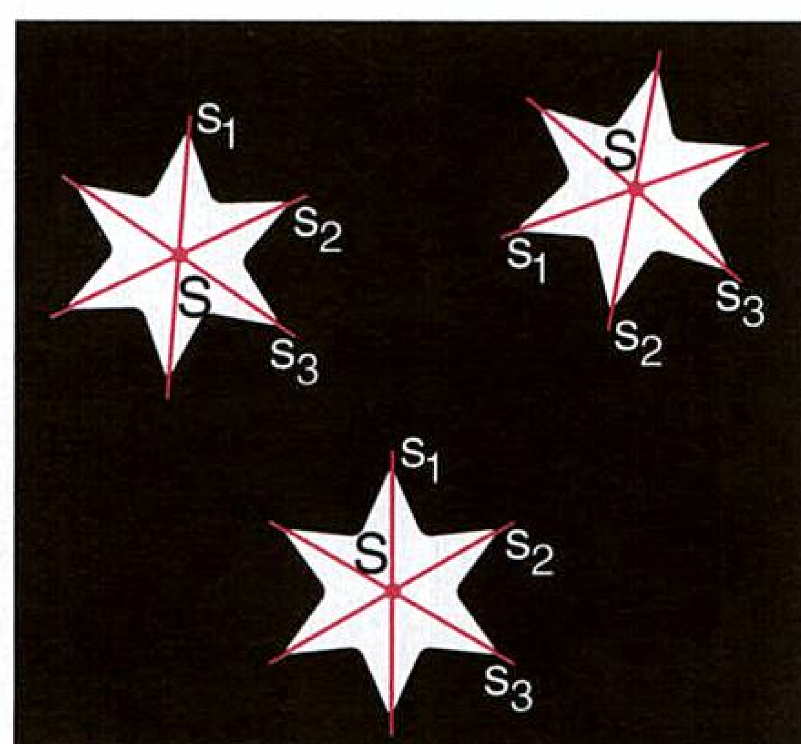
x_0 ..... Abstand zur y-Achse $\Leftrightarrow$ $\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx$ ..... statisches Moment bezüglich der y-Achse.

y_0 ..... Abstand zur x-Achse $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$ ..... statisches Moment bezüglich der x-Achse.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$$

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} xy\,dx$$

$$x_0 = \frac{M_y}{A} \quad y_0 = \frac{M_x}{A}$$



Hat eine Figur eine Symmetrieachse s, so ist $S \in s$, hat sie mindestens zwei (s_1 und s_2), so ist $s_1 \cap s_2 = \{S\}$.

Beispiel:

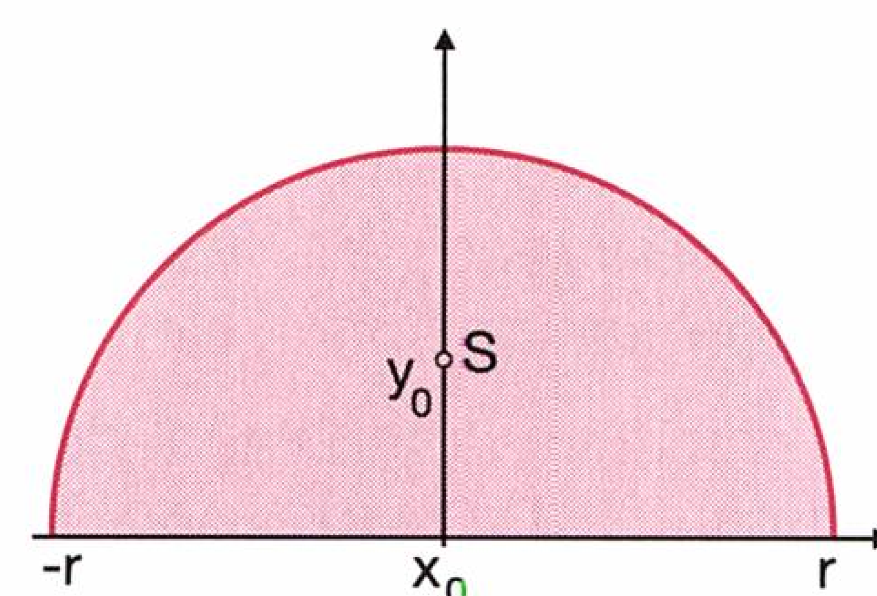
Man berechne die statischen Momente bezüglich der x-bzw. y-Achse und den Schwerpunkt eines Halbkreises, der durch $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ gegeben ist.

Lösung:

Zunächst werfen wir einen Blick in die Außenspalte. Dort wird der Zusammenhang von Symmetrie und Schwerpunktslage erläutert.

Für unseren Fall heißt das: $x_0 = 0$

$$A = \frac{r^2\pi}{2} \text{ und mit } x_0 = 0 = \frac{M_y}{A} \Rightarrow M_y = 0$$



$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} y^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \int_0^r (r^2 - x^2)dx = \left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2r^3}{3}$$

$$y_0 = \frac{\frac{2r^3}{3}}{\frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi} \Rightarrow S\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$$

Das vorige Beispiel war noch recht einfach. Was tun wir aber, wenn es sich um komplizierte Kurven handelt oder die Darstellung der Fläche in kartesischen Koordinaten sehr umständlich, in Polarform jedoch sehr einfach ist? Keine Angst: die Mathematiker haben auch hierfür vorgesorgt! Sollte es sich beispielsweise um einen Kreissektor handeln, von dem es den Schwerpunkt zu berechnen gilt, so gibt es da eine ganz spezielle Methode.

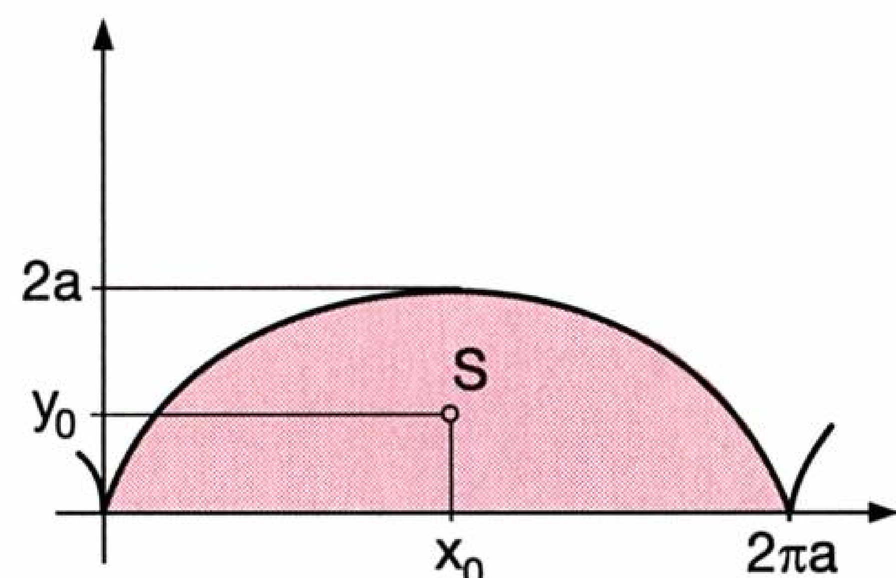
Aber unsere wissbegierigen Leserinnen und Leser geben noch immer keine Ruhe! Allzu gerne möchten sie erfahren, wie das nun mit Funktionen in Parameterdarstellung sei: Gibt es vielleicht eine spezielle Methode? Nur jene, die das nächste Beispiel noch nicht gelesen haben, können daran zweifeln.

Beispiel:

Der Schwerpunkt S des von der x-Achse und einem Zykloidenbogen eingeschlossenen Flächenstücks ist zu berechnen!

Lösung:

Die Darstellung einer Zykloide in Parameterform lautet: $f: t \mapsto \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



$$A = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} y \cdot \dot{x} \cdot dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} dt - 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos t\,dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \left[a^2 t\right]_0^{2\pi} - 2a^2\left[\sin t\right]_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}[t + \sin t \cos t]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 - 0 + \pi a^2 = 3\pi a^2$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2 \dot{x}\,dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{3a^3}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\,dt}_{0} + \frac{3a^3}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt}_{\pi} - \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^3 t\,dt = a^3\pi + \frac{3a^3\pi}{2} - \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\cos t\,dt$$

(Weil ja, wie wir bei der Flächenberechnung sahen, Folgendes gilt: $\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0$ und $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$).

Das verbleibende Integral lösen wir durch Substitution $\sin t = z$, $\frac{dz}{dt} = \cos t$

$$\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\cos t\,dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (1 - z^2)\,dz = \left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow M_x = \frac{5a^3\pi}{2} \text{ und } y_0 = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{5a^3\pi}{2}}{3\pi a^2} = \frac{5a}{6}$$

Auf Grund der Symmetrie der Fläche bezüglich der Geraden $g: x = \pi a$ folgt $x_0 = \pi a$ und damit: $S\left(\pi a, \frac{5a}{6}\right)$

AUFGABEN

294. Man berechne den Schwerpunkt S der Fläche unter der Geraden $y = 3x$ von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 4$, $y \geq 0$.

295. Eine Gerade g wird durch die Punkte $P_1(3, 2)$ und $P_2(6, 4)$ gelegt.

a) Koordinaten des Schwerpunkts S des von g und den Geraden $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $y = 0$ eingeschlossenen Flächenstücks?

b) Volumen V des Rotationskörpers, der entsteht, wenn dieses Flächenstück um die x-Achse rotiert?

296. Die statischen Momente M_x und M_y und die Lage des Schwerpunkts S des von den Geraden $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y = 0$ und der Parabel $y = 3x^2$ eingeschlossenen Flächenstücks sind zu berechnen.

297. Die Lage des Schwerpunkts S der Parabelfläche $y^2 = 2px$ ist zu ermitteln. $(0 \leq x \leq x_1)$

298. a) **Gegeben:** $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

Gesucht: Lage des Schwerpunkts S der von y und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

b) **Gegeben:** $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Gesucht: Lage des Schwerpunkts S der von y und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

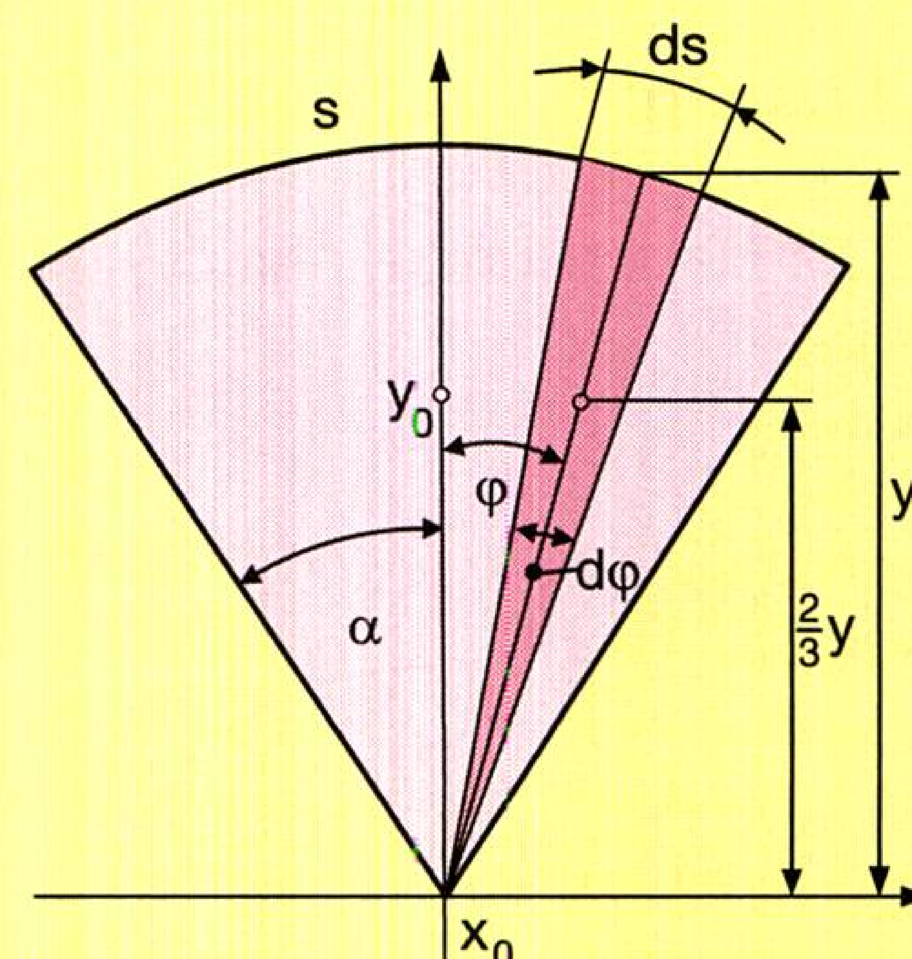
299. Man berechne die Lage des Schwerpunkts S der Viertelkreisfläche:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \; 0 \leq x \leq r$$

300. Es ist die Lage des Schwerpunktes S eines Kreissektors zu ermitteln.

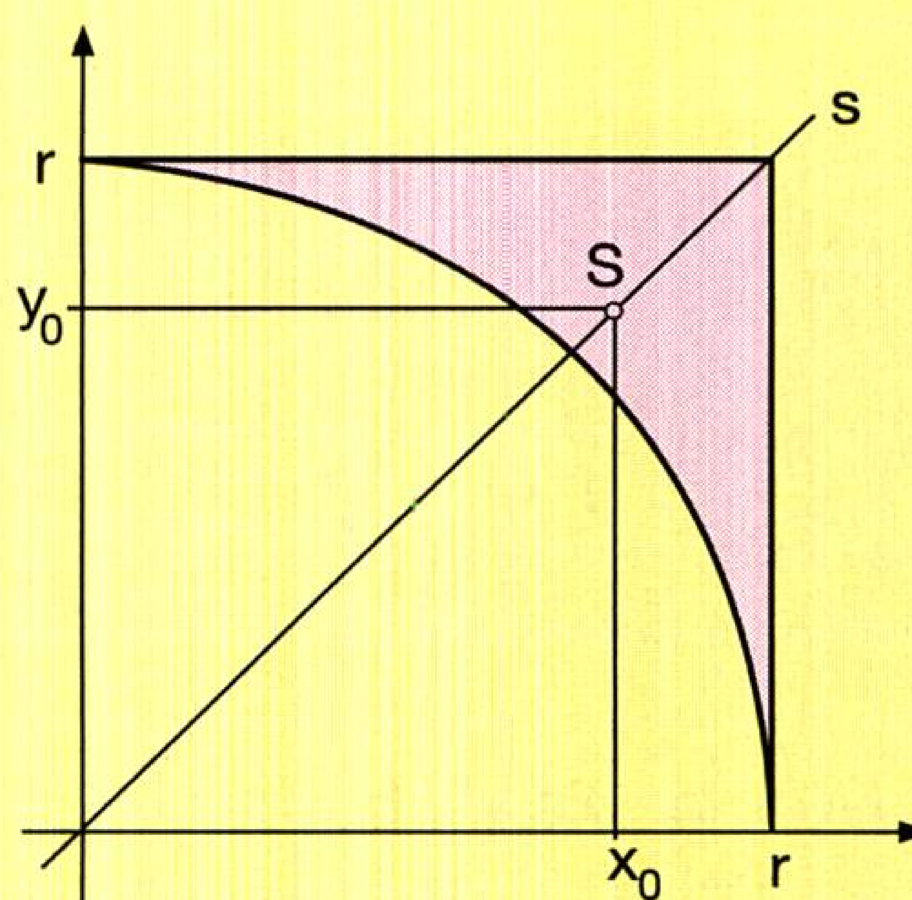
Anleitung: Für M_x gilt, dass die Fläche des dunkelrosa unterlegten differenziellen Sektors gleich $\frac{r^2}{2} d\varphi$ ist. Lage des Schwerpunkts in diesem Sektor:

$$y_0 = \frac{2}{3} y = \frac{2}{3} r \cos \varphi \Rightarrow dM_x = \frac{r^3}{3} \cos \varphi \, d\varphi \Rightarrow M_x = \ldots$$

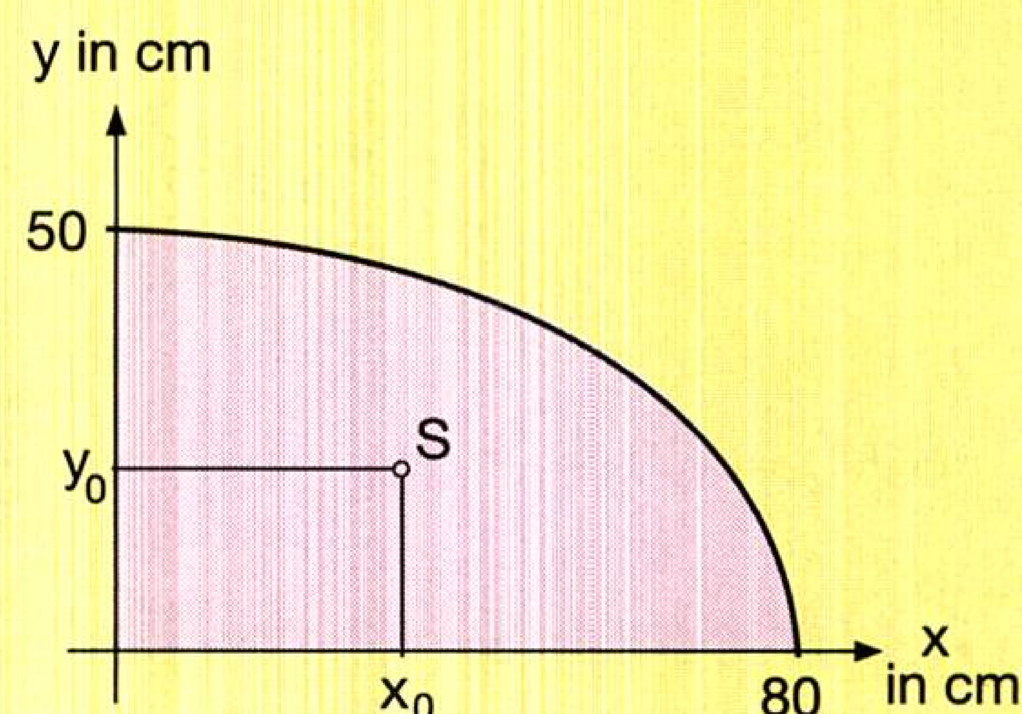


301. Man berechne die Lage des Schwerpunkts der rosa unterlegten „Außenfläche" des Viertelkreises.

Anleitung: Das statische Moment dieser Fläche ergibt sich als Differenz des statischen Moments des Quadrates und dem statischen Moment der Viertelkreisfläche.

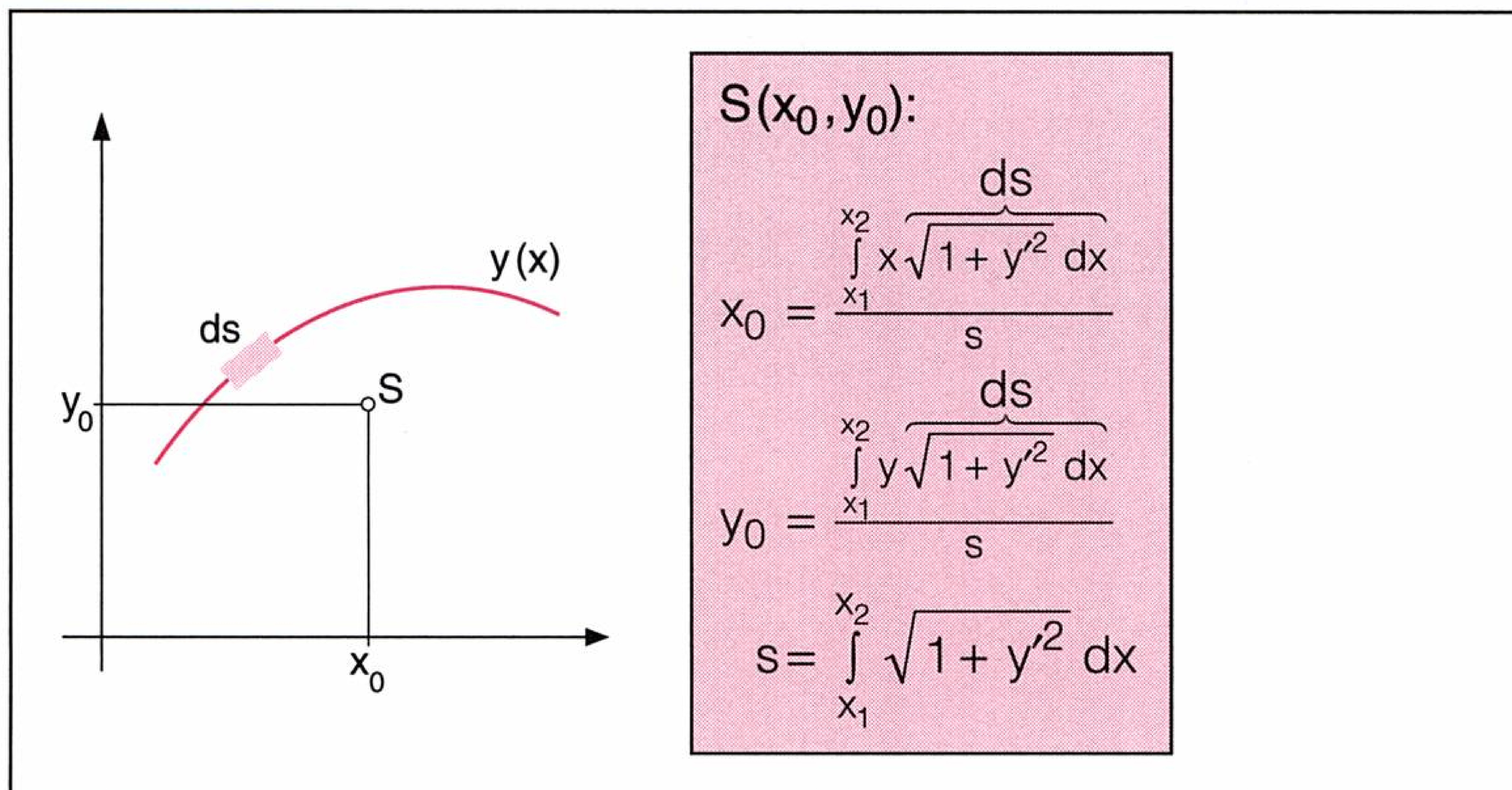


302. Der Ecktisch einer Küche hat die Form einer Viertelellipse. Auf Grund des lockeren Mauerwerks ist eine Montage mit nur einer Wandhalterung nicht möglich und es wird beschlossen, den Tisch mit einem Standbein aufzustellen. Die Daten sind der nebenstehenden Figur zu entnehmen. Wo muss der Tisch unterstützt werden?



7.2 Schwerpunkt und statische Momente von Linien

Das wird ja immer schlimmer: Jetzt sollen auch Linien einen Schwerpunkt haben! Nehmen wir ein Stück Draht zur Hand. Der Draht hat sicherlich einen Schwerpunkt und kann als eine Linie verstanden werden, die gleichmäßig mit Masse „belegt" ist. Nach dieser lichtvollen Interpretation wollen wir die Spannung nicht weiter steigern und verraten auch schon jene Formeln, mit denen man den Schwerpunkt von Linien ermittelt:



$S(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\underbrace{\sqrt{1+y'^2}\,dx}_{ds}}{s}$$

$$y_0 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\underbrace{\sqrt{1+y'^2}\,dx}_{ds}}{s}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$



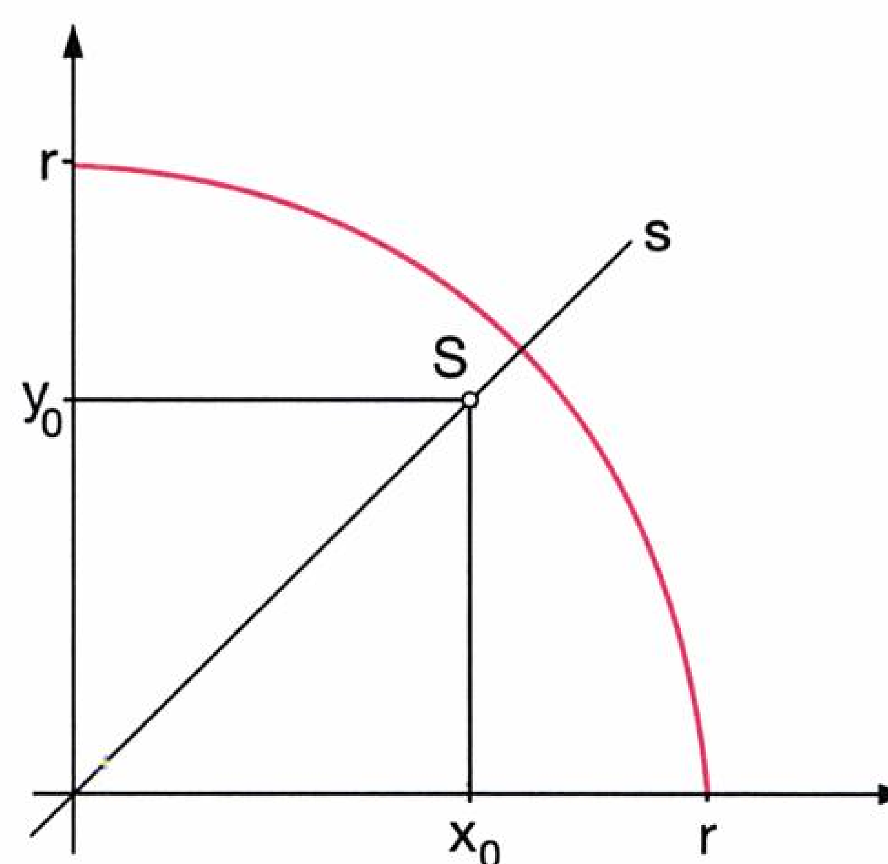
... ein satter Schwerpunkt

Diese Formeln wirken viel komplizierter als sie tasächlich sind. s ist die Bogenlänge und ds ein Bogenelement.

Beispiel:

Der Schwerpunkt der Viertelkreislinie $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant r$ ist zu bestimmen.

Lösung:



$s = \frac{r\pi}{2}$ (Umfang eines Viertelkreises!)

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y^2 = r^2 - x^2$

$2yy' = -2x$

$y' = \frac{-x}{y}$

$y'^2 = \frac{x^2}{y^2}$

mit $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ erhalten wir: $ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{r^2}{y^2}}\,dx = \frac{r\,dx}{y}$

Nun berechnen wir y_0, da das zugehörige Integral leichter lösbar ist als für x_0.
Auf Grund der Symmetrie bezüglich der Geraden $y = x$[1] gilt: $x_0 = y_0$

$$y_0 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1+y'^2}\,dx}{s} = \frac{2}{r\pi}\int_0^r y \cdot \frac{r\,dx}{y} = \frac{2}{\pi}\int_0^r dx = \frac{2}{\pi}[x]_0^r = \frac{2r}{\pi} \Rightarrow S\left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right)$$

[1]) Diese Gerade heißt **erste Mediane**.

Analog wie im vorigen Abschnitt führen wir den Begriff des „statischen Moments" ein:

$$x_0 = \overline{\text{y-Achse S}} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\,dx = M_y$$

$$y_0 = \overline{\text{x-Achse S}} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = M_x$$

Mit dieser Definition können wir die Formeln für die Schwerpunktskoordinaten einfach anschreiben (vgl. Außenspalte). Beim nächsten Beispiel werden wir die statischen Momente gesondert berechnen.

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$x_0 = \frac{M_y}{s} \qquad y_0 = \frac{M_x}{s}$$

Beispiel:

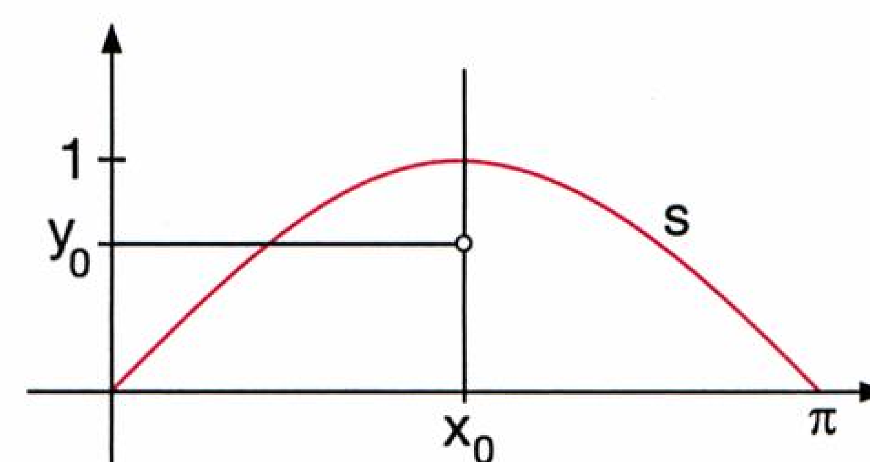
Die statischen Momente M_x und M_y der Sinuskurve $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ sind zu berechnen und der Schwerpunkt S ist anzugeben.

Das Beispiel gliedert sich in vier Abschnitte:

(1) Bogenlänge s
(2) $M_x = ?$
(3) $M_y = ?$
(4) $S(x_0, y_0) = ?$

Lösung:

(1) Wir berechnen zunächst die Bogenlänge $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$



$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$\Rightarrow y'^2 = \cos^2 x$$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx^{1)} = \frac{\pi}{6}(\sqrt{2} + 4\cdot 1 + \sqrt{2}) = 3{,}575$$

(2) Das statische Moment bezüglich der x-Achse wird berechnet:

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$M_x = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$. Wir substituieren: $u = \cos x$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow dx = -\frac{du}{\sin x}$$

Wir verwenden wieder den auf Seite 109 gezeigten Zusammenhang

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \cdot \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right|\right] + C,$$

wobei hier $a = 1$ und $x = u$ einzusetzen ist.

$$M_x = -\int_0^{\pi} \sin x \cdot \sqrt{1+u^2}\,\frac{du}{\sin x} = -\int_{u(0)}^{u(\pi)} \sqrt{1+u^2}\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right|\right]_{u(0)}^{u(\pi)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos x\sqrt{1+\cos^2 x} + \ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}[(-\sqrt{2} + \ln|\sqrt{2}-1|) - (\sqrt{2} + \ln|1+\sqrt{2}|)] = 2{,}296$$

(3) Für M_y gilt auf Grund der Symmetrie bezüglich der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$:

$$M_y = x_0 \cdot s = 5{,}616$$

(4) Wir berechnen $y_0 = \frac{M_x}{s} = 0{,}642$

$M_x = 2{,}296 \quad M_y = 5{,}616 \quad S\left(\frac{\pi}{2}, 0{,}642\right)$

1) Auswertung des Integrals mit der KEPLERschen Fassregel.

AUFGABEN

303. Es ist die Lage des Schwerpunkts S der Kurve **a)** $y = 2x^2, x \in [0, 2]$ **b)** $y = 7x^2, x \in [-1, 1]$ **c)** $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 4]$ zu ermitteln.

304. Schwerpunkt S der Kurven im angegebenen Intervall I?
a) $y = \frac{1}{x}$, $[1, 2]$ **b)** $y = \frac{2}{x^2}$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ **c)** $y = \ln x$, $[1, e]$

305. Der Schwerpunkt S der Kosinuskurve im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist zu ermitteln.

306. Man bestimme den Schwerpunkt der durch folgende Funktionen und Intervalle bestimmten Kurvenstücke:
a) $y = 2e^x$, $[0, 2]$ **b)** $y = \sqrt{x}(x - 2)$, $[1, 3]$ **c)** $y = \cosh x$, $[-1, 1]$

307. Schwerpunkt S des Graphen der Funktion $y = \frac{\ln x}{x}$ im Intervall $[1, e^2]$?

308. Der Schwerpunkt S der Halbkreislinie ist zu bestimmen.

309. **Gegeben:** ell: $2x^2 + 5y^2 = 10$ **Gesucht:** Schwerpunkt S des durch $x > 0, y > 0$ gegebenen Kurventeils.

310. Schwerpunkt S der durch $y^2 - x^2 = 1$ gegebenen oberen Hyperbelastes im Intervall $[-2, 2]$?

7.3. GULDINsche Regeln

Aus der Zeitschrift „RÄTSEL-KURIER“:



Was diese Zeitschrift kann, können wir schon lange! Es ist im folgenden Rätsel das rosa unterlegte Integral im „Integralhaufen“ zu entdecken.

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad G = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv \qquad \overline{M} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} m_1 d\tau \qquad V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

$$\mathbf{A = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx}$$

$$\frac{\varphi^*}{\varphi} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int (x_1^2 + x_2^2)\, d\tau \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \qquad z_0 = \frac{\pi^2}{7} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho^2 \ln \rho\, d\tau$$

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx}{A}$$

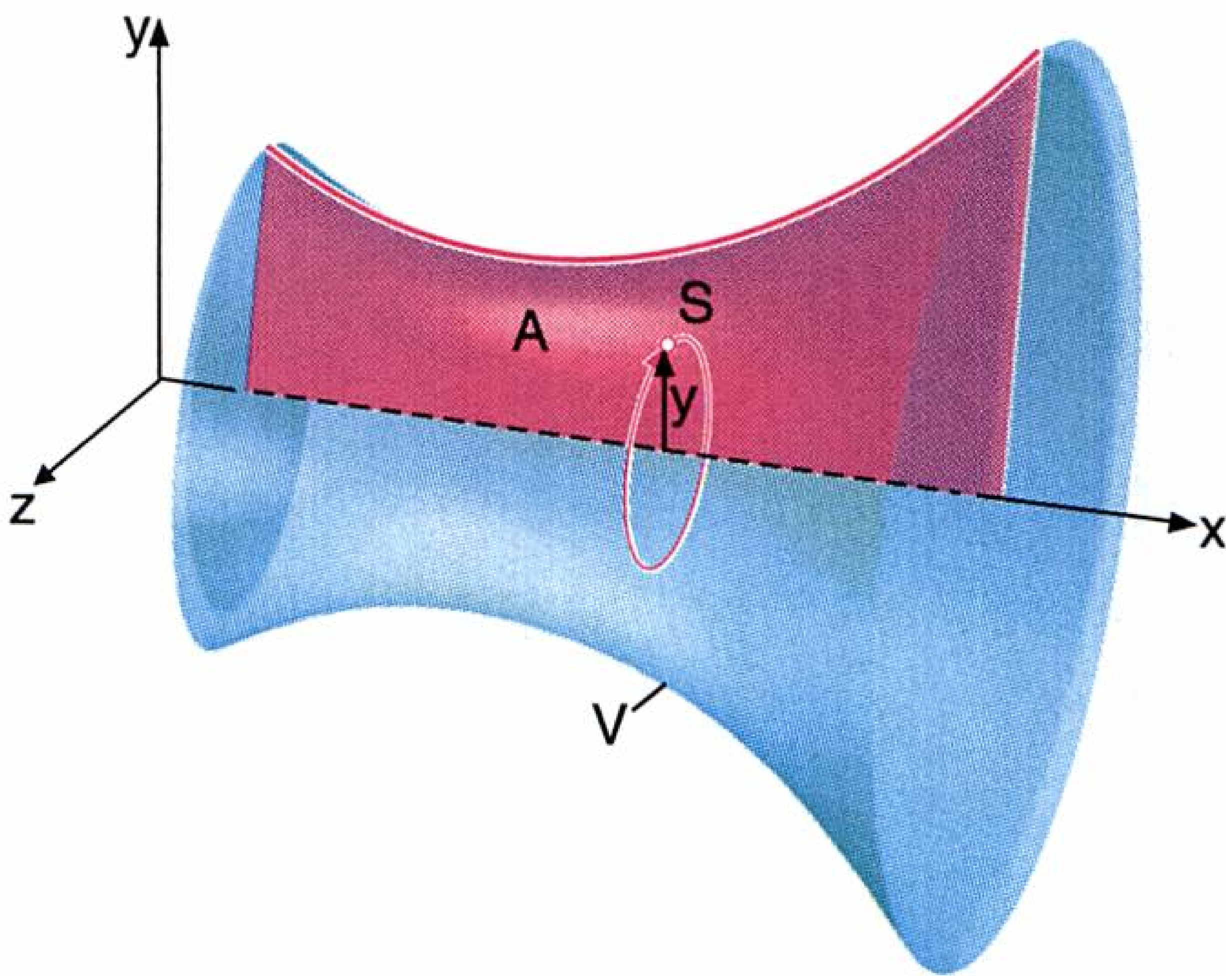
Gestaltwahrnehmung ist der wissenschaftliche Begriff für die Fähigkeit, die uns die Lösung des nebenstehenden Rätsels ermöglicht. Diese Gestaltwahrnehmung ist beim Menschen äußerst komplex und gut entwickelt.
Beim Versuch, diese Fähigkeit auf den Computer zu „übertragen“, hatte man lange Zeit große Schwierigkeiten. Erst mit der sogenannten **Parallelarchitektur** sind Fortschritte auf diesem Gebiet erzielt worden.



Ein Computer mit paralleler Architektur hat nicht nur **eine CPU** (**C**entral **P**rocessing **U**nit, das Herz eines „normalen“ Computers), sondern sehr viele CPUs, sodass er Befehle gleichzeitig ausführen kann.

Der Goldschmied und Mathematiker **Habakuk GULDIN** (1577–1643) war Jesuit und lehrte in Rom, Wien und Graz. Die nach ihm benannten Regeln waren schon im antiken Griechenland bekannt.

Umfragen haben gezeigt, dass selbst Schüler mit einem I.Q. $\leqslant 100$ beide Rätsel in weniger als 14 Minuten richtig gelöst haben. Um nicht mehr als ein Viertel der wertvollen Unterrichtszeit zu vergeuden, sei die Lösung vorweggenommen: Das $\int y^2\,dx$ findet sich in der (hoffentlich noch bekannten) Formel $V_x = \pi \int y^2\,dx$ wieder. Genau das erkannte auch Habakuk GULDIN Anfang des 17. Jahrhunderts und leitete daraus zuerst Formel ① und — durch eine analoge Überlegung — Formel ② her. In der Figur sehen wir, dass z. B. $2\pi y_0$ der rosa eingezeichnete Schwerpunktsweg ist, den die rosa unterlegte Fläche A bei einer Umdrehung zurücklegt.



1. GULDINsche Regel

① $V_x = 2\pi y_0 \cdot A$

② $V_y = 2\pi x_0 \cdot A$

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus rotierender Fläche und dem Weg ihres Schwerpunkts.

Beispiel:

Eine durch die Funktion $(x - R)^2 + y^2 = r^2$, $R > r$ gegebene Kreisfläche rotiert um die y-Achse. Volumen V_y?

Lösung:

Der entstehende Ringkörper heißt **Torus**. Unter Verwendung von Formel ① und des Umstandes, dass der Mittelpunkt eines Kreises sein Schwerpunkt ist, finden wir:

$V_y = 2\pi x_0 \cdot A = 2\pi R \cdot r^2\pi = 2\pi^2 R r^2$ $\qquad V_y = 2\pi^2 R r^2$

2. GULDINsche Regel

③ $A_x = 2\pi y_0 \cdot s$

④ $A_y = 2\pi x_0 \cdot s$

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge des erzeugenden Bogens und dem Weg seines Schwerpunkts.

Es soll darauf hingewiesen werden, dass es für die Anwendung der GULDINschen Regeln zwei einschränkende Bedingungen gibt: Die Drehachse darf die rotierende Fläche bzw. Kurve nicht schneiden, und sie muss in der gleichen Ebene liegen.

Wir sehen also, dass auch das Studium bereits bekannter Formeln und mathematischer Methoden etwas Neues liefern kann, wenn man die Informationen nur richtig kombiniert!

Oft kann die Inspiration zu einem solchen Zusammenhang im Traum kommen: So erging es etwa dem Chemiker **August KEKULÈ** (1829–1896), der schon seit Monaten auf der Suche nach der Strukturformel des Benzols (C_6H_6) war. Ihm träumte von einer Schlange, die sich in den Schwanz biss — erwachte und erkannte, dass er die Lösung gefunden hatte. (Benzolmoleküle sind ringförmig.)

Wir vergleichen zwei vielversprechende Formeln: $A_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\,ds$ und

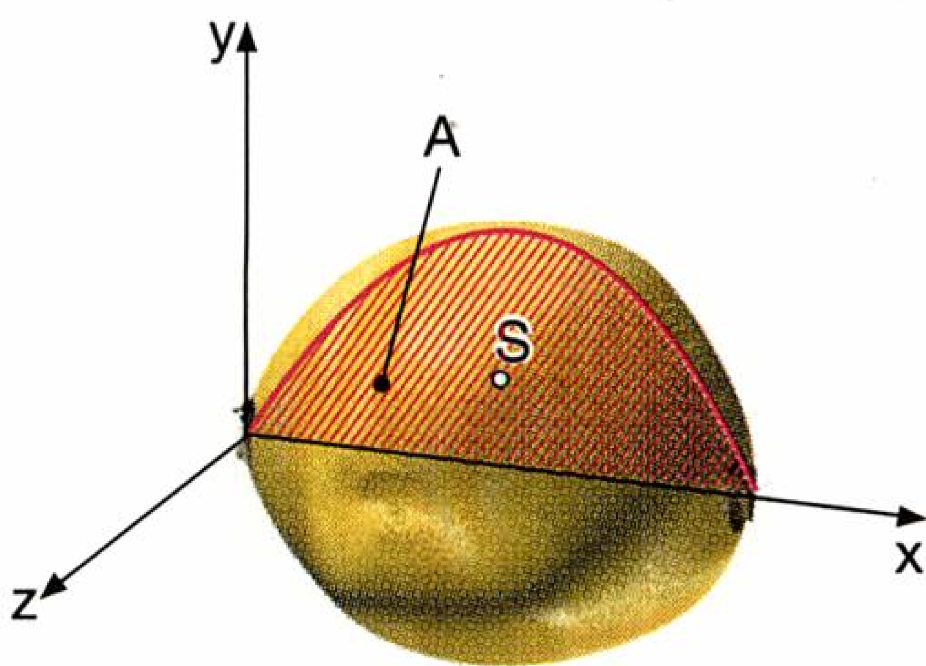
$y_0 = \dfrac{\int_{x_1}^{x_2} y\,ds}{s}$ — und erhalten so die Formeln der 2. GULDINschen Regel.

Beispiel:
Oberfläche O einer Zitrone?

Lösung:
Wie schon in nebenstehender Figur suggeriert wird, können wir als erzeugende Funktion $y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$ annehmen. Der Schwerpunkt liegt, wie wir von früher wissen, bei $S\left(\frac{\pi}{2}, 0{,}642\right)$. Die Bogenlänge beträgt 3,575.

③ $\Rightarrow A_x = 2\pi y_0 \cdot s = 2\pi \cdot 0{,}642 \cdot 3{,}575 = 14{,}42$
Zitronenkenner werden einwenden, dass ja eine Zitrone kaum π cm von Spitze zu Spitze misst, und dass gerade die Sinusfunktion als Erzeugende verwendet wird, ist auch nicht unbedingt einzusehen. Dem ist Folgendes entgegenzuhalten:

1. Nur eine einfache Näherung kann eine gute Näherung sein, solange sie die an die Berechnung gestellte Genauigkeit erfüllt.
2. Es erfordert oft viel „unmathematische" Fantasie, eine derartige Näherung zu finden.

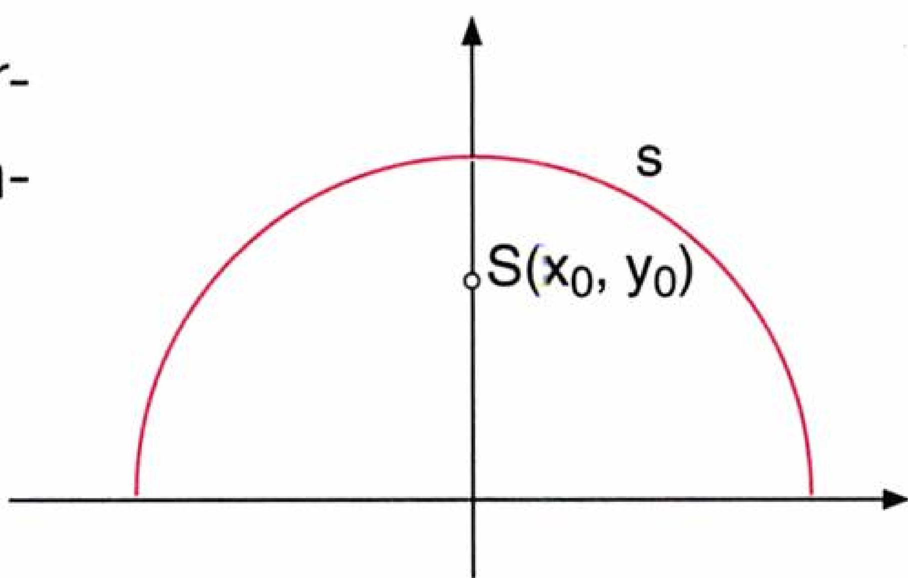


Die Zitrone ist eine typisch mediterrane (zum Mittelmeerraum gehörende) Frucht mit sehr geringer Oberfläche (Austrocknungsgefahr).

Mit den GULDINschen Regeln lässt sich viel mehr anfangen, als bloß die Oberfläche einer Zitrone zu berechnen! Der Fortschritt ist also nicht aufzuhalten, obwohl sehr kluge Menschen dem Fortschritt manchmal mit Skepsis begegnen. Denken wir zum Beispiel an Christian MORGENSTERN, der in seinen „Stufen" 1910 schrieb: *„Es gibt nur einen Fortschritt, nämlich den in der Liebe!"*. Bevor wir uns aber der profanen, sprich üblichen Liebe zuwenden, bauen wir die Liebe zur Mathematik auf Grund der Potenz der GULDINschen Regeln aus: **Kennen wir nämlich den Oberflächeninhalt eines Rotationskörpers, können wir die Schwerpunktskoordinaten der erzeugenden Kurve berechnen!**

Beispiel:
Es ist der Schwerpunkt der Halbkreislinie, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, zu ermitteln. (Vgl. Text in der Außenspalte.)

Lösung:
Auf Grund der Symmetrie gilt $x_0 = 0$.
Weiters ist $A_x = 4\pi r^2$ (Kugeloberfläche) und $s = \pi r$ (Halbkreisbogenlänge)



③ $\Rightarrow A_x = 2\pi y_0 \cdot s$

$4\pi r^2 = 2\pi y_0 \cdot \pi r$

$y_0 = \frac{2r}{\pi} \Rightarrow S\left(0, \frac{2r}{\pi}\right)$

Ein Ergebnis, das wir früher erst nach mühsamem Integrieren erhalten haben!

AUFGABEN

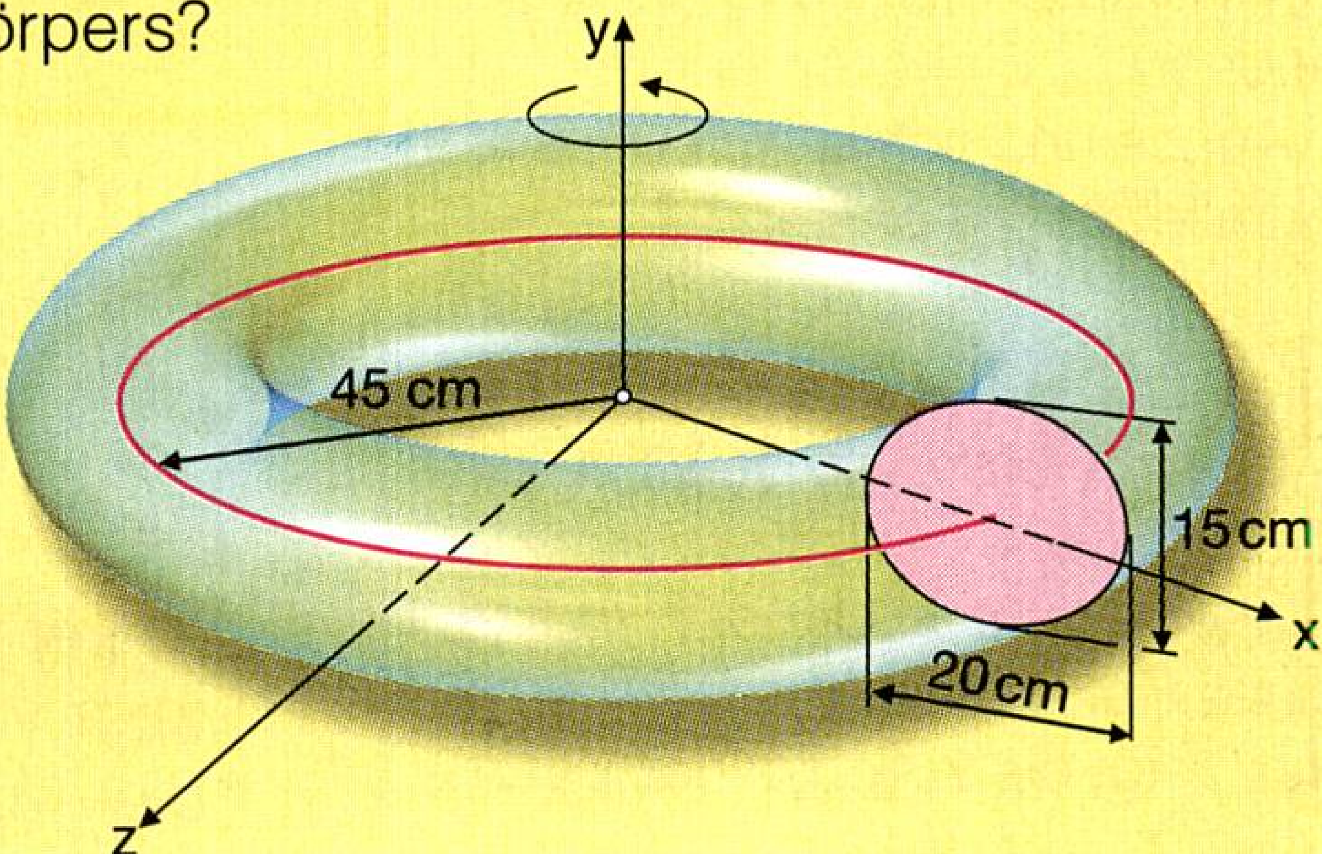
311. Das Quadrat **a)** ABCD $[A(2,-2), B(6,-2), C(6,2), D]$ **b)** ABCD $[A(3,0), B(6,0), C(6,3), D]$ rotiert um die y-Achse. Es ist das Volumen V und die Oberfläche O zu bestimmen.

312. **Gegeben:** $r_1, r_2\ (r_1 > r_2)$ **Gesucht:** Torusoberfläche O

313. Das Dreieck **a)** ABC $[A(4,-2), B(7,0), C(4,2)]$ **b)** ABC $[A(7,-4), B(11,1), C(8,8)]$ rotiert um die y-Achse. Volumen V und Oberfläche O des entstehenden Rotationskörpers?

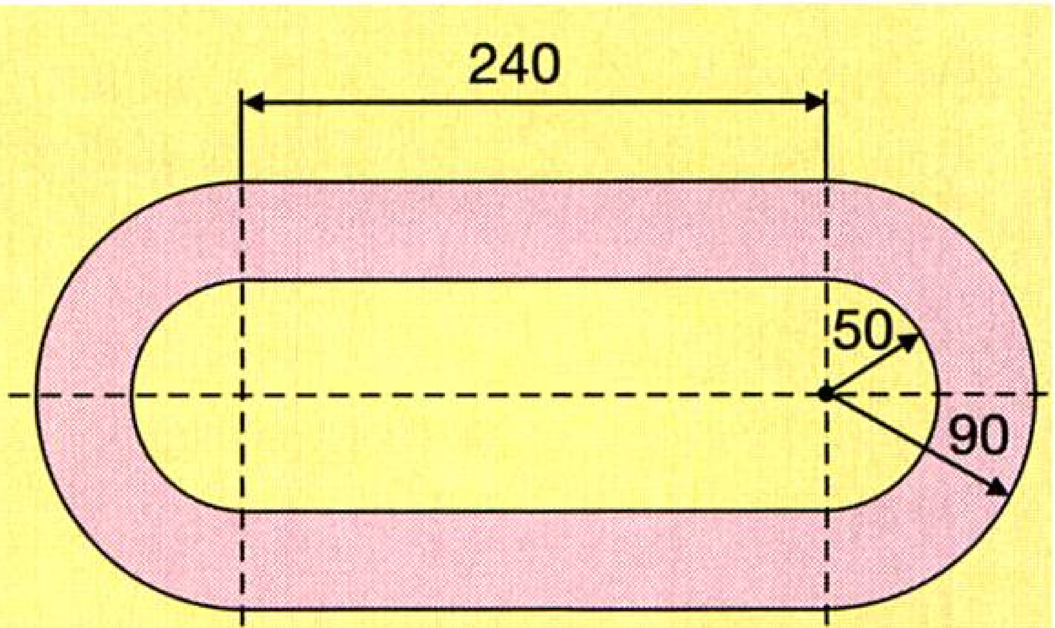
314. Der Halbkreis **a)** $x^2 + (y-4)^2 = 16,\ y > 4$
b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25,\ y > 3$ rotiert um die x-Achse. Man ermittle das Volumen V und die Oberfläche O dieses Rotationskörpers.

315. Ein Schwimmreifen mit elliptischem Querschnitt habe die in nebenstehender Figur gegebenen Abmessungen. Volumen V und die Oberfläche O?

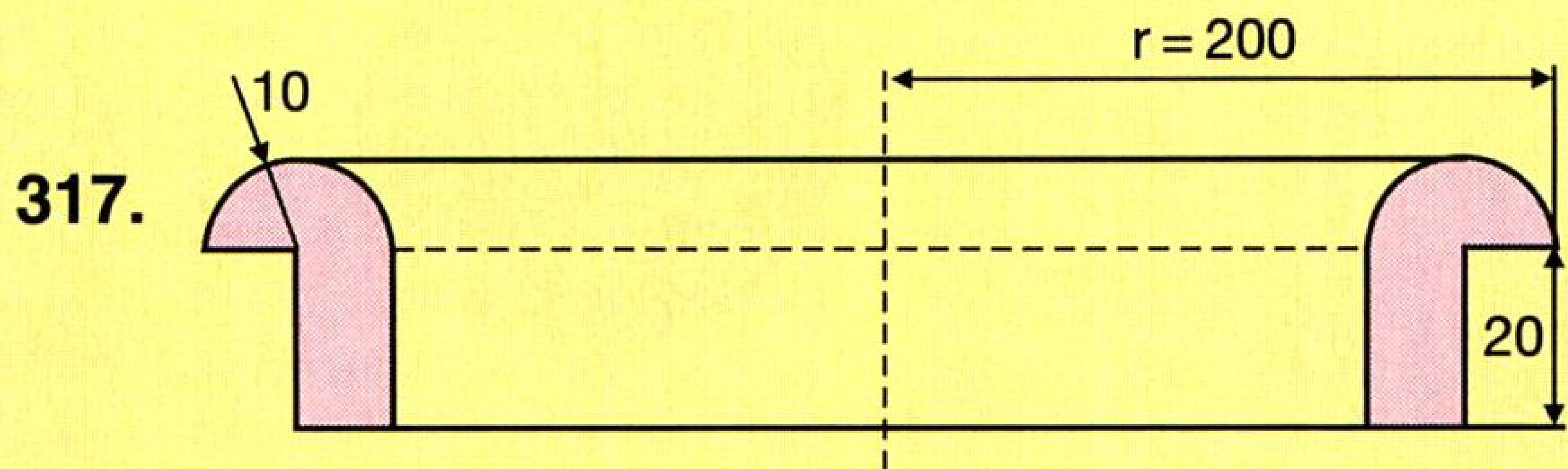


316. Ein Glied einer Ankerkette besteht aus Eisen ($\rho = 7870\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$) und hat an jeder Stelle einen kreisförmigen Querschnitt. Wie schwer ist eine aus 290 Gliedern bestehende Kette?

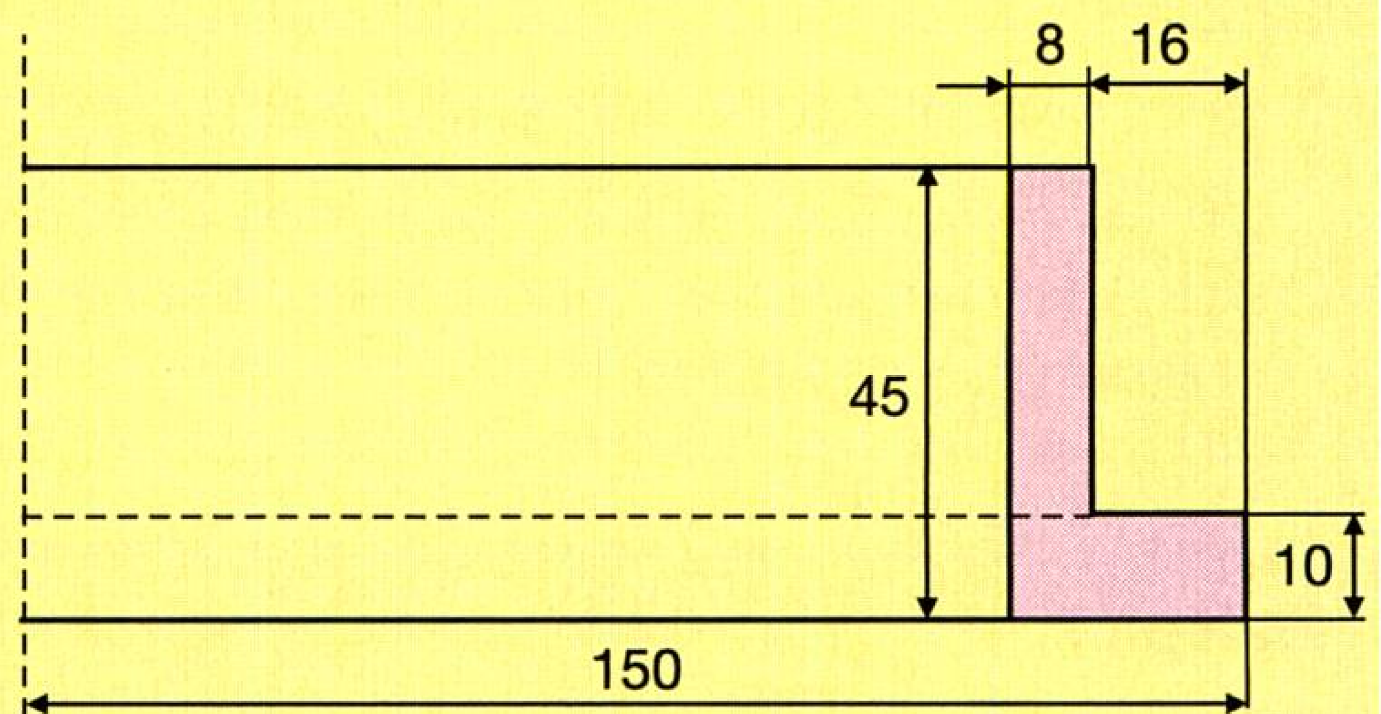
Bemerkung: Die Abmessungen eines Gliedes sind der nebenstehenden Figur zu entnehmen.



317. Es sind Volumen V und Masse m einer Gummidichtung zu berechnen, die den in der Figur dargestellten Querschnitt aufweist.
Die Dichte des Gummis beträgt $1200\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$.

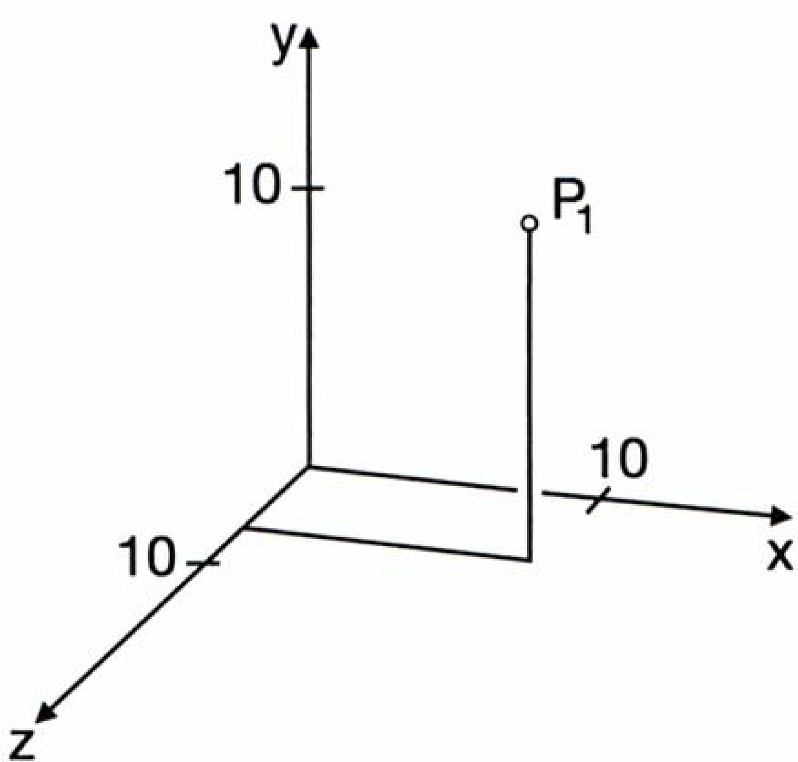


318. Ein Flansch mit L-förmigem Querschnitt (vgl. nebenstehende Figur) besteht aus einem Material mit der Dichte $\rho = 7850\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$. Es sind das Volumen V und die Masse m dieses Flansches zu ermitteln.



7.4 Schwerpunkt und statische Momente von Drehkörpern

Weil wir im (mathematischen) $\mathbb{R}^3$ noch nicht lange „daheim" sind, sei hier anhand der Konstruktion eines Punktes P die Bedeutung der 3 Koordinaten erläutert:



Um den Punkt P_1 (10, 12, 6) zu konstruieren, gehen wir 10 Einheiten vom Ursprung entlang der x-Achse, sodann 12 Einheiten parallel zur y-Achse und schließlich 6 Einheiten parallel zur z-Achse.

Die Achsen des Koordinatensystems werden so gewählt, dass die xy-Ebene nach wie vor in der Blattebene liegt. Um der Bedingung eines Rechtssystems Genüge zu tun, zeigt die z-Achse nach vorne.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist leicht vorstellbar: Es ist der Punkt, in dem man sich die Masse des Körpers vereinigt denkt. So bewegt etwa eine von außen angreifende Kraft den Körper so, als würde sie im Schwerpunkt angreifen. In diesem Kapitel behandeln wir ausschließlich Rotationskörper, deren Drehachse die x-Achse bzw. die y-Achse ist.

x-Achse

$$x_0 = \frac{\pi \int_{x_1}^{x_2} x y^2\,dx}{V_x} \qquad y_0 = z_0 = 0$$

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$$

y-Achse

$$y_0 = \frac{\pi \int_{y_1}^{y_2} y x^2\,dy}{V_y} \qquad x_0 = z_0 = 0$$

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy$$

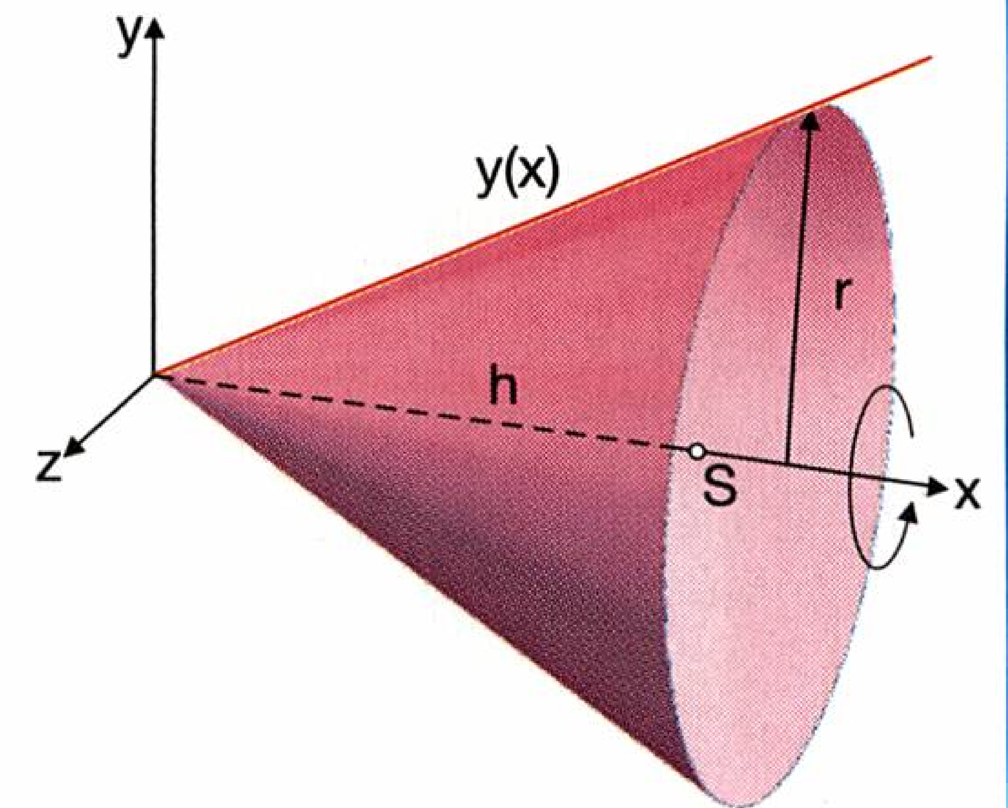
Unser Schwerpunkt hat also eine x-, y- und z-Koordinate. Zum Glück sind aber von diesen drei Koordinaten jeweils zwei gleich null. Das erleichtert die Arbeit ungemein!

Beispiel:

Die Lage des Schwerpunkts S des Drehkegels, der bei Rotation des Graphen von $y = \frac{rx}{h}$ im Intervall [0, h] um die x-Achse entsteht, ist zu bestimmen.

Lösung:

Das Volumen eines Kegels können wir mit $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ als bekannt voraussetzen. Damit wird:



$$x_0 = \frac{\pi \int_0^h x \frac{r^2 x^2}{h^2} dx}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{3}{h^3} \cdot \int_0^h x^3\, dx = \frac{3}{h^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h = \frac{3h}{4}$$

$\Rightarrow S\left(\frac{3h}{4}, 0, 0\right)$

Die beiden Integrale $\pi \int xy^2\, dx$ bzw. $\pi \int yx^2\, dy$ heißen **statische Momente**.
Ähnlich wie schon früher, können wir uns folgendes überlegen:

$$x_0 = \overline{\text{yz-Ebene S}} \Leftrightarrow \pi \int_{x_1}^{x_2} xy^2\, dx = M_{yz}$$

$$y_0 = \overline{\text{xz-Ebene S}} \Leftrightarrow \pi \int_{y_1}^{y_2} yx^2\, dy = M_{xz}$$

Diese statischen Momente werden wir, analog zu den vorangegangen Abschnitten, ebenfalls gesondert berechnen. Die ungeduldigen Leserinnen und Leser, die nun endlich den Sinn dieser „extra-Berechnung" erfahren wollen, werden bei Aufgabe **327.** voll auf ihre Rechnung kommen.

$$M_{yz} = \pi \int_{x_1}^{x_2} xy^2\, dx$$

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{V_x} \quad y_0 = z_0 = 0$$

$$M_{xz} = \pi \int_{y_1}^{y_2} yx^2\, dy$$

$$y_0 = \frac{M_{xz}}{V_y} \quad x_0 = z_0 = 0$$

Beispiel:

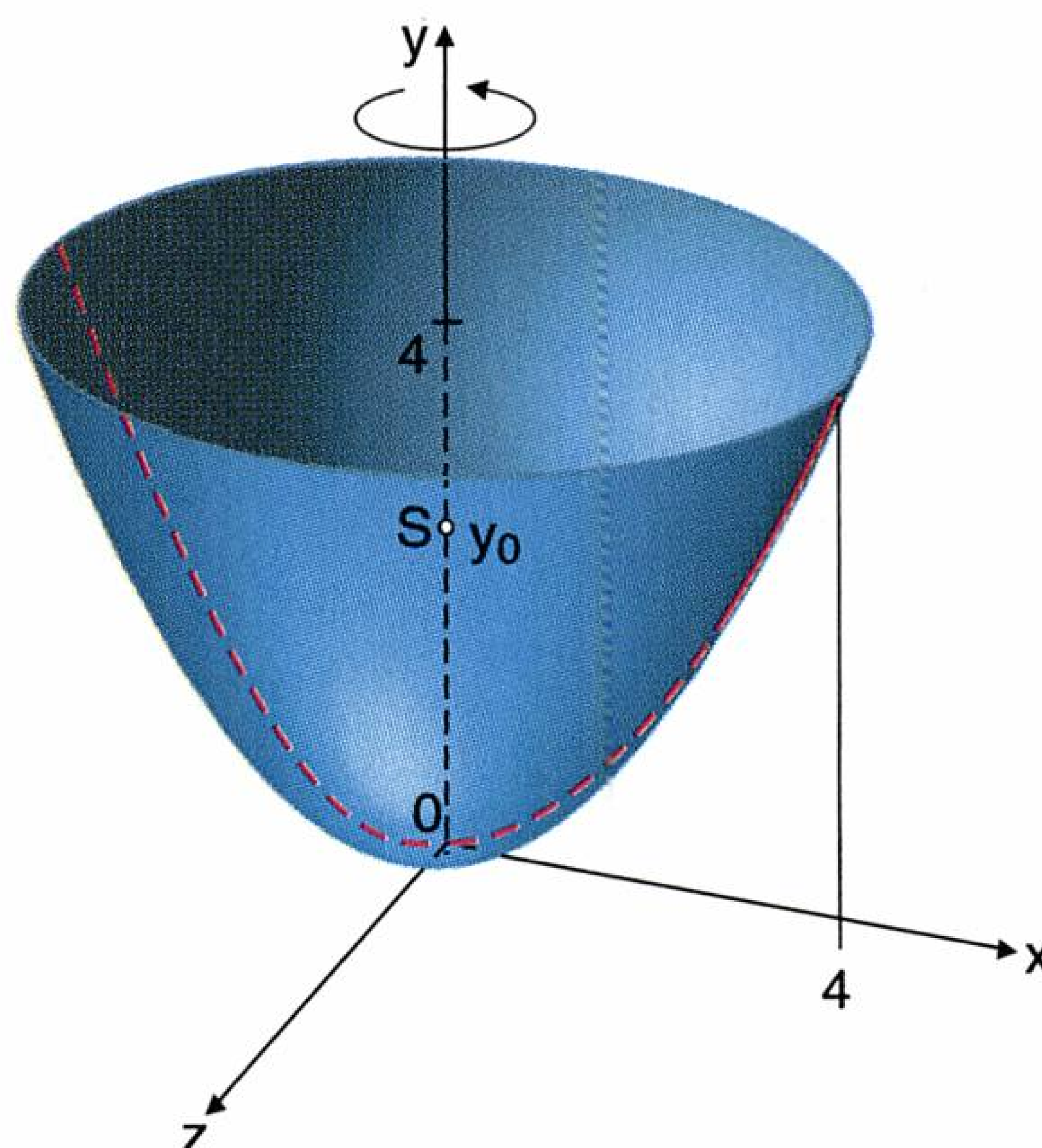
Der Graph der Funktion $y = \frac{x^2}{4}$ rotiert zwischen $y_1 = 0$ und $y_2 = 4$ um die y-Achse. Gesucht ist das statische Moment bezüglich der xz-Ebene M_{xz} und die Lage des Schwerpunkts S des entstehenden Rotationskörpers.

Lösung:

Mit $M_{xz} = \pi \int_{y_1}^{y_2} yx^2\, dy$ erhalten wir:

$$M_{xz} = \pi \int_0^4 y \cdot 4y\, dy$$

$$= 4\pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{256\,\pi}{3}$$



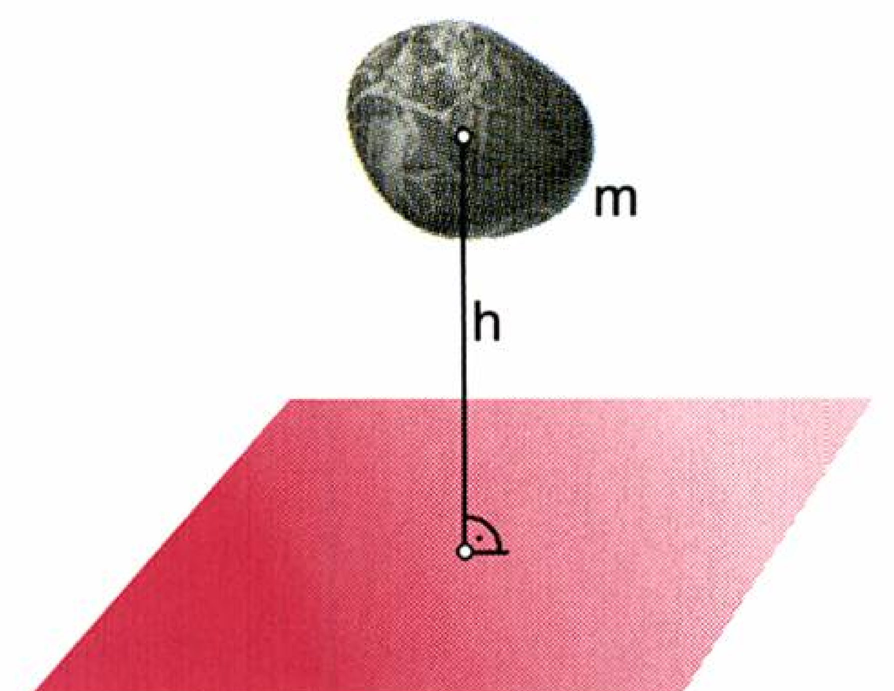
Das Volumen V_y berechnen wir mit $V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\, dy$:

$$V_y = \pi \int_0^4 4y\, dy = 4\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 32\,\pi$$

So erhalten wir mit $y_0 = \frac{M_{xz}}{V_y}$: $y_0 = \frac{\frac{256\,\pi}{3}}{32\,\pi} = \frac{8}{3} \Rightarrow$

$M_{xz} = \frac{256\,\pi}{3}$ $\quad S\left(0, \frac{8}{3}, 0\right)$

In der Physik gibt es den Begriff der **potentiellen Energie** eines Körpers.



Wenn man von der Erdbeschleunigung g absieht, bleibt das Produkt mh als variable Größe. Man überlege, welcher **mathematischen** Größe mh entspricht.

AUFGABEN

319. Es ist der Schwerpunkt S eines Rotationsparaboloids, welches durch Rotation des Graphen von $y = cx^2$ um die x-Achse zwischen $y_1 = 0$ und $y_2 = b$ entsteht, zu bestimmen.

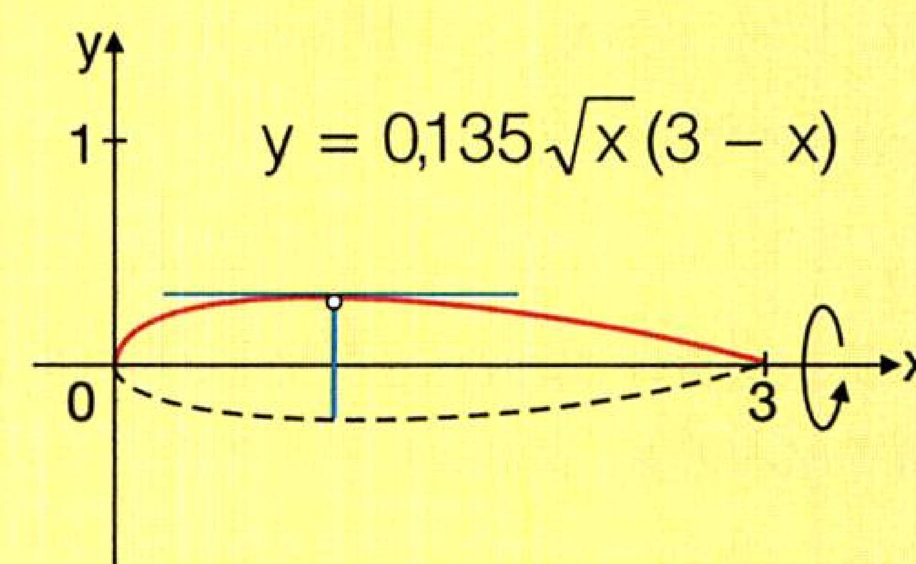
320. Folgende Kurven rotieren um die x-Achse:

a) $y = e^x$, [1, 2] **b)** $y = \ln x$, [1, e] **c)** $y = \sqrt[3]{x}$, [0, 8]

Schwerpunkt S des entstehenden Rotationskörpers?

321. Es ist der Schwerpunkt S einer Halbkugel zu bestimmen, die durch Rotation von $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ im Intervall [0, r] um die x-Achse entsteht.

322. Ein Körper von 1932,4 kg Masse hat einen Achsenschnitt, der begrenzt wird von der Kurve $y = 0{,}135\sqrt{x}\,(3 - x)$, Maße in m. Gesucht werden: **a)** Lage und Fläche des größten Querschnittes, **b)** Fläche des Achsenschnittes **c)** Rauminhalt des Körpers und seine Dichte **d)** Schwerpunkt des Körpers.

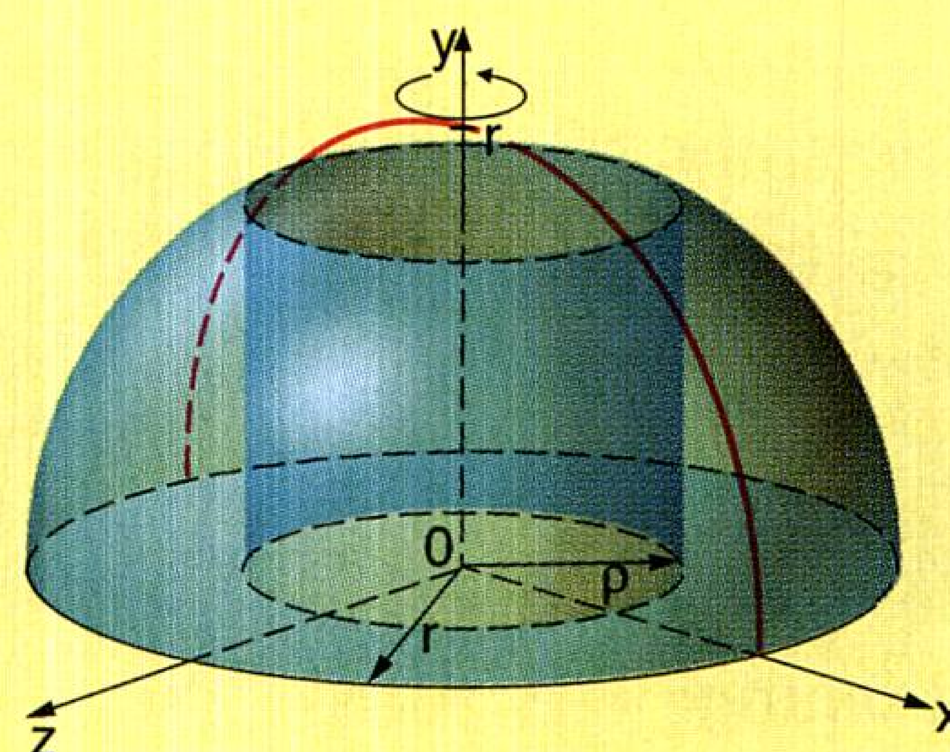


323. Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}(4 - x)\sqrt{x}$. Gesucht werden **a)** Hochpunkt H der Kurve **b)** Fläche A oberhalb der x-Achse **c)** Schwerpunkt S_1 dieser Fläche **d)** Rauminhalt V_x des Körpers, der bei der Drehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht **e)** Schwerpunkt S_2 dieses Körpers.

Vermischte Aufgaben

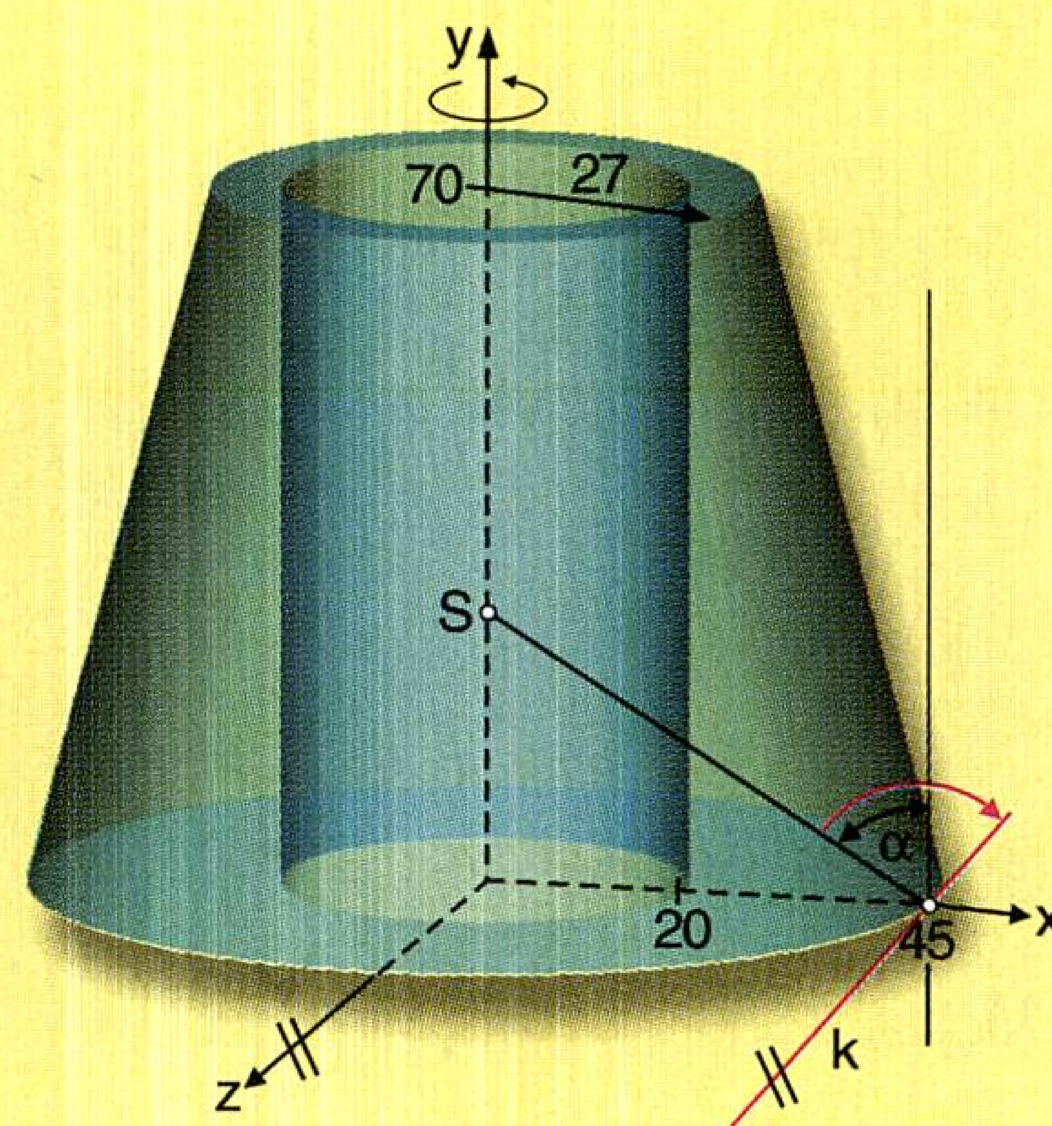
324. Aus einer Halbkugel mit dem Radius r soll senkrecht zur Schnittebene ein Drehzylinder mit dem Radius ρ herausgebohrt werden, dessen Achse durch den Kugelmittelpunkt geht. Schwerpunkt S des Restkörpers?

Anleitung: Sowohl das Volumen V, wie auch das statische Moment M_{yz} dieses Körpers sind durch Differenzbildung der Volumina bzw. der statischen Momente von Kugelzone und Zylinder zu berechnen.



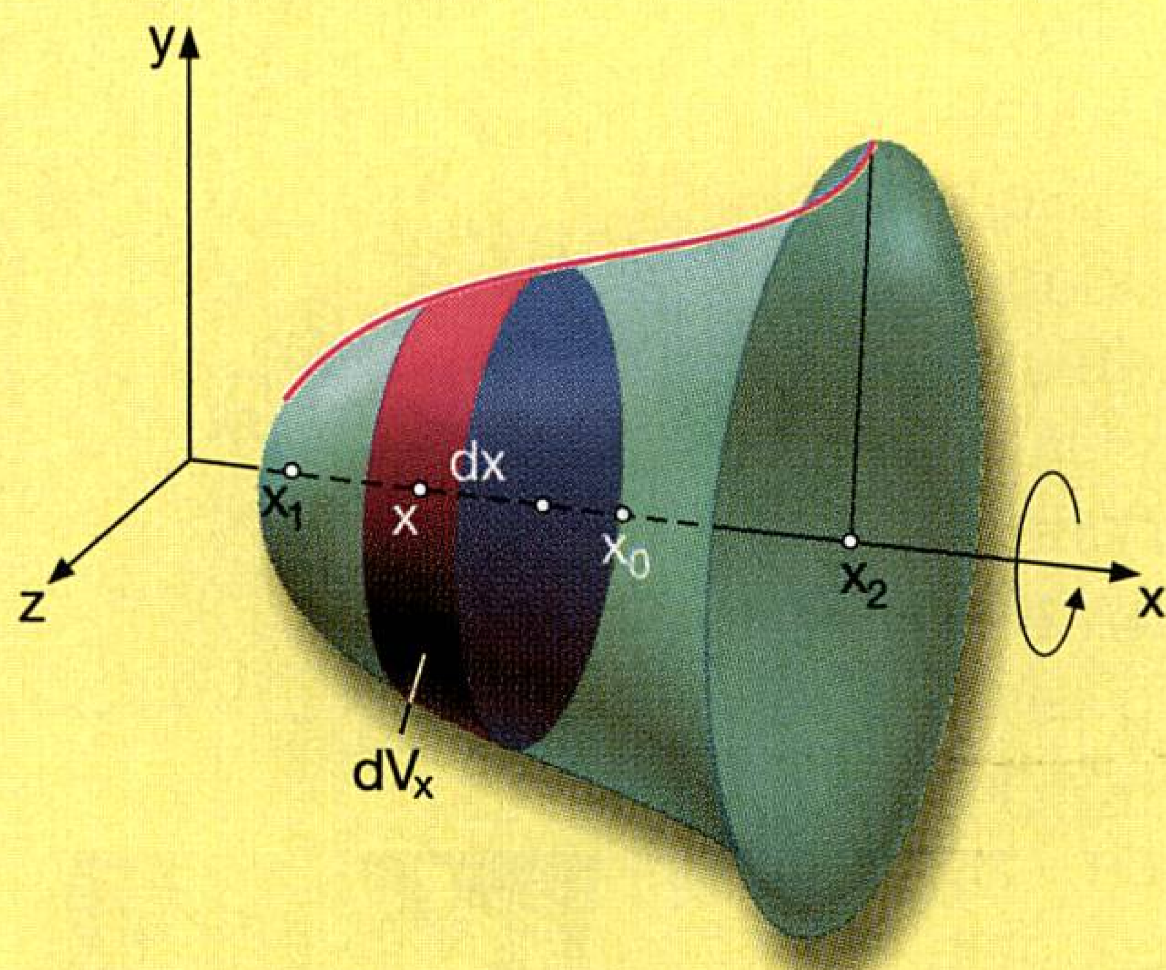
325. Die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ rotiert um die y-Achse. Es ist der Schwerpunkt S des entstehenden Rotationshyperboloids zu bestimmen, wenn $y_1 = 0$ und $y_2 = 7$ ist.

326. Ein rotationssymmetrischer Körper (Querschnitt und Maße vgl. nebenstehende Figur) besteht aus einer Legierung mit 83%[1] Cu ($\rho = 8920\ \text{kgm}^{-3}$) und 17% Zn ($\rho = 7100\ \text{kgm}^{-3}$). Es ist zu berechnen: **a)** Volumen V **b)** Masse m **c)** Oberfläche O **d)** Koordinaten des Schwerpunkts S **e)** Der Körper soll um die Gerade k geneigt und im instabilen Gleichgewicht balanciert werden. Bei welchem Winkel α ist das möglich?



[1]) Gemeint sind Gewichtsprozent.

327. Es lässt sich auch der Schwerpunkt einer **Rotationsfläche** einfach ausrechnen. Die rechte Spalte ist – entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte – auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:



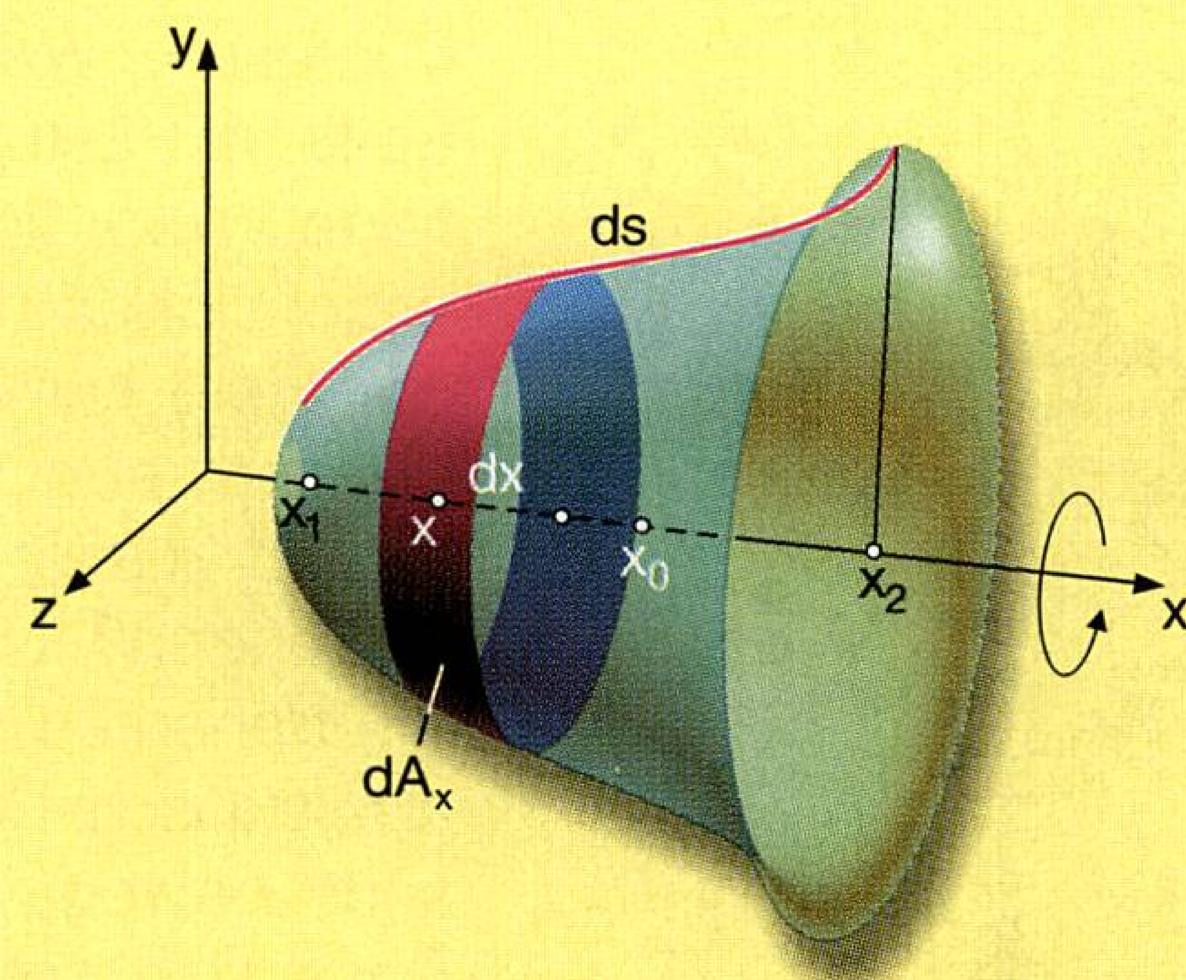
$dV = \pi y^2\, dx$

$dM_{yz} = \pi x y^2\, dx$

$M_{yz} = \pi \int x y^2\, dx$

$x_0 = \frac{M_{yz}}{V}$

$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx$ $\qquad S(x_0, 0, 0)$



$dA_x = 2\pi y\, ds = \ldots$

$dM_{yz} = \ldots$

$M_{yz} = \ldots$

$x_0 = \ldots$

$A_x = \ldots$ $\qquad S(\ ,\ ,\ )$

Durch Vertauschung der Koordinaten x und y erhält man die entsprechenden Formeln für das statische Moment bzw. die Schwerpunktskoordinaten eines Rotationskörpers und einer Rotationsfläche, welche durch Drehung des Graphen einer Funktion $x = f(y)$ um die y-Achse entstehen.

328. Die Funktion mit der Gleichung $y = \sin x$ rotiert im Intervall $[0, \pi]$ um die x-Achse. Schwerpunkt S der entsprechenden Rotationsfläche?

329. Es ist der Schwerpunkt S der Mantelfläche jener Körper zu berechnen, die bei Rotation der folgenden Kurven um die y-Achse — im gegebenen Intervall — entstehen:

a) $y = -\frac{h}{r}x + h,\ y_1 = 0,\ y_2 = h$ $\qquad$ **b)** $x = y^2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2$ $\qquad$ **c)** $x = \ln y,\ y_1 = 1,\ y_2 = e^3$

330. Schwerpunkt S einer Halbkugelfläche, die durch Rotation des Graphen von $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = r$ um die x-Achse festgelegt wird?

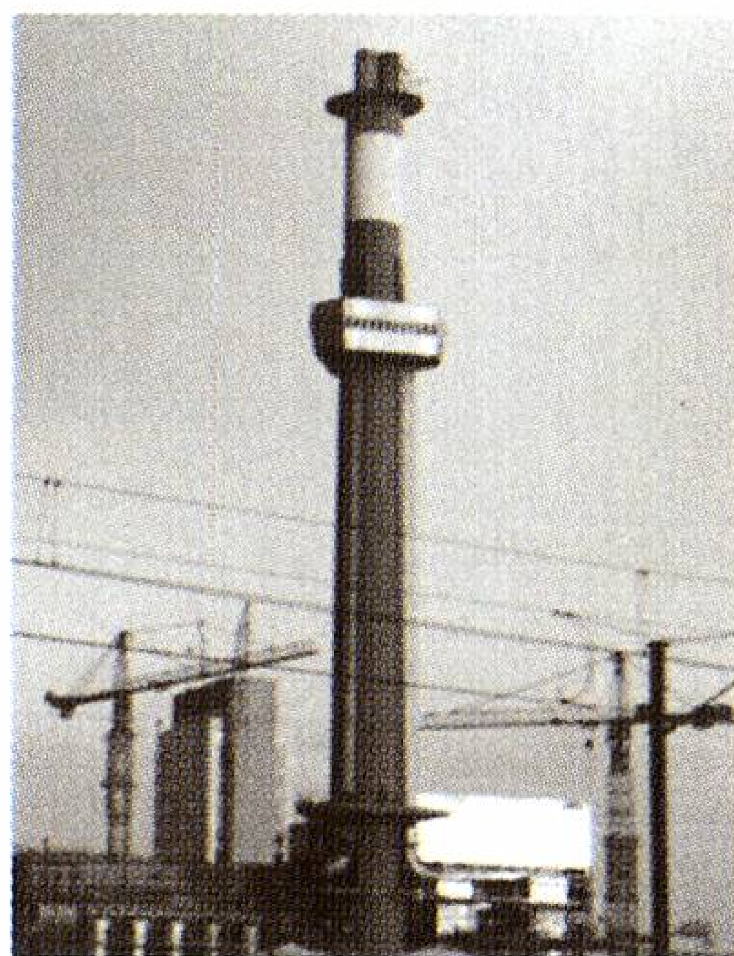
331. Wie groß war die Arbeit, die für den Bau des legendären Babylonischen Turms verrichtet wurde?
Anleitung: Es ist die Arbeit gegen das Schwerefeld der Erde zu berechnen. Diese ist gleich der potentiellen Energie des kegelstumpfförmig anzunehmenden Baus.

$W = E_{pot} = mgh = \rho g V h = \rho g M_{xz}$

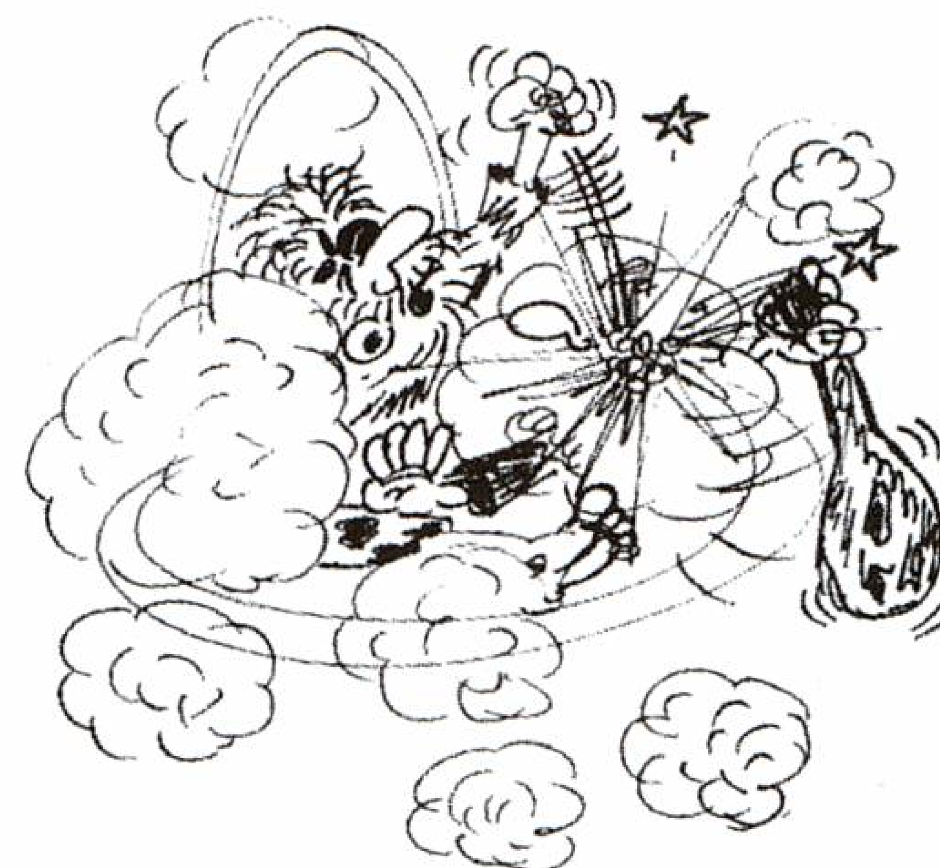
Radius des Basiskreises r_1 ..... 51 m
Radius des Deckkreises r_2 ..... 30 m
Höhe h ..... 90 m
Dichte ρ ..... 3600 kgm^{-3}
Erdbeschleunigung g ..... 9,81 ms^{-2}

8. Trägheitsmomente





Konfrontation ist nicht gleich Konfrontation. Während auf der linken Seite ein „stummes Gefecht“ stattfindet, sind die auf der rechten Seite ersichtlichen Probleme, mit denen der Held kämpft, schon handfester. Wo liegt aber der prinzipielle Unterschied dieser beiden Auseinandersetzungen? Links finden sich zwei Kontrahenten, die völlig ruhig sind, also **statisch**. Rechts geht es hingegen sehr bewegt, also **dynamisch**, zu. Dass sich solche Wesensmerkmale nicht nur in Comics finden, sollen die nächsten beiden Bilder illustrieren. Die Frage, wo man zum Beispiel die Kuppel eines Fernheizturms unterstützen muss, führt auf eine Schwerpunktsberechnung, also ein statisches Problem. Zum Unterschied dazu ist die Frage nach der Rotationsenergie von Mühlsteinen eine dynamische Aufgabe.





Am 31. Dezember 1987 ereignete sich im Kraftwerk Irsching der Isar-Amperwerke AG/München eine sogenannte **Rotorexplosion** (vgl. den technischen Bericht in der Hauptspalte), bei der ein ca. 80 t „schweres“ Turbinenrad beträchtlichen Sachschaden anrichtete.

Durch welche Größen wird eigentlich die ungeheure Wucht bestimmt, die die entfesselte Energie einer Rotorexplosion ausmacht?
Anders gefragt: Wovon hängt die in einem rotierenden Stahlstück gespeicherte Energie ab?

Selbst einem technischen Laien ist anschaulich klar, dass die Rotationsgeschwindigkeit und die Masse des Turbinenrades eine wesentliche Rolle spielen. Je schneller und schwerer der aus der Bahn geratene Maschinenteil ist, desto mehr Schaden kann er anrichten. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die gespeicherte Energie darüber hinaus auch noch von der **Form des rotierenden Körpers abhängt.** Dieser Umstand wird durch das Trägheitsmoment beschrieben: je größer es ist, desto größer ist die gespeicherte Energie.

8.1 Trägheitsmoment von Drehkörpern

Aus dem technischen Bericht zum Turbinensschaden im Kraftwerk Irsching:

Objektbeschreibung

Bei dem betroffenen Turbosatz handelt es sich um einen konventionellen 330-MW-Dampfturbosatz im Öl- und Gaskraftwerk Irsching der Isar-Amperwerke AG (IAW).
Der Turbosatz besteht aus einem HD-Teil in Topfbauweise, einem zweiflutigen MD-Teil sowie zwei doppelflutigen ND-Teilen (Anlage 1).
Im Kraftwerk stehen noch zwei weitere Turbosätze, mit 160 MW und 440 MW. Die drei Turbosätze wurden von Siemens/KWU geliefert und in den Jahren 1969 (1), 1972 (2) und 1974 (3) in Betrieb genommen.

Schadenseintritt

Nach einem 10-tägigen Blockstillstand wurde der Turbosatz 2 am 31.12.1987 morgens angefahren. Bei der Inbetriebnahme der Anlage wurden keine Unregelmäßigkeit festgestellt. Nach Erreichen der Betriebsdrehzahl, kurz vor dem Synchronisieren, trat der Berstschaden am Läufer des 2. ND-Teiles ein. Der Turbosatz hatte zu diesem Zeitpunkt 57946 Betriebsstunden sowie 838 Starts, davon 110 Kaltsstarts. Bei Schadenseintritt waren 8 Mitarbeiter im Kraftwerk; Personen kamen nicht zu Schaden.

Befund

Der ND-Läufer (Gewicht ca. 80 t, größter Wellendurchmesser 1760 mm, *Werkstoff 2% NiCrMoV-Stahl)* ***zerbrach in mehrere Stücke****. Die meisten Bruchstücke wurden auf dem Kraftwerksgelände,* ***einzelne kleinere Bruchstücke in einer Entfernung bis zu 1,3 km gefunden****. Das größte Stück mit einem Gewicht von ca. 24 t verblieb in der Turbine. Am Maschinenhaus traten beträchtliche Schäden auf.*

Überlegungen zur Schadensursache

Bei der zerstörungsfreien Prüfung mit Ultraschall (US) in Lieferzustand (1970) wurden im Bereich der jetzt gefundenen Fehlerstelle ***kleinere US-Anzeigen festgestellt, die damals nach ergänzenden Prüfungen und Berechnungen als unbedenklich angesehen wurden.***

Derzeit kommen als Schadensursache in Frage:

- *niedrige Zähigkeit des Läuferwerkstoffes*
- *Fehlergröße und Fehlerwachstum von Herstellungsfehlern.*

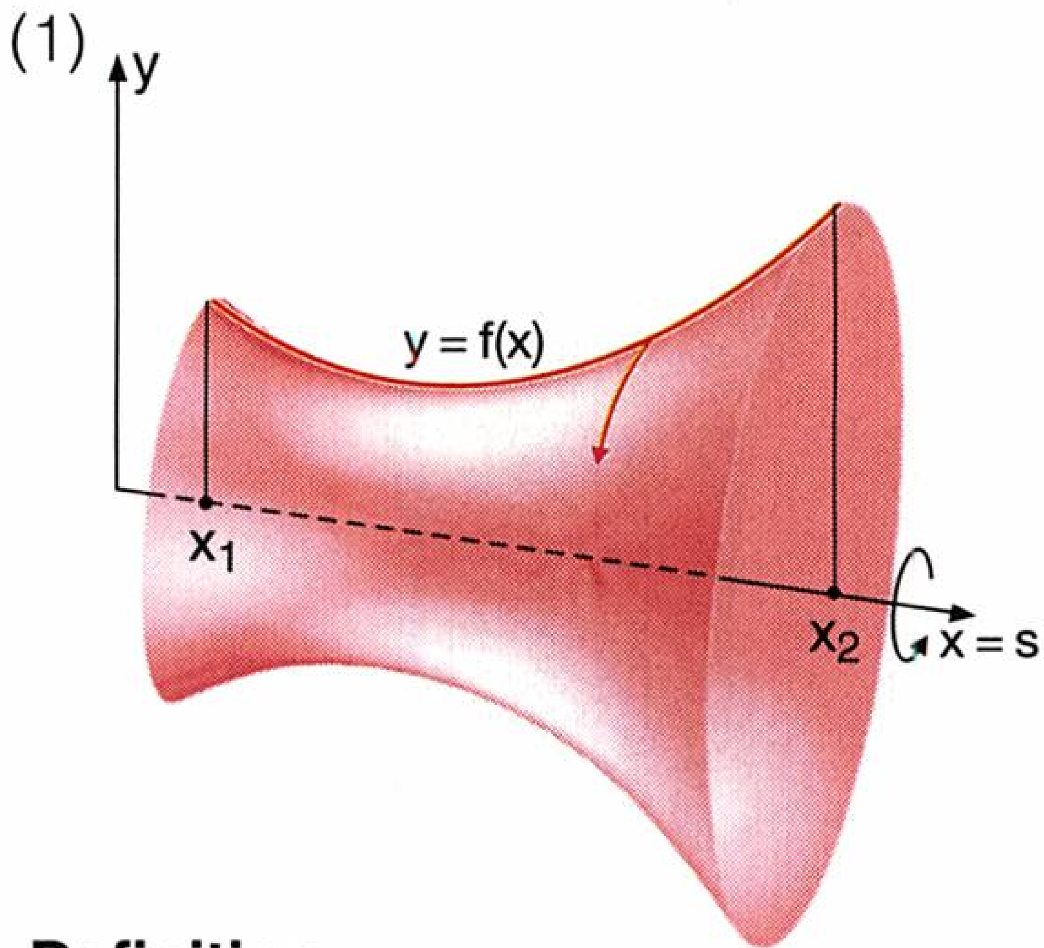
Flankierend wird anderen denkbaren, schadensbegünstigenden Einflüssen nachgegangen.

Wir wollen uns hier darauf beschränken, das Trägheitsmoment einfacher Körper zu berechnen.

Eine Funktion mit der Gleichung y = f(x) rotiert im Intervall $[x_1, x_2]$ um die x-Achse — vgl. obige Figur **(1)**. Dadurch entsteht ein Rotationskörper mit der x-Achse als Symmetrie- bzw. Schwereachse s, der seine Umgebung durch nichts gefährdet. Erst die Rotation um eine beliebige Achse g macht ihn zu einem Energiebündel. Unser Körper soll nun um eine Achse g rotieren — vgl. Figur **(2)** — die zunächst identisch mit der Schwereachse ist. Unter diesen Gegebenheiten lasst sich das Trägheitsmoment J_S des Körpers mit Formel (1) berechnen:

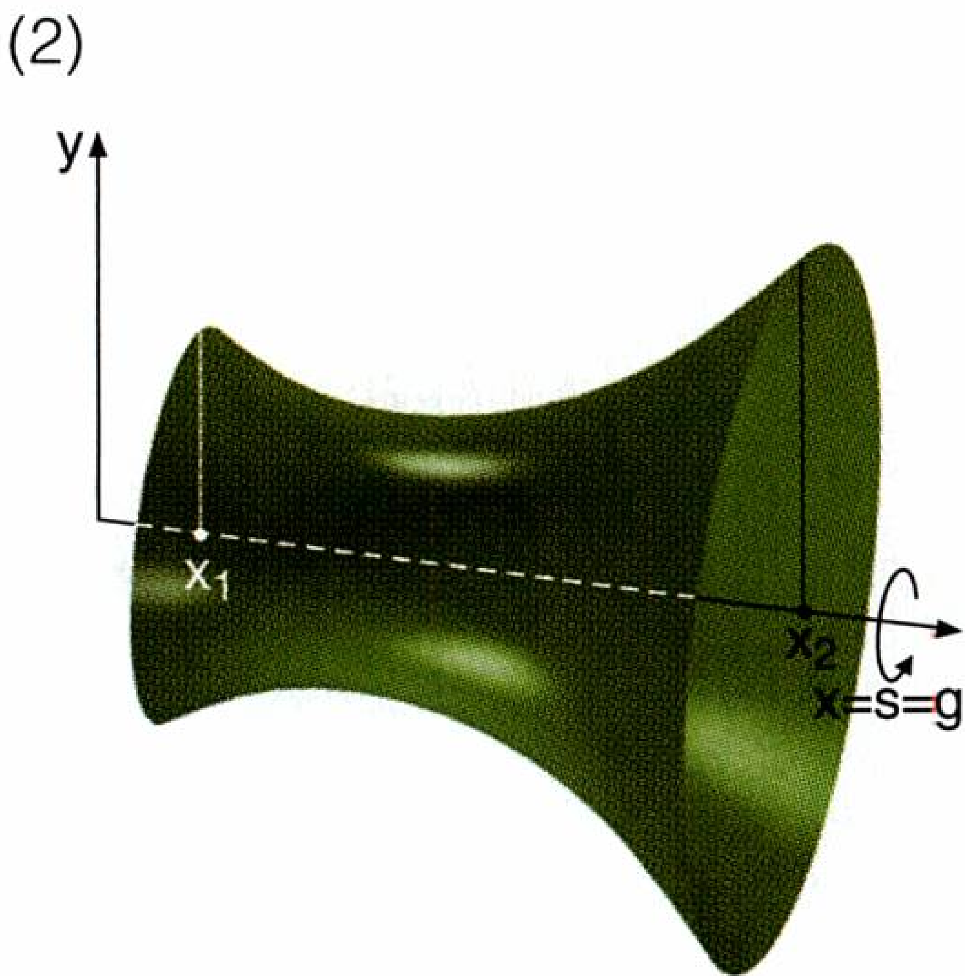
(1) $J_S = \frac{\pi\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^4\,dx$ (ρ ..... Dichte)

(1)



Definition:
Jede durch den Schwerpunkt eines Körpers verlaufende Gerade heißt **Schwereachse**.

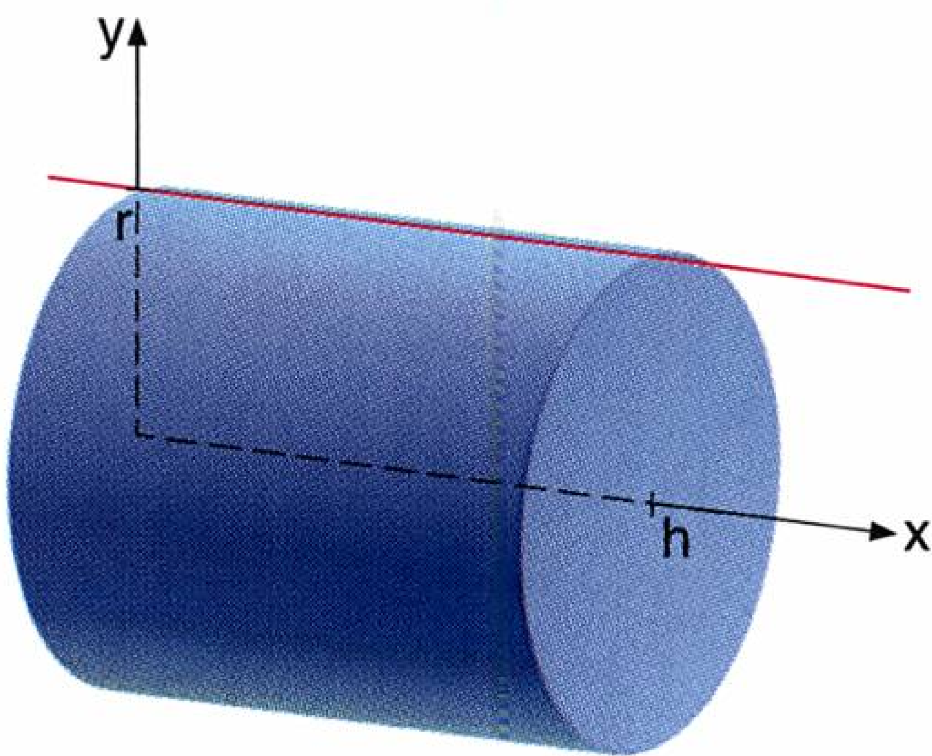
(2)



Beispiel:
Das Trägheitsmoment J_S eines Drehzylinders bezüglich seiner Symmetrieachse ist gesucht.

Lösung:

(1) Durch Rotation der Geraden mit der Gleichung y = r um die x-Achse im Intervall [0, h] entsteht ein Drehzylinder. Dieser Rotationskörper hat die x-Achse als Symmetrie- bzw. Schwereachse.



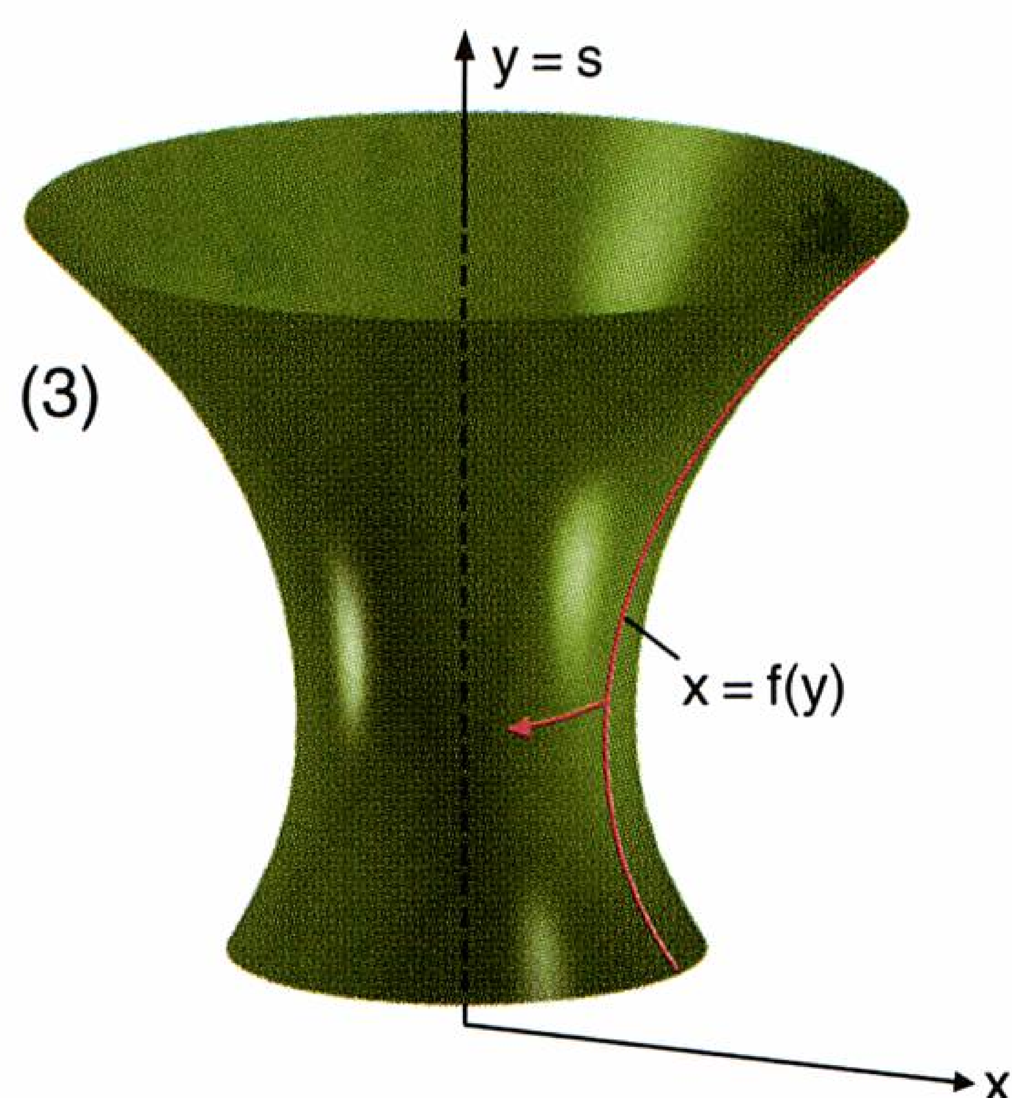
(2) (1) $J_S = \frac{\pi\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^4\,dx = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h r^4\,dx = \frac{\pi\rho r^4}{2}[x]_0^h = \frac{\pi\rho r^4 h}{2}$

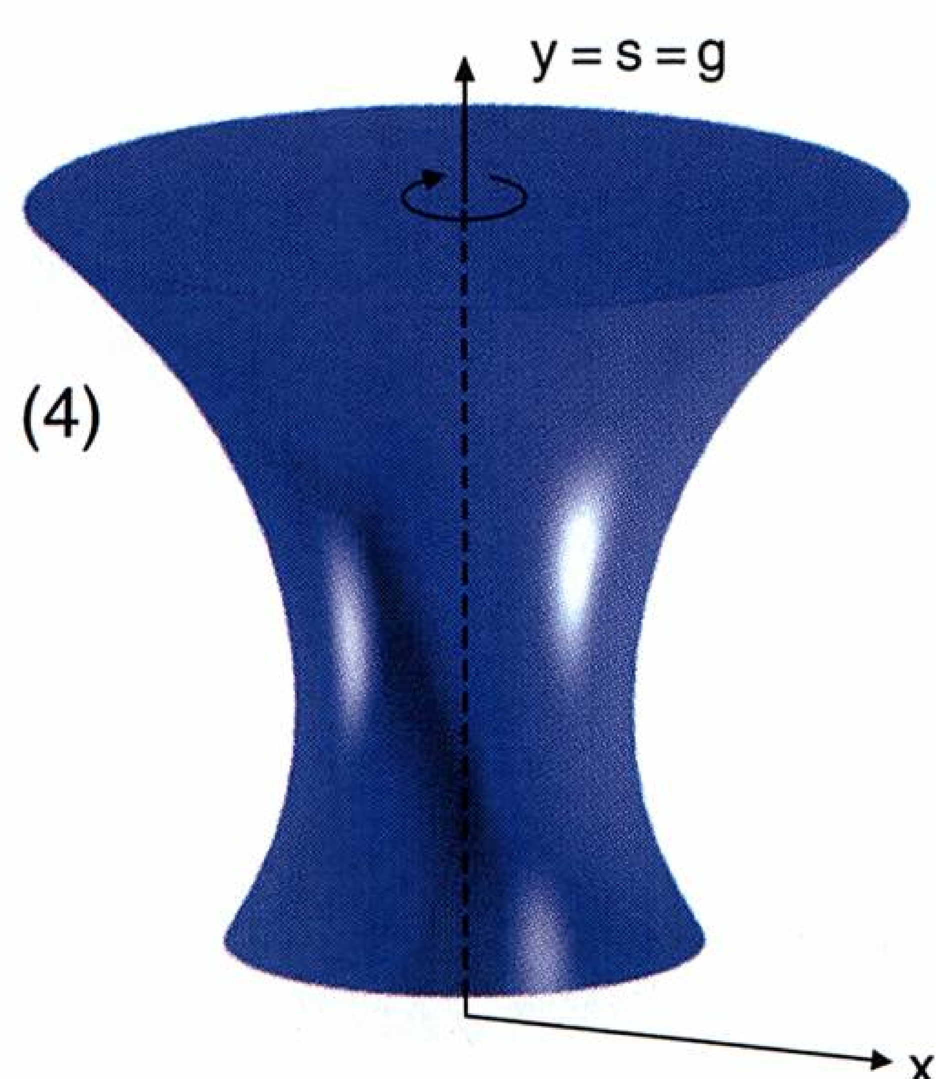
(3) $V = \pi r^2 h \Rightarrow m = \rho \cdot V = \pi r^2 h\rho$

(4) $J_S = \frac{\pi\rho r^4 h}{2} = \frac{r^2}{2}\cdot\pi r^2 h\rho = \frac{mr^2}{2}$ $J_S = \frac{mr^2}{2}$

Rechenregel:

(1) Die den Körper erzeugende Funktion f wird ermittelt.
(2) Das Trägheitsmoment J_S wird berechnet.
(3) Die Masse m des Körpers wird bestimmt: $m = \rho \cdot V$
(4) Das Trägheitsmoment J_S wird in Abhängigkeit von der Masse m dargestellt.





Welche Dimension hat das Trägheitsmoment?
Als Produkt aus dem Quadrat einer Länge und einer Masse ist die Dimension des Trägheitsmomentes kgm². Nur wenn wir mit konkreten, also dimensionsbehafteten Größen rechnen, berücksichtigen wir diesen Umstand.

Der in Figur **(3)** dargestellte Rotationskörper wurde dadurch erzeugt, dass die Funktion mit der Gleichung $x = f(y)$ um die y-Achse rotiert. Dieser Körper soll nun um seine Symmetrie- bzw. Schwereachse g, also um die y-Achse, rotieren. Um das Trägheitsmoment J_g des Körpers zu ermitteln, brauchen wir nur noch in Formel ② einzusetzen:

$$② \; J_s = \frac{\pi\rho}{2}\int_{y_1}^{y_2} x^4\,dy \qquad (\rho \text{ ..... Dichte})$$

Beispiel:

Das Trägheitsmoment J_s eines Drehkegels mit dem Radius r und der Höhe h ist — bezogen auf die y-Achse als Symmetrieachse — zu ermitteln.

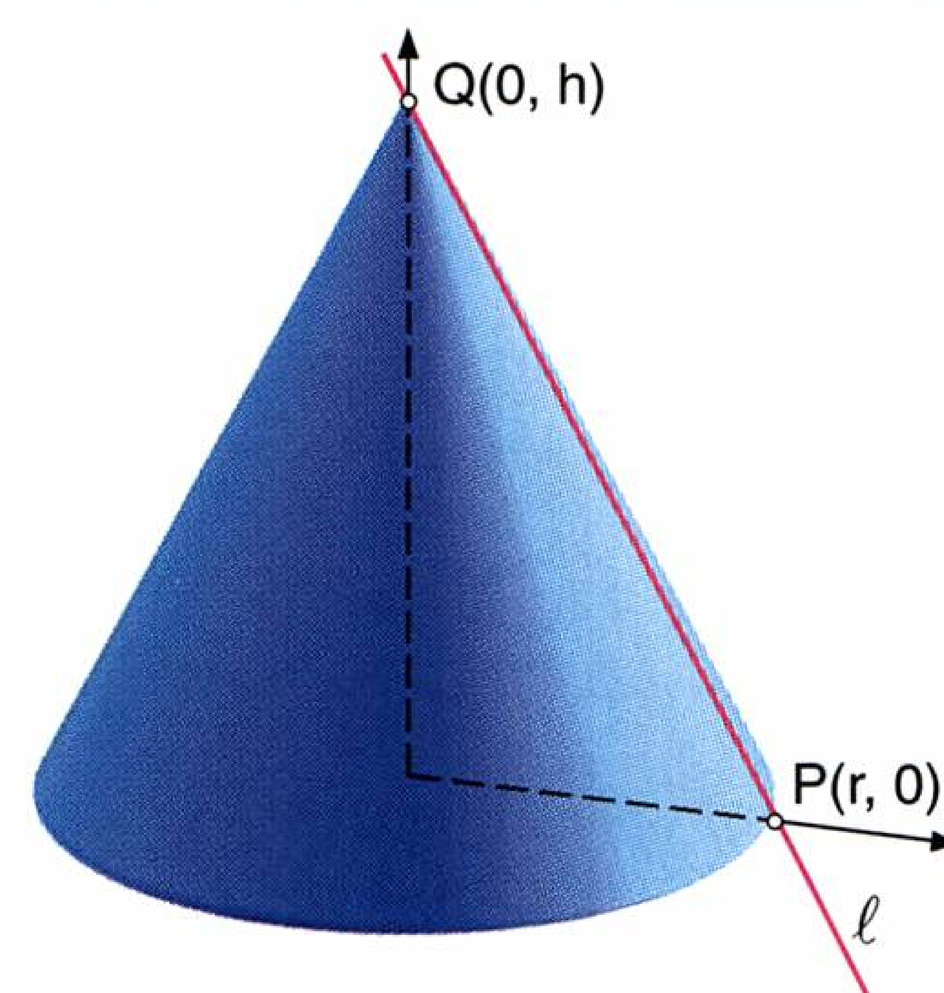
Lösung:

(1) Um den Drehkegel zu erzeugen, rotiert die Gerade ℓ um die y-Achse. ℓ hat die Form $y = kx + d$ und die Punkte P (r, 0) und Q (0, h) liegen auf der Geraden.

$0 = kr + d$

$h = d$ $\Rightarrow 0 = kr + h$

$k = -\frac{h}{r}$



$\Rightarrow$ die erzeugende Funktion hat die Gleichung $y = -\frac{h}{r}x + h$

$y = -\frac{h}{r}x + h \Leftrightarrow \frac{yr}{h} = -x + r \Leftrightarrow \mathbf{x = r - \frac{ry}{h}}$

(2) ② $J_s = \frac{\pi\rho}{2}\int_{y_1}^{y_2} x^4 dy = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h \left(r - \frac{ry}{h}\right)^4 dy = \frac{\pi\rho r^4}{2}\int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^4 dy = \dots = \frac{\pi\rho r^4 h}{10}$

(3) $V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow m = \rho \cdot V = \frac{\pi r^2 h\rho}{3}$

(4) $J_s = \frac{\pi\rho r^4 h}{10} = \frac{3r^2}{10}\cdot\frac{\pi r^2 h\rho}{13} = \frac{3r^2 m}{10}$ $\qquad J_s = \frac{3r^2 m}{10}$

Beispiel:

Die Parabel $y = \frac{1}{3}x^2$ rotiert im Intervall [0, 3] um die y-Achse. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_s des entstehenden Rotationskörpers bezüglich dieser Achse?

Lösung:

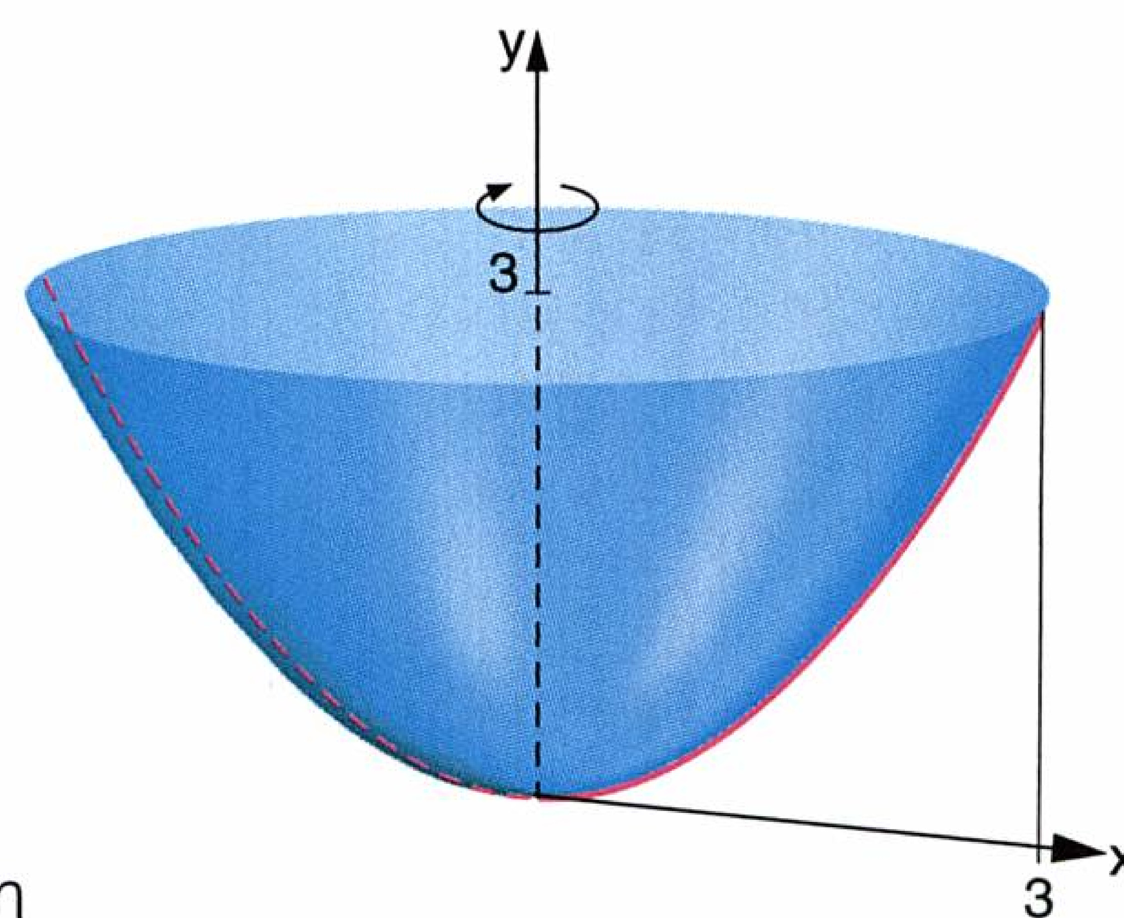
(1) entfällt

(2) $J_s = \frac{\pi\rho}{2}\int_{y_1}^{y_2} x^4 dy = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^3 \left(\sqrt{3y}\right)^4 dy = \frac{9\pi\rho}{2}\int_0^3 y^2 dy = \frac{9\pi\rho}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{81\pi\rho}{2}$

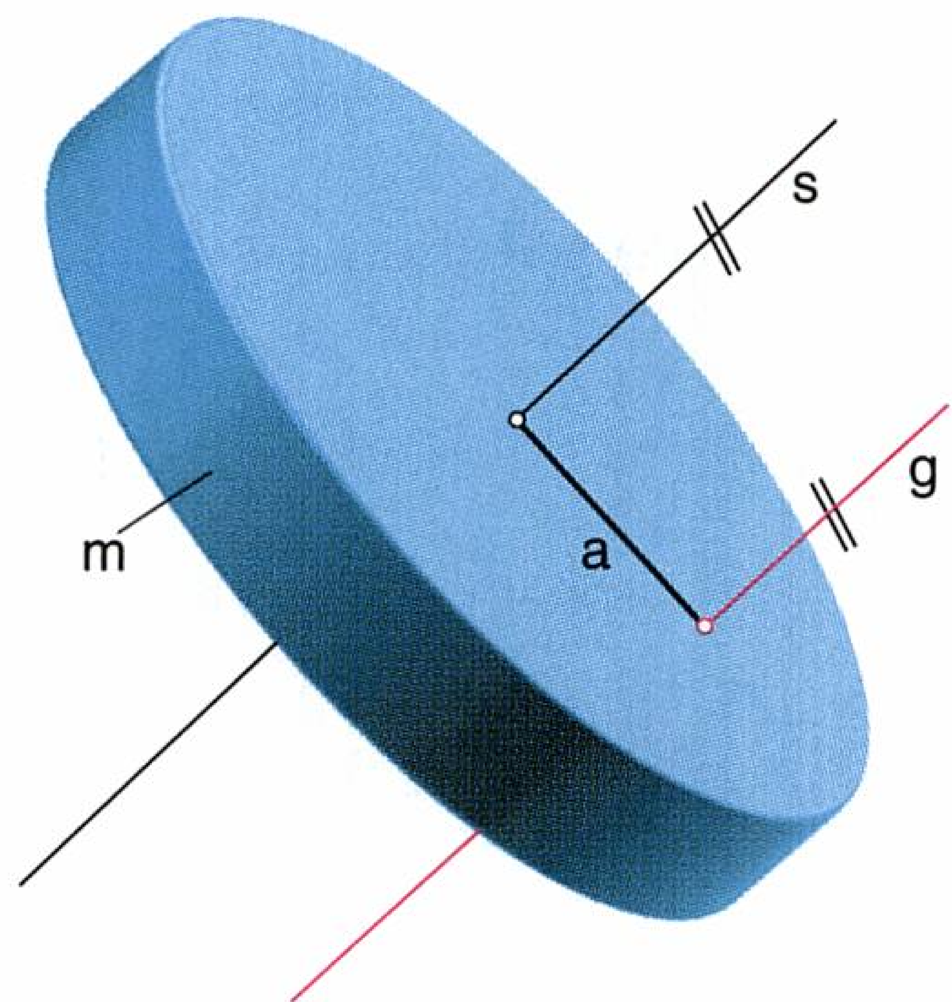
(3) Um das Trägheitsmoment J_y in Abhängigkeit von der Masse darzustellen, berechnen wir zunächst das Volumen V_y.

$V_y = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi\int_0^3 3y\,dy = 3\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27\pi}{2}$

(4) Mit der Beziehung $m = \rho \cdot V$ finden wir schließlich: $J_s = \frac{\frac{81\pi}{2}}{\frac{27\pi}{2}}m = 3m$



Angenommen es gilt $s \neq g$, d. h. die Symmetrieachse s des Rotationskörpers stimmt nicht mehr mit der Rotationsachse g überein. Sofern s parallel zu g ist, liefert uns der sogenannte **Satz von STEINER**[1] das nötige „Rüstzeug“:



J_s ..... Trägheitsmoment bezüglich Symmetrieachse
m ..... Masse des Körpers
a ..... Abstand der Achsen g und s

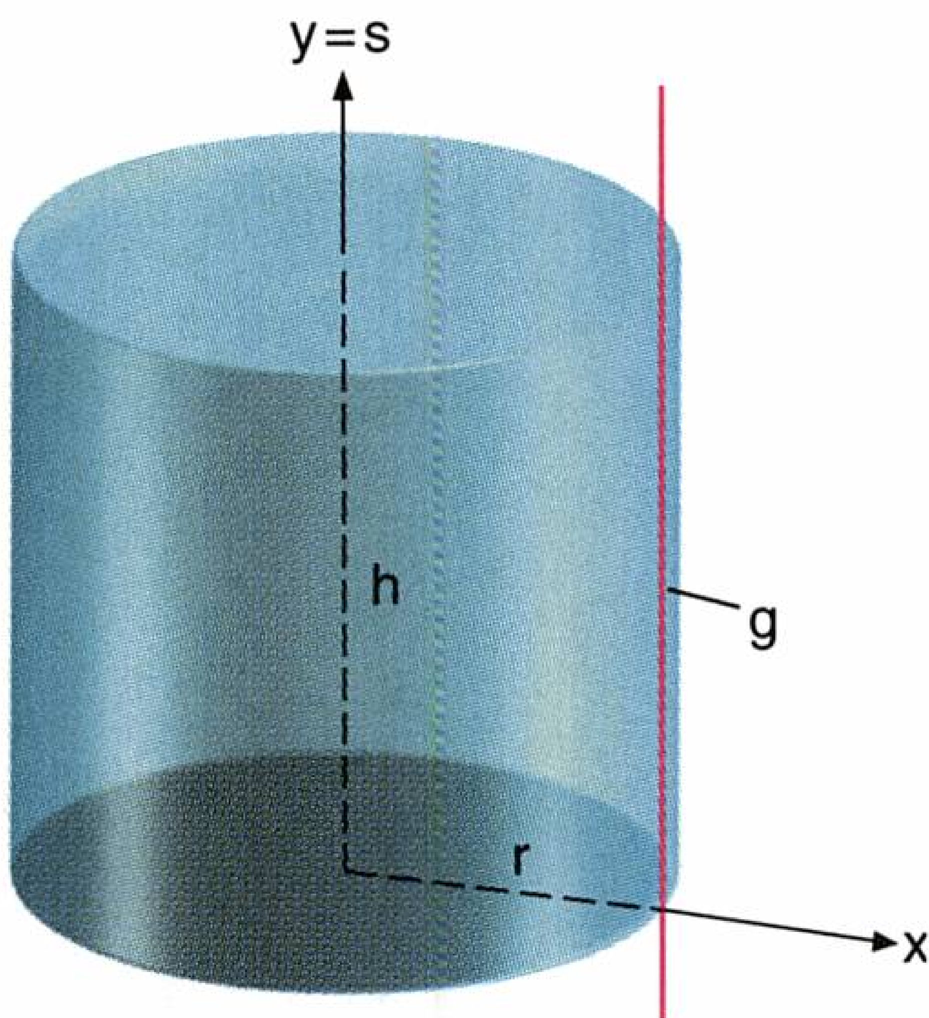
$$J_g = J_s + ma^2$$



Satz von STEINER:
Das Trägheitsmoment J_g eines Körpers bezüglich einer zur Symmetrieachse s parallelen Achse g ist gleich dem Trägheitsmoment J_s vermehrt um das Produkt aus der Masse m des Körpers und dem Quadrat des Abstandes a der beiden Achsen.

Beispiel:
Trägheitsmoment J_g eines Drehzylinders (r, h) bezüglich seiner Erzeugenden?

Lösung:
Wir berechnen zunächst das Trägheitsmoment J_s des Zylinders bezüglich der zu g parallelen Symmetrieachse. Der Zylinder sei durch Rotation der Geraden $x = r$ zwischen den Grenzen $y_1 = 0$ und $y_2 = h$ um die y-Achse entstanden.



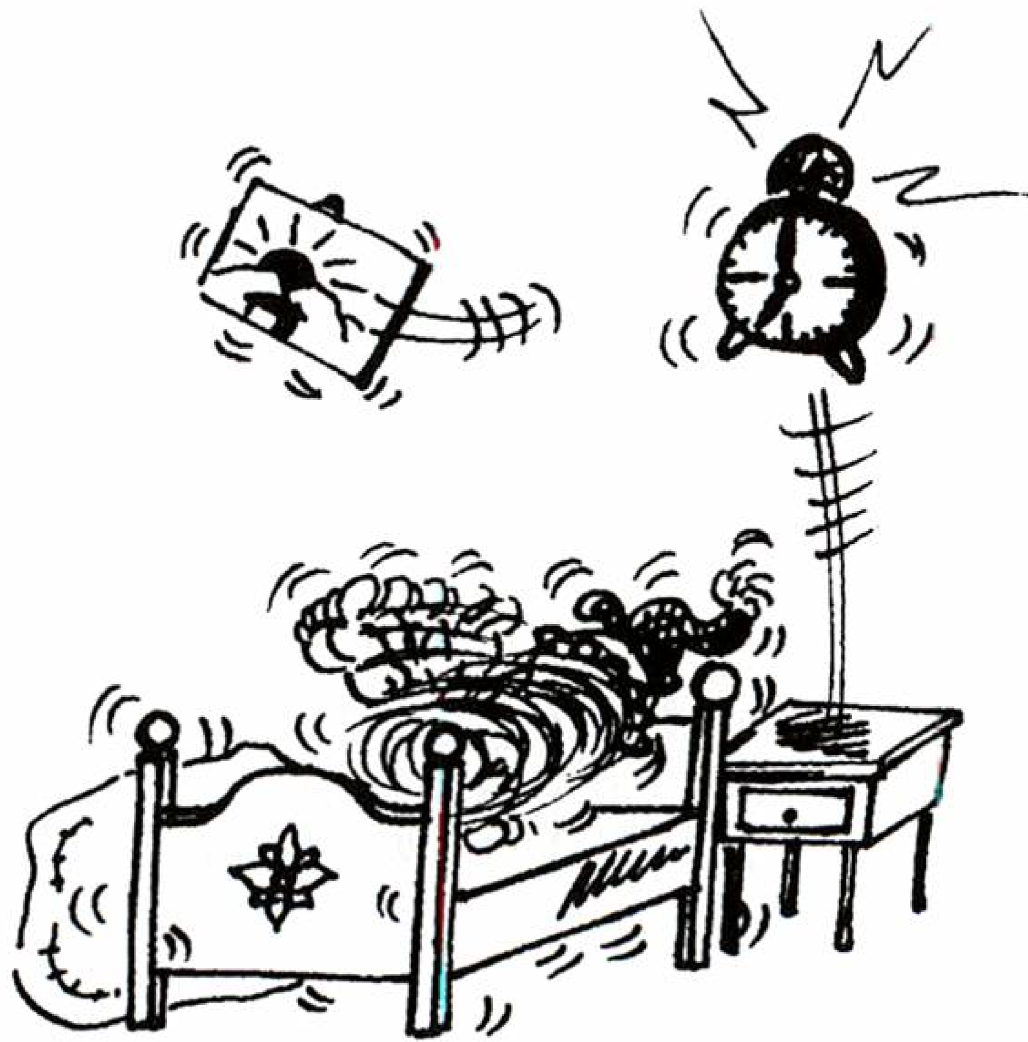
$$J_s = J_y = \frac{\pi\rho}{2}\int_{y_1}^{y_2} x^4\,dy = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h r^4\,dy$$
$$= \frac{\pi\rho r^4}{2}[y]_0^h = \frac{\pi\rho r^4 h}{2}$$
$$J_s = \frac{\pi\rho r^4 h}{2}$$

Mit dem Volumen $V = \pi r^2 h$ und $m = \rho \cdot V$ finden wir: $J_s = \ldots = \frac{mr^2}{2}$[2]
Nun ist aber der Abstand a der beiden Achsen gleich dem Radius r des Zylinders. Damit erhalten wir das gesuchte Trägheitsmoment J_g:

$$J_g = J_s + ma^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3mr^2}{2} \qquad J_g = \frac{3mr^2}{2}$$

Sofern die Achse, bezüglich der ein Trägheitsmoment zu berechnen ist, nicht mehr parallel zur Symmetrieachse ist, wird die Berechnung schwieriger; zwei solche Fälle behandeln wir in den Aufgaben **338.** und **339.**

Die Verallgemeinerung einfacher Problemstellungen bringt oft einen erheblichen Mehraufwand mit sich. So ist die Berechnung von Trägheitsmomenten unregelmäßiger Körper äußerst schwierig.



Das Trägheitsmoment wirkt sich dann aus, wenn man in der Früh vor lauter Trägheit einige Momente im Bett rotiert!

---

[1]) Benannt nach **Jakob STEINER** (1763–1863).
[2]) Vgl. Beispiel auf Seite **131** unten.

AUFGABEN

332. Gesucht ist das Trägheitsmoment J_s eines geraden Hohlzylinders (R, r, h) bezüglich seiner Symmetrieachse.

333. Trägheitsmoment J_s einer Kugel?

334. Die Graphen der Funktionen mit den nachstehenden Gleichungen rotieren um die x-Achse. Es ist das Trägheitsmoment J_s der entstehenden Rotationskörper zu bestimmen:

a) $y = \sin x,\ x_1 = 0,\ x_2 = \pi$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1$ **c)** $y = \sqrt{x},\ x_1 = 2,\ x_2 = 4$

335. Es ist das Trägheitsmoment J_s der Körper zu ermitteln, die durch Rotation der Graphen der Funktionen mit den folgenden Gleichungen um die y-Achse entstehen:

a) $y = \tan x,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$ **b)** $y = 2x^3,\ y_1 = 0,\ y_2 = 16$ **c)** $y^2 = x^3,\ y_1 = 1,\ y_2 = 4$

336. Trägheitsmoment J_t einer Kugel bezüglich einer Tangente t?

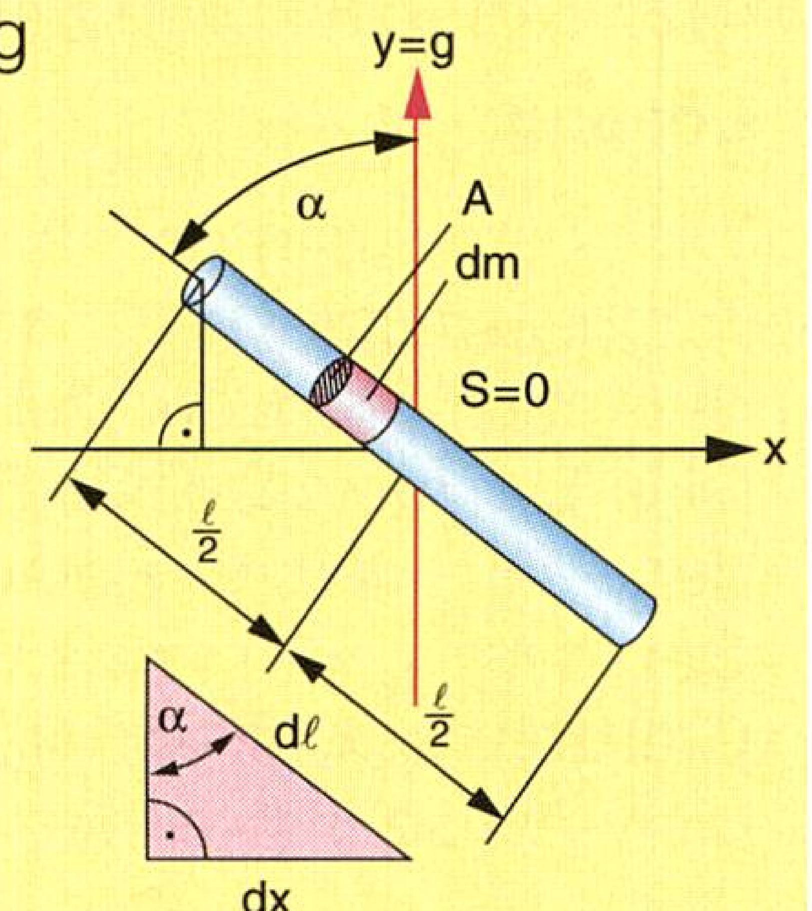
337. Man ermittle das Trägheitsmoment J_g eines Drehkegels bezüglich einer Achsenparallelen g im Abstand z.

338. Die rechte Spalte ist – entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte – auf einem separaten Blatt zu vervollständigen. Es ist das Trägheitsmoment eines dünnen Stabs bezüglich

einer normalen Achse g	einer gegen die normale Achse um den Winkel α geneigten Achse g

durch den Schwerpunkt S zu ermitteln.

$J_g = \int\limits_m r^2\, dm$ [1]	$J_g = \ldots$
$dm = \rho\, dV = \rho A\, dx$	$dm = \ldots dV = \ldots d\ell = \ldots dx$
$J_g = 2\rho A \int\limits_0^{\frac{\ell}{2}} x^2\, dx = \frac{2\rho A}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{\ell}{2}} = \frac{\rho A \ell^3}{12}$	$J_g = \ldots$
$m = \boxed{\rho A \ell}$	$m = \boxed{\ldots}$
$J_g = \boxed{\rho A \ell} \cdot \frac{\ell^2}{12} = \frac{m\ell^2}{12} \Rightarrow J_g = \frac{m\ell^2}{12}$	$J_g = \boxed{\ldots} \cdot \ldots = \ldots \Rightarrow J_g = \frac{m\ell^2}{12}\sin^2\alpha$



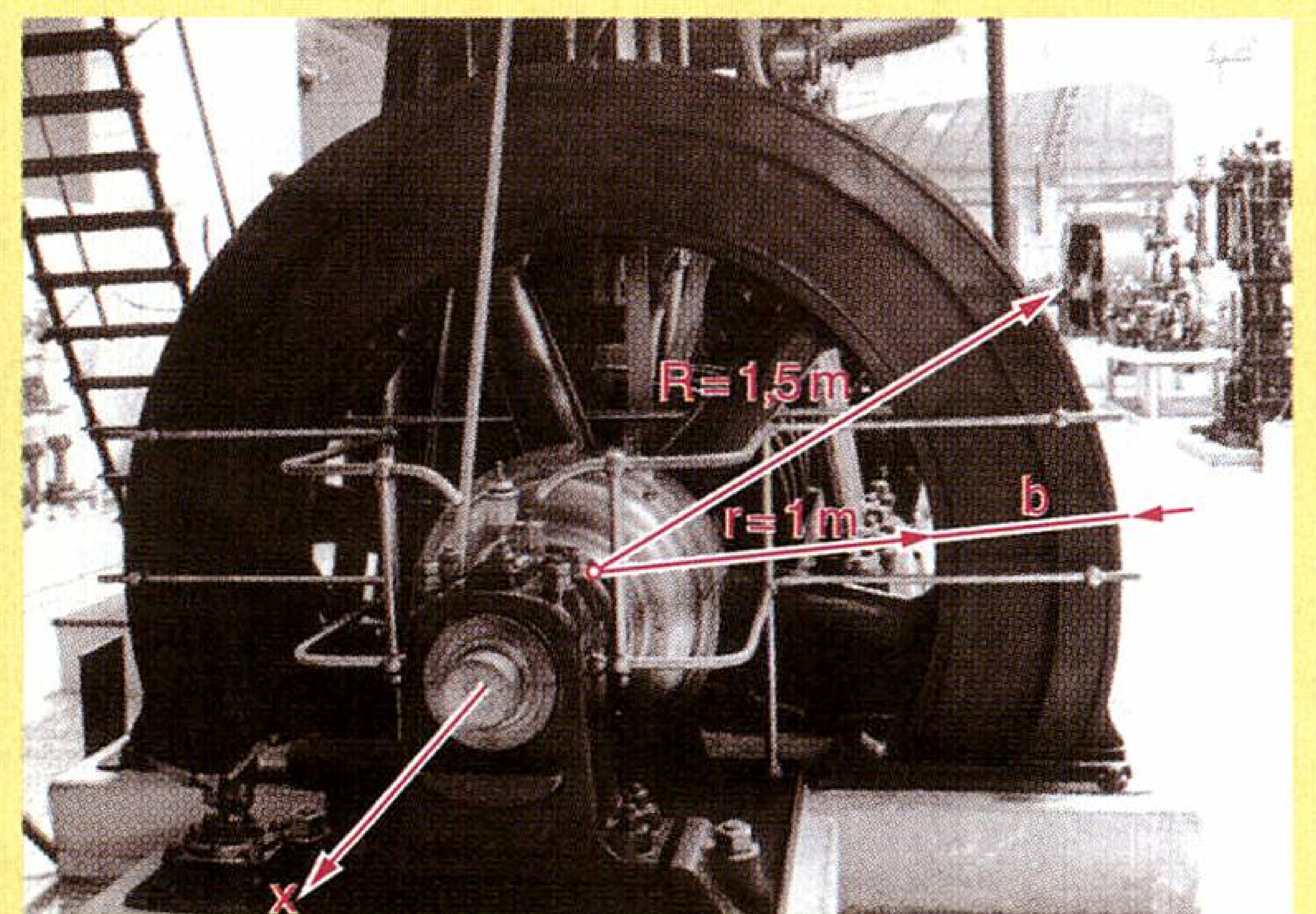
339. Es ist das Trägheitsmoment eines dünnen Stabs bezüglich **a)** einer normalen Achse durch einen Endpunkt **b)** einer gegen den Stab um den Winkel α geneigten Achse durch einen Endpunkt zu ermitteln.

340. Die Ellipse ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ rotiert **a)** um die x-Achse **b)** um die y-Achse. Es sind die Trägheitsmomente J_x bzw. J_y bezüglich der Rotationsachsen zu bestimmen.

341. a) Es ist das Trägheitsmoment eines Schwungrads zu ermitteln. Der Querschnitt ist rechteckig anzunehmen (a = 35 cm, b vgl. nebenstehende Figur, $\rho = 10{,}15\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$). Die Speichen sind zu vernachlässigen.

b) Wie viel Energie kann das Schwungrad bei 50 Umdrehungen pro Sekunde speichern?
Anleitung: $E_{rot} = \frac{J\omega^2}{2}$, ω ..... Winkelgeschwindigkeit.

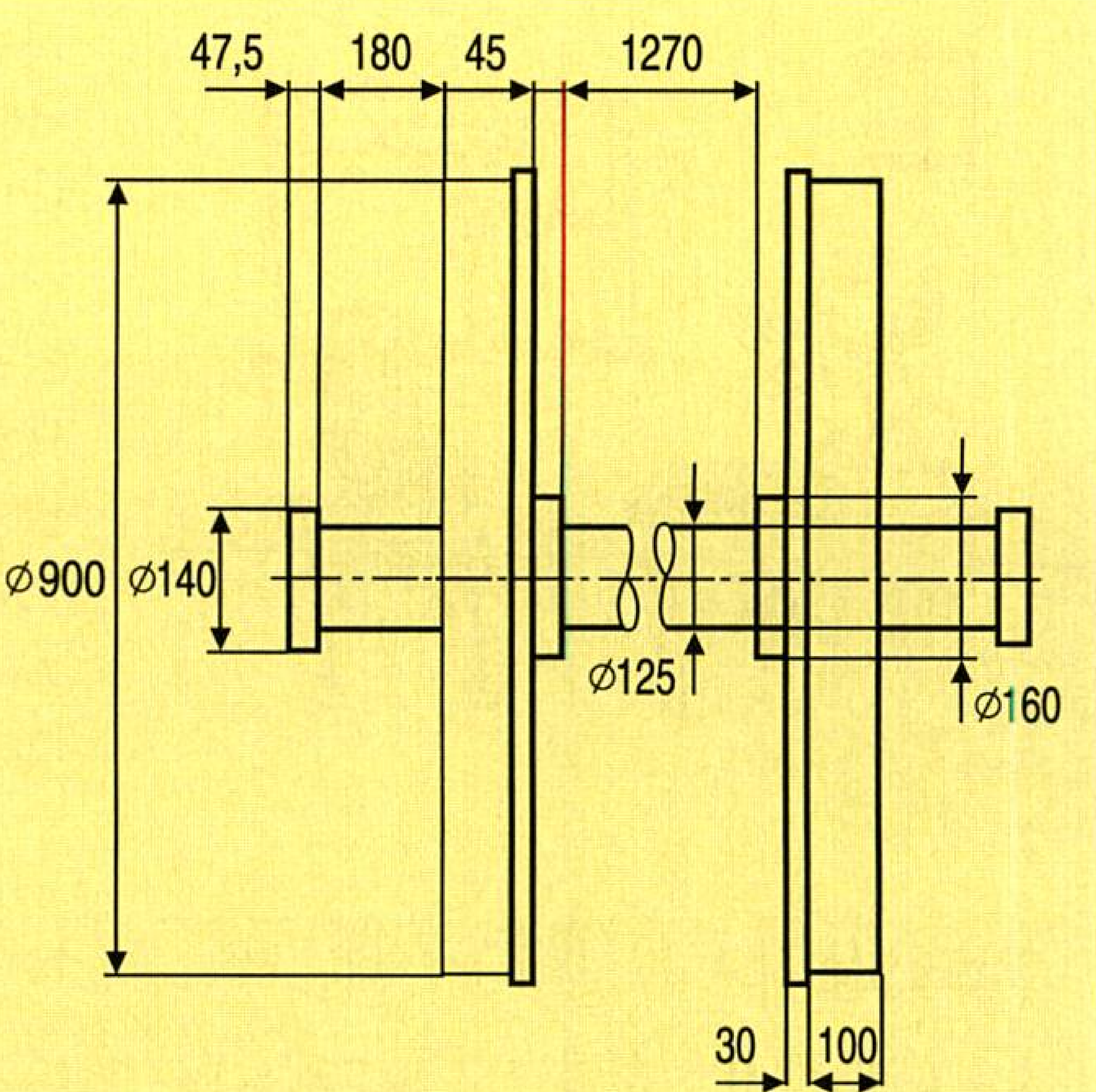
c) Wie lange würden 70 Einhundertwattbirnen bei der Energieversorgung aus **b)** leuchten?



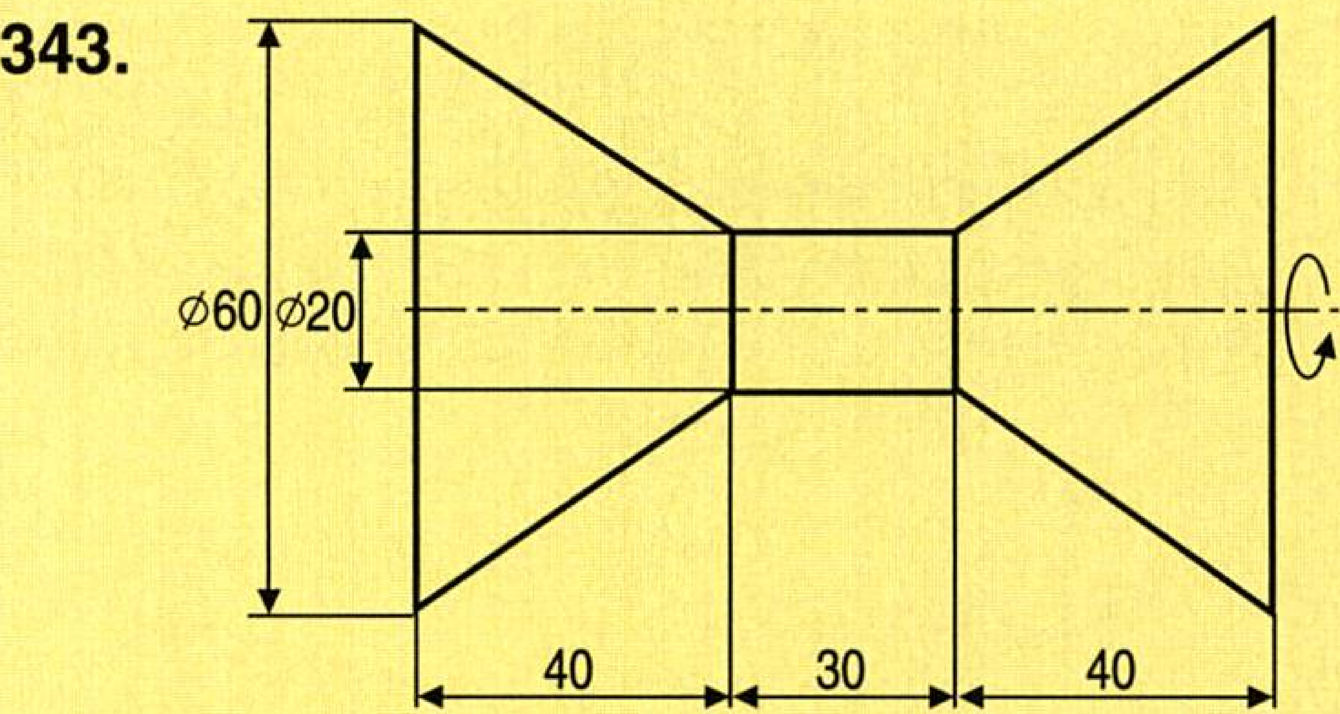
[1] Die Schreibung $\int\limits_m dm$ besagt, dass über alle differentiellen Massenteile zu integrieren ist, wobei die Integrations**variable** mit dem Integrations**bereich** gleichgesetzt wurde. Korrekt und ausführlich müsste die Schreibung lauten: $J_g = \int\limits_0^m (r(\overline{m}))^2\, d\overline{m}$

342. Es ist die Rotationsenergie einer Achse der Wagentype „Schlieren" zu berechnen, wenn der Zug mit 120 km/h durch die Landschaft braust.

Anleitung: Über den Radumfang lässt sich die Winkelgeschwindigkeit ω des Radsatzes berechnen und mit $E_{rot} = \frac{J\omega^2}{2}$ die Rotationsenergie. (ρ = 7,85 gcm^{-3})



343.



Ein Metalljojo (ρ = 8,11 gcm^{-3}) ist mit einer 80 cm langen Schnur umwickelt (vgl. nebenstehende Figur). Angenommen, die gesamte potentielle Energie wird beim Herunterfallen in Rotationsenergie umgeformt; wie schnell dreht sich dann das Jojo?

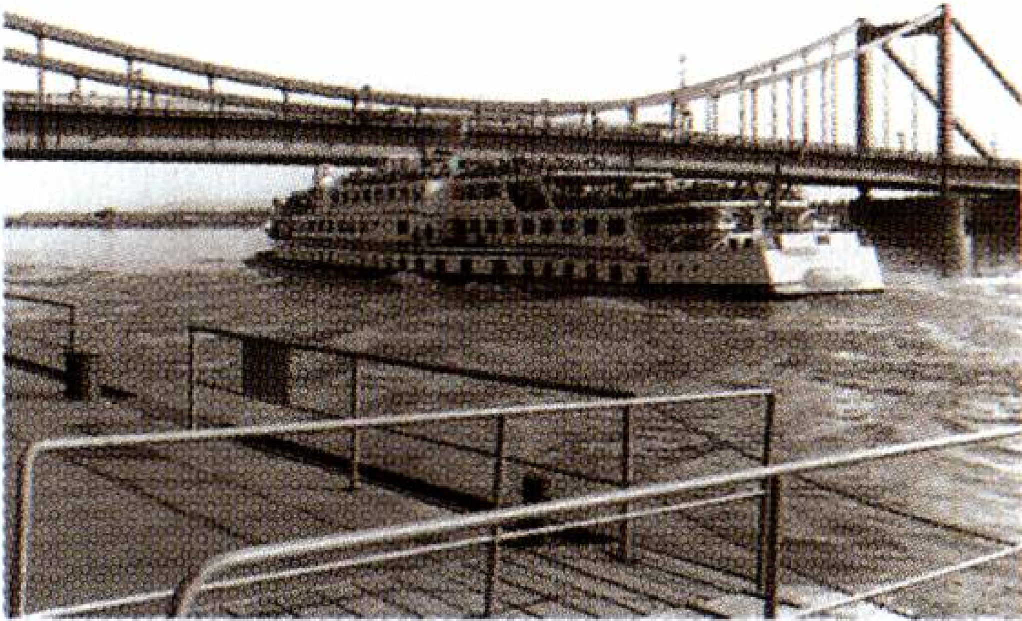
8.2 Trägheitsmomente von Flächen

Am 1. August 1976 stürzte die Wiener Reichsbrücke zwischen 4.43 Uhr und 4.45 Uhr vollständig ein. Mehr als 4 Jahre später, am 8. November 1980, wurde die „ Neue Wiener Reichsbrücke" feierlich eröffnet. Für ihre Projektierung haben österreichische Ingenieure unter anderem die Belastbarkeit von Stahlträgern, also

— die Knickkräfte und

— die Torsions- und Biegespannungen

mit großer Sorgfalt ermittelt. Hierbei spielten sogenannte **Flächenträgheitsmomente** eine entscheidende Rolle. In diesem Abschnitt wollen wir Flächenträgheitsmomente behandeln und die entscheidenden Formeln vorweg angeben:



Das obige Foto aus den frühen Siebzigerjahren des 20. Jahrhunderts zeigt jene „Wiener Reichsbrücke", die am 1. August 1976 eingestürzt ist.

Flächenträgheitsmomente

auf die x-Achse bezogen:

y, y=f(x), dA, A, x_1, x_2, x=g

① $$J_x = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2} y^3\,dx$$

auf die y-Achse bezogen:

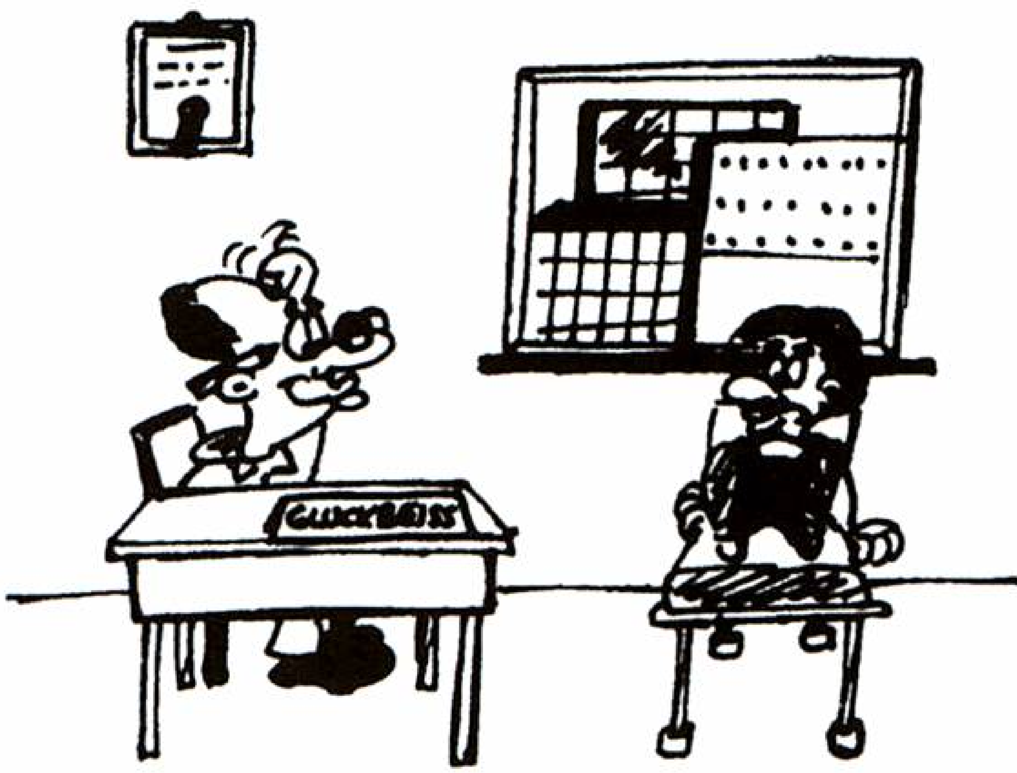
y=g, y=f(x), dA, A, x_1, x_2, x

② $$J_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 y\,dx$$



Das obige Foto zeigt die „Neue Wiener Reichsbrücke". Ihre ungeheuren Träger müssen Lasten bis zu 1300 t tragen können.

Beachtenswert ist, dass in beiden Formeln nach x integriert wird.



Nervenimpulse zum und vom Gehirn erreichen die Geschwindigkeit von Rennwagen: Die schnellsten, 1966 gemessenen Impulse, hatten eine Geschwindigkeit von 290 km/h. Doch die menschliche Lernkapazität ist nicht unbegrenzt. Unbegrenzt sind, wie wir wohl alle wissen, nur die Dummheit und die Faulheit. Wie kann man sich Formel (1) und (2) merken?

Psychologen und Lernforscher haben die Antwort in unzähligen Dissertationen wissenschaftlich untermauert: Durch Nachbereiten und gezieltes Wiederholen! Wer einen Lehrstoff wenigstens 3-mal vergessen und dann wieder gelernt hat, kann sicher sein, dass er ihm im Gedächtnis haften bleibt.

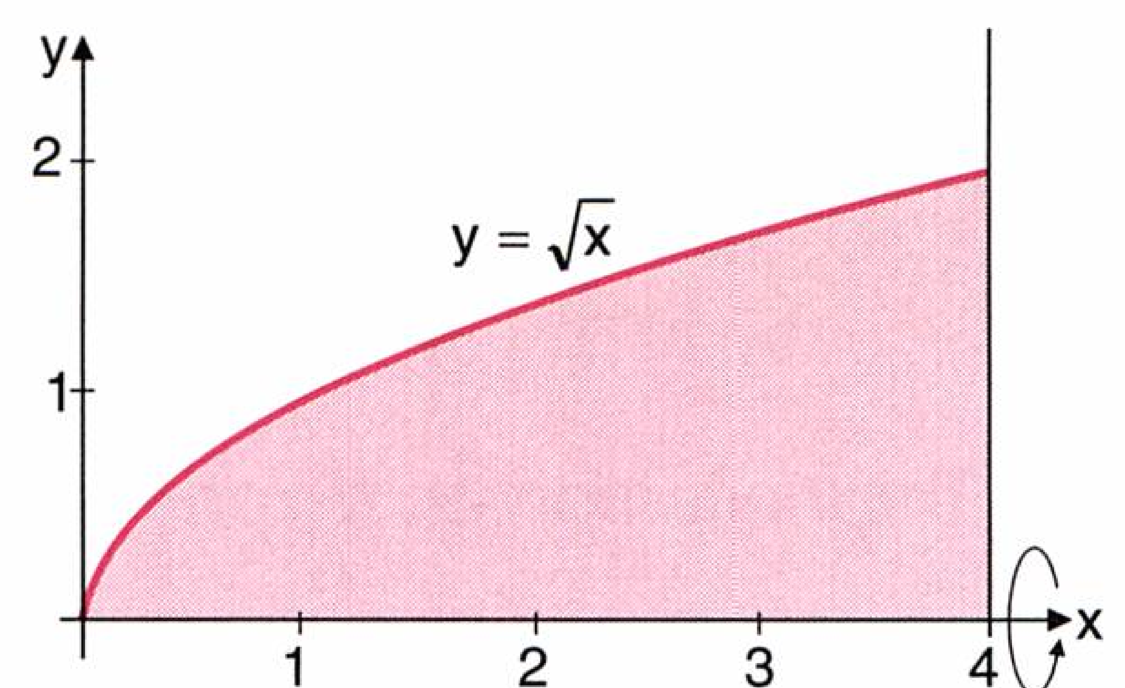
Beispiel:

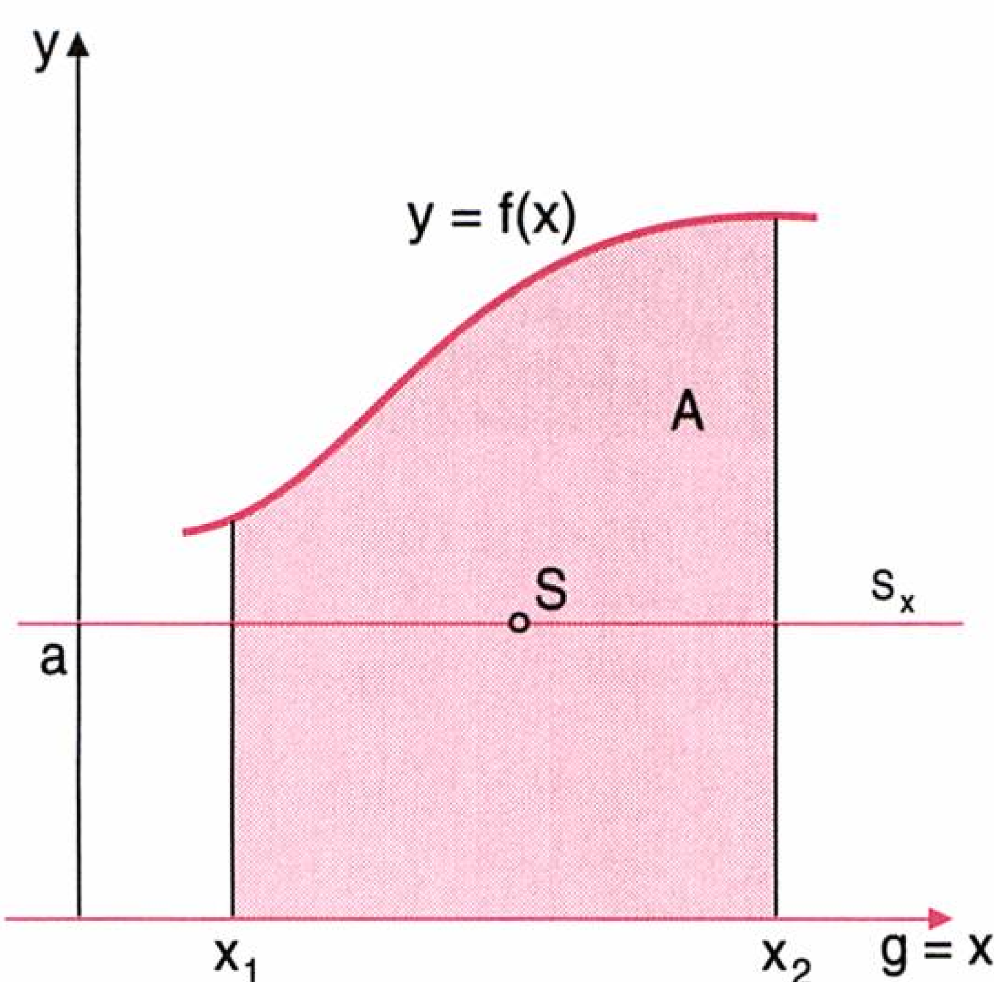
Es sind die Flächenträgheitsmomente J_x, J_y des von der Funktion $y=\sqrt{x}$ und den beiden Geraden $y=0$, $x=4$ eingeschlossenen Flächenstücks bezüglich der **a)** x- bzw. **b)** y-Achse zu ermitteln.

Lösung:

a) (1) $J_x=\frac{1}{3}\int\limits_{x_1}^{x_2} y^3\,dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{15}\cdot 32=\frac{64}{15}\qquad J_x=\frac{64}{15}$

b) (2) $J_y=\int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 y\,dx=\int\limits_0^4 x^2\sqrt{x}\,dx=\int\limits_0^4 x^{\frac{5}{2}}\,dx=\frac{2}{7}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]_0^4=\frac{256}{7}\qquad J_y=\frac{256}{7}$





Um Trägheitsmomente bezüglich der Schwereachse zu bestimmen, benötigen wir den sogenannten **Satz von STEINER**, der bei Flächenträgheitsmomenten wie folgt formuliert werden kann:

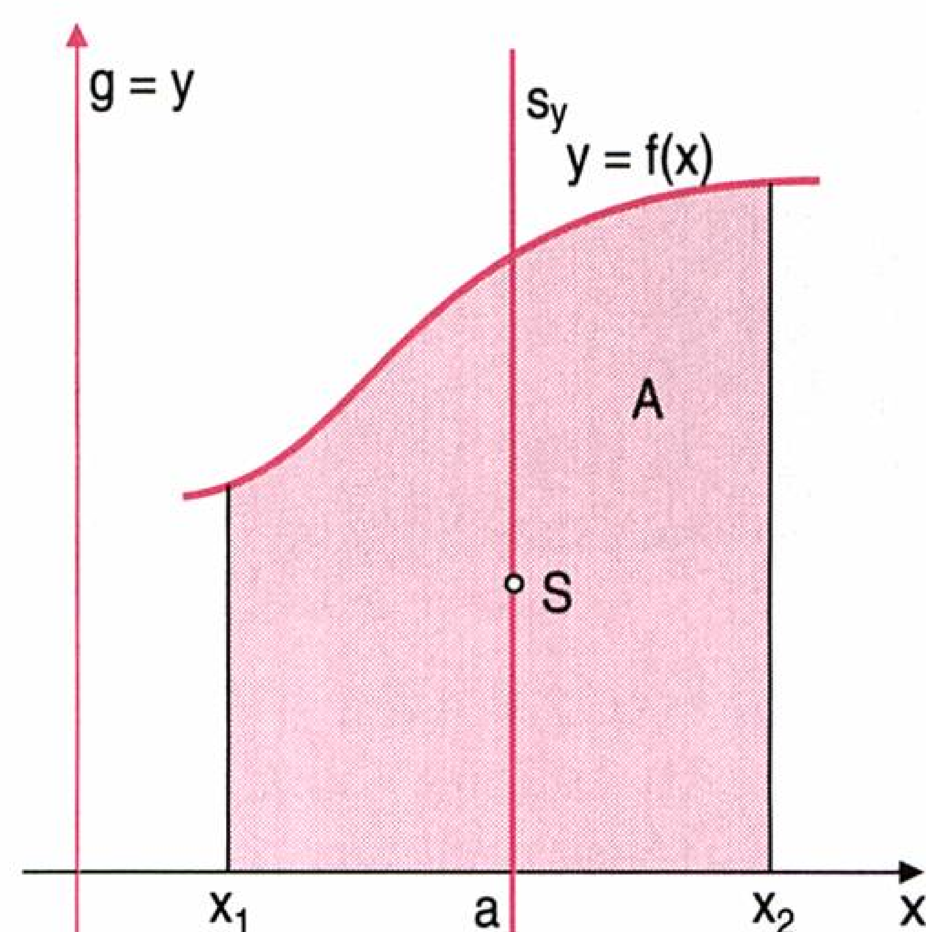
$$J_g=J_s+Aa^2$$

J_g ..... Trägheitsmoment einer zur Schwereachse s parallelen Achse g

J_s ..... Trägheitsmoment bezüglich der Schwereachse s

A ..... Flächeninhalt

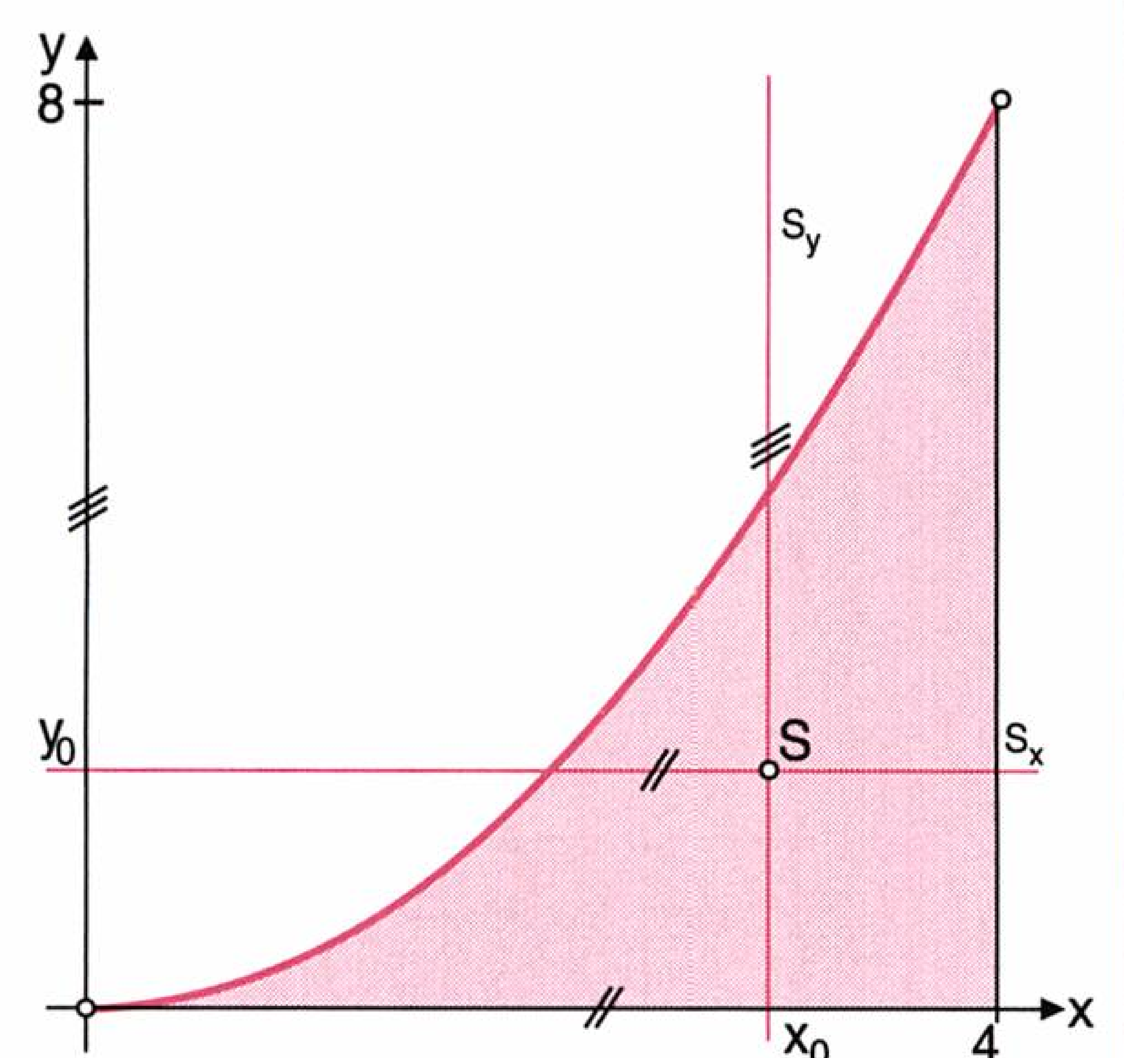
a ..... Abstand der beiden Achsen



Es ist zu beachten, dass der Abstand a bei beiden Achsen natürlich verschieden groß ist. Es gilt: $\overline{s_x x}=y_0$ bzw. $\overline{s_y y}=x_0$ (Vgl. Figur.)

Beispiel:

Es sind der Schwerpunkt S und die Trägheitsmomente J_x, J_y, J_{s_x}, und J_{s_y} des von den Kurven $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=0$ und $x=4$ begrenzten Flächenstücks zu ermitteln.



Lösung:

(1) $M_x = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{4}x^4\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{128}{5}$

$M_y = \int\limits_{x_1}^{x_2} xy\,dx = \int\limits_{0}^{4} \frac{1}{2}x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 32$

$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4} x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$

$x_0 = \frac{M_y}{A} = \frac{32}{\frac{32}{3}} = 3 \quad y_0 = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{128}{5}}{\frac{32}{3}} = \frac{12}{5} \Rightarrow \mathbf{S\left(3, \frac{12}{5}\right)}$

(2) $J_x = \frac{1}{3}\int\limits_{x_1}^{x_2} y^3\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{8}x^6\,dx = \frac{1}{24}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^4 = \frac{2048}{21} \Rightarrow \mathbf{J_x = \frac{2048}{21}}$

$J_y = \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 y\,dx = \int\limits_{0}^{4} \frac{1}{2}x^4\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{512}{5} \Rightarrow \mathbf{J_y = \frac{512}{5}}$

(3) $J_x = J_{S_x} + Aa^2 \Rightarrow J_{S_x} = J_x - Ay_0^2 = \frac{2048}{21} - \frac{32}{3}\cdot\frac{144}{25} = 36{,}08 \quad \mathbf{J_{S_x} = 36{,}08}$

$J_y = J_{S_y} + Aa^2 \Rightarrow J_{S_y} = J_y - Ax_0^2 = \frac{512}{5} - \frac{32}{3}\cdot 9 = 6{,}4 \quad \mathbf{J_{S_y} = 6{,}4}$

Rechenregel:

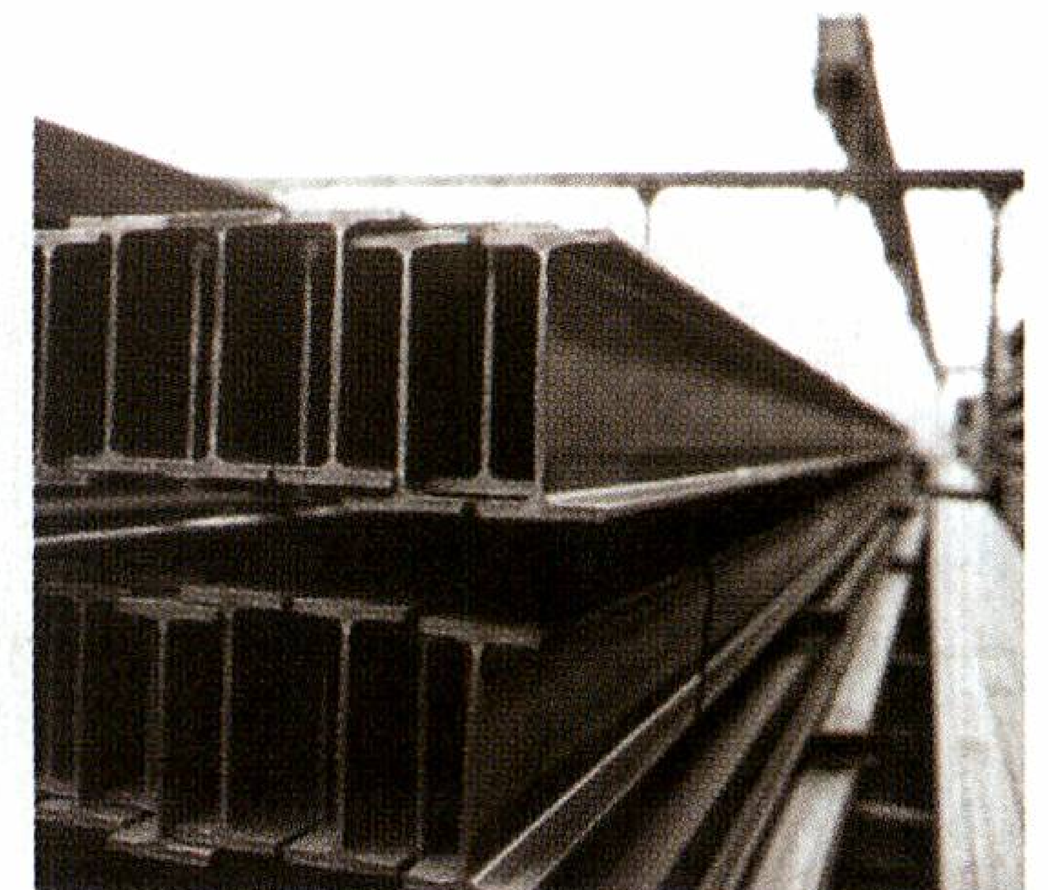
(1) Berechnung des Schwerpunktes S des Flächenstücks

(2) Ermittlung von J_x und J_y

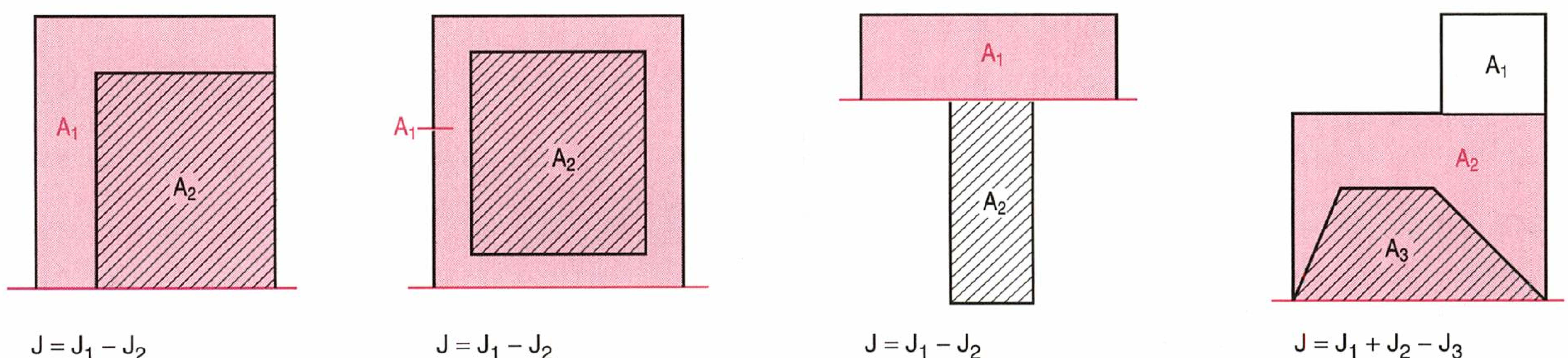
(3) Mit Hilfe des Satzes von STEINER werden J_{S_x} und J_{S_y} berechnet.

Nun ist es noch erforderlich, dass wir uns mit Querschnitten von Körpern, also mit Flächen beschäftigten, die nicht nur einfachste geometrische Figuren darstellen.

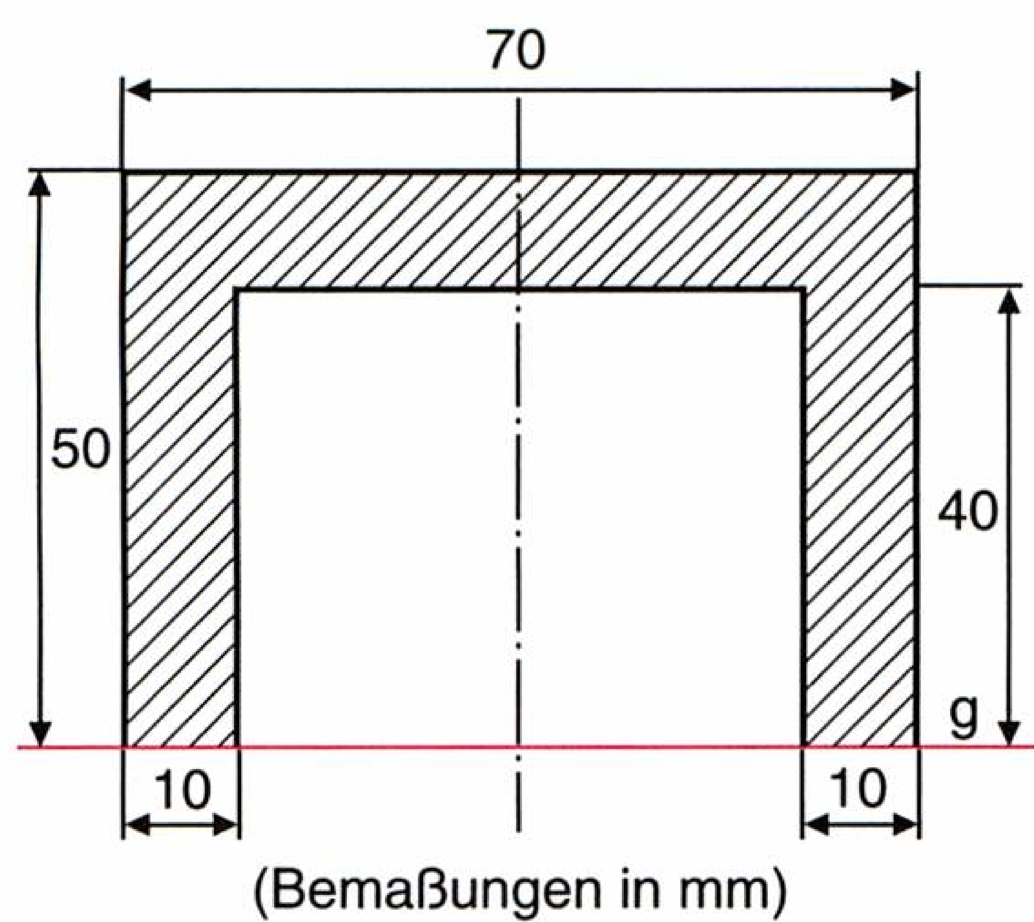
So sind z. B. die Stahlträger, wie sie auf der ganzen Welt im Hochbau verwendet werden, auf Grund der an sie gestellten Forderungen bezüglich Knickstabilität äußerst kompliziert geformt (vgl. Außenspalte).



Wie ermittelt man Flächenträgheitsmomente zusammengesetzter Figuren? Eine gute Idee ist es, die „Additivität“ ins Spiel zu bringen, also die folgende Eigenschaft von Flächenträgheitsmomenten: Die komplizierte Fläche kann in einfache Figuren zerlegt werden. Die Einzelmomente werden berechnet und schließlich aufsummiert.



$J = J_1 - J_2$ $\quad$ $J = J_1 - J_2$ $\quad$ $J = J_1 - J_2$ $\quad$ $J = J_1 + J_2 - J_3$

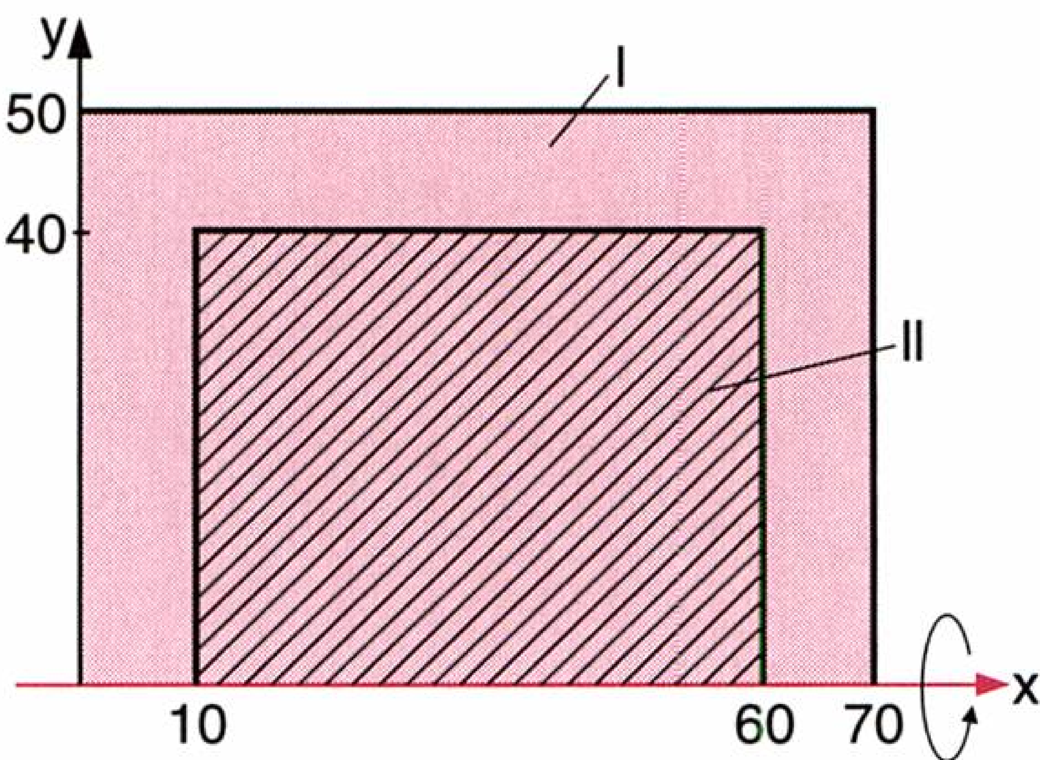


Beispiel:
Es ist das Flächenträgheitsmoment J der nebenstehenden Figur in Bezug auf die eingezeichnete Achse zu ermitteln.

Lösung:

(1) Wir wählen die x-Achse als s-Achse und legen den linken unteren Eckpunkt in den Ursprung. Für die Berechnung des Trägheitsmomentes benötigen wir Formel (1)

$$J_x = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2} y^3\,dx$$



(2) Die Fläche A lässt sich als Differenz der rosa unterlegten Fläche I und der Fläche II (schwarz schraffiert) darstellen: A = I – II

(3) Für Fläche I:

$y_I = 50, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 70$

(4) $J_I = \frac{1}{3}\int_0^{70} 50^3\,dx = \frac{125\,000}{3}[x]_0^{70} =$

$= 2\,916\,667$

Für Fläche II:

$y_{II} = 40, \quad x_1 = 10, \quad x = 60$

$J_{II} = \frac{1}{3}\int_{10}^{60} 40^3\,dx = \frac{64\,000}{3}[x]_{10}^{60} =$

$= 1\,066\,667$

(5) $J = J_I - J_{II} = 1850000$ $\mathbf{J = 1850000}$

Rechenregel:

(1) Wahl des Koordinatensysems
(2) Fläche als Summe bzw. Differenz von „einfachen“ Flächen
(3) Gleichung der jeweils erzeugenden Funktion? Grenzen?
(4) Berechung der Einzelträgheitsmomente
(5) Mit (2) wird das Gesamtmoment ermittelt.

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben sind die Flächenträgheitsmomente der durch die gegebenen Funktionen und Intervalle bestimmten Flächenstücke bezüglich der **(1)** x-Achse **(2)** y-Achse zu ermitteln:

344. **a)** $y = 3x^2$, $[1, 3]$ **b)** $y^2 = 2x^2$, $[0, 8]$

c) $y^3 = \frac{1}{2}x^2$, $[-2, 2]$ **d)** $y = 4x + 1$, $[3, 7]$

345. **a)** $y = \sin x$, $[0, \pi]$ **b)** $y = \cos^2 x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

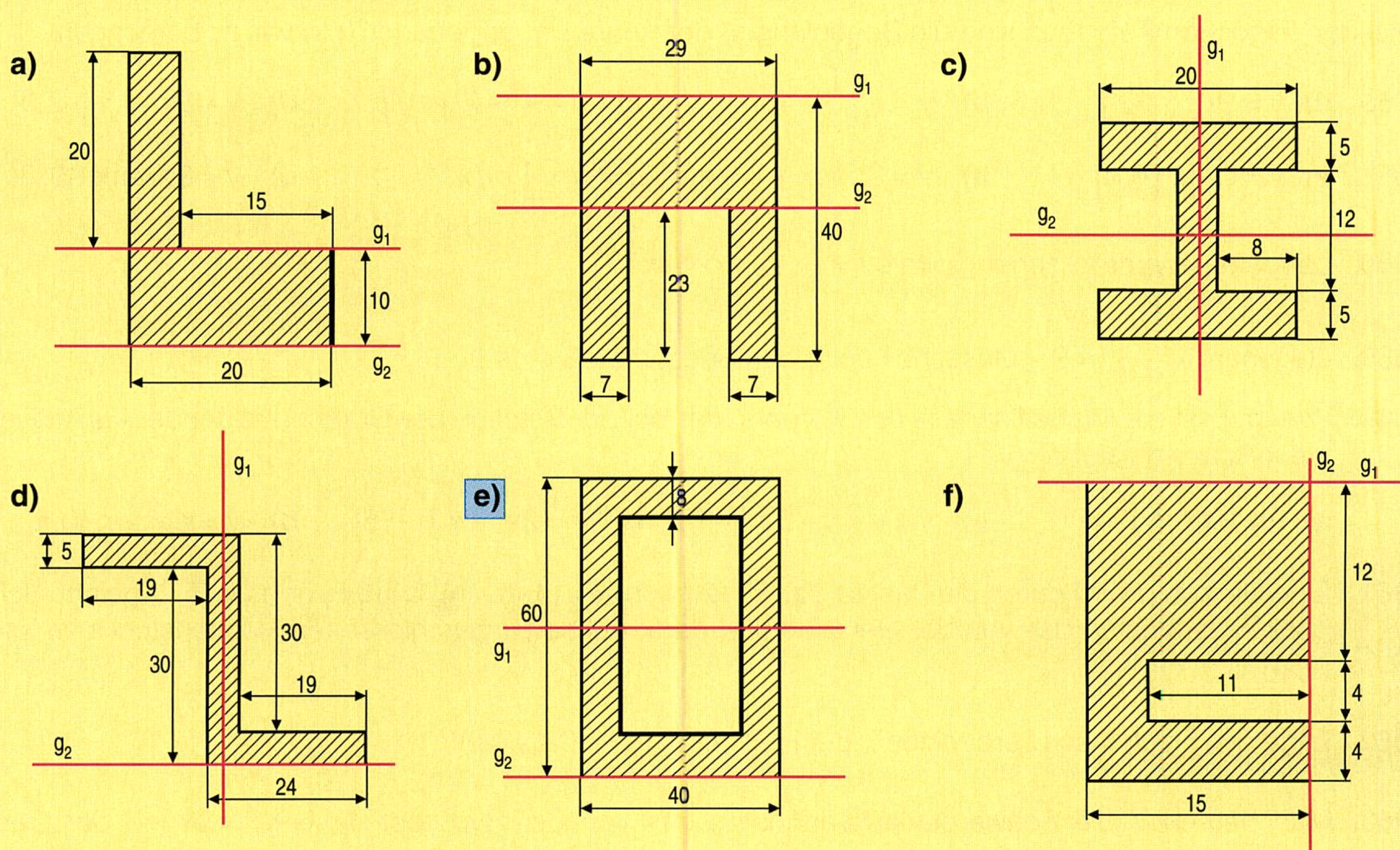
c) $y = e^x$, $[0, 1]$ **d)** $y = \ln x$, $\left[e^2, e^4\right]$

Bei den folgenden Aufgaben sind die Flächenträgheitsmomente der gegebenen Flächen bezüglich der **(1)** x-Achse **(2)** y-Achse zu ermitteln:

346. **a)** ell: $4x^2 + 2y^2 = 3$ **b)** hyp: $7x^2 - y^2 = 7, x \in [1, 10]$ **c)** par: $y^2 = 4x, x < 5$

347. **a)** k: $x^2 + y^2 = r^2$ **b)** par: $y^2 = \frac{1}{3}x$, $x < 9$ **c)** ell: $x^2 + 3y^2 = 10$

348. Man berechne die Flächenträgheitsmomente der nachstehenden zusammengesetzten Figuren bezüglich der beiden — rosa eingezeichneten — Achsen g_1 und g_2: (Bemaßung in mm)



349. Flächenträgheitsmoment eines rechtwinkeligen Dreiecks (a, b, c) bezüglich **a)** einer Kathete **b)** der Hypotenuse?

350. Man ermittle das Flächenträgheitsmoment eines Rechtecks (a, b) bezüglich seiner Diagonalen.

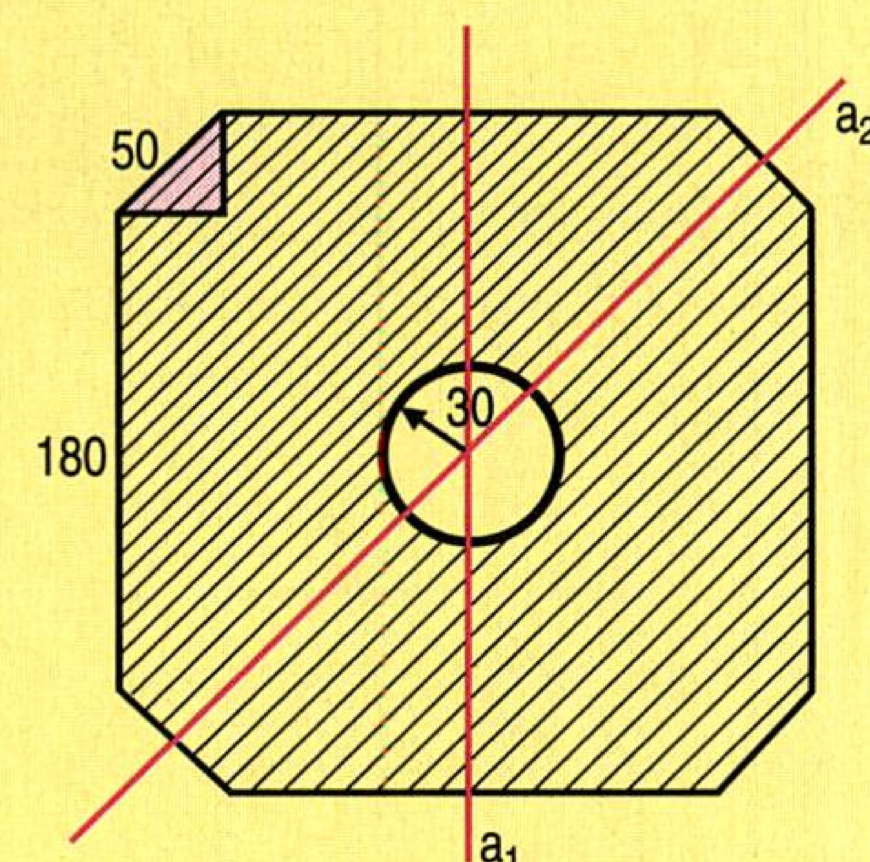
351. **Gegeben:** Regelmäßiges Sechseck
Gesucht: Flächenträgheitsmoment bezüglich einer Symmetrieachse.

352. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 4x$. Für das zwischen den Abszissen $x = 9$ und $x = 36$ liegende Flächenstück ist **a)** der Flächeninhalt **b)** der Schwerpunktsabstand x_0 **c)** das auf die x-Achse bezogene Trägheitsmoment **d)** das auf die zur y-Achse parallele Schwerachse bezogene Trägheitsmoment zu berechnen (Einheit = 1 cm).

353. In einen Kreis mit dem Radius r ist das Rechteck einzuschreiben, das **a)** die größte Fläche **b)** das größte Trägheitsmoment hat.

Bemerkung: Für die Ermittlung des Trägheitsmoments ist von jener Achse auszugehen, die auf einem Durchmesser des Kreises liegt und parallel zu einer Rechteckseite ist.

354. Gegeben ist der Querschnitt eines Balkens (vgl. nebenstehende Figur). Seine Länge beträgt 17300 mm, die Dichte $\rho=1800\ \text{kg/m}^3$. Es ist **a)** das Volumen V **b)** die Masse m **c)** die Flächenträgheits momente J_1 und J_2 bezüglich der eingezeichneten Achsen a_1 und a_2 zu berechnen.



355. Gegeben ist die Funktion $y = 6x^2 - 3x^3$. Gesucht sind: **a)** der Graph der Funktion **b)** die Hoch- und Tiefpunkte **c)** der Wendepunkt und die Gleichung der Wendetangente **d)** der Inhalt des Flächenstücks, das die x-Achse von der Kurve abschneidet **e)** der Schwerpunkt dieser Fläche **f)** die Trägheitsmomente dieser Fläche. **g)** Die Fläche von **d)** rotiert um die x-Achse. Volumen V? **h)** Schwerpunkt S des Körpers von **g)**?

Vermischte Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben sind die Bogenlängen der Kurven im gegebenen Intervall zu berechnen:

356. **a)** $y = 2x^2$, $[-3,1]$ **b)** $y = \frac{x^2}{10}$, $[0,4]$ **c)** $y = x^3 - 2$, $[-1,1]$ **d)** $y = 2x^3 + 1$, $[-2,0]$

357. **a)** $y = \sin x$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ **b)** $y = 2\cos x - 1$, $[-\pi, \pi]$ **c)** $y = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$, $[0,4]$ **d)** $y = 8x\tan x$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

358. Länge der hyperbolischen Spirale $r = \frac{1}{\varphi}$, $\frac{1}{10} \leq \varphi \leq 2\pi$?

359. **Gegeben:** $x^2 - y^2 = 9$ **Gesucht:** Länge des Bogens für $3 \leq x \leq 9$

360. Wie groß ist die Mantelfläche A des Körpers, der bei der Rotation der Graphen folgender Funktionen um die x-Achse entsteht?

a) $y = x + 1$ in $[0,4]$ **b)** $y = -\frac{2}{3}x + 5$ in $[-1,3]$ **c)** $y = 2x^2 - x$ in $[1,5]$ **d)** $y = \sin^2 x$ in $[0,\pi]$

361. Eine Gerade g wird durch die Punkte **a)** P_1 (2,1) und P_2 (4,4) **b)** Q_1 (0,8) und Q_2 (5,2) gelegt. Schwerpunktskoordinaten des von der Geraden und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks im Intervall [1, 4]?

362. Lage des Flächenschwerpunktes S der Parabel $y = ax^2$ $(0 \leq y \leq b)$?

363. Man berechne die Schwerpunktskoordinaten des von der Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ und der Geraden $x = \sqrt{10}$ eingeschlossenen Flächenstücks.

364. Schwerpunkt S der durch folgende Funktionen und Intervalle bestimmten Kurvenstücke?

a) $y = e^{x-1}$, $[-1,1]$ **b)** $y = x \ln x$, $[1,2]$ **c)** $y = \frac{3}{x^2}$, $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

365. Die durch folgende Eckpunkte bestimmten Flächen rotieren um die x-Achse. Man berechne das Volumen V und die Oberfläche O?

a) ABC [A (3, 7), B (5, 1), C (4, 9)] **b)** ABC [A (–5, 2), B (5, 2), C (0, 10)]

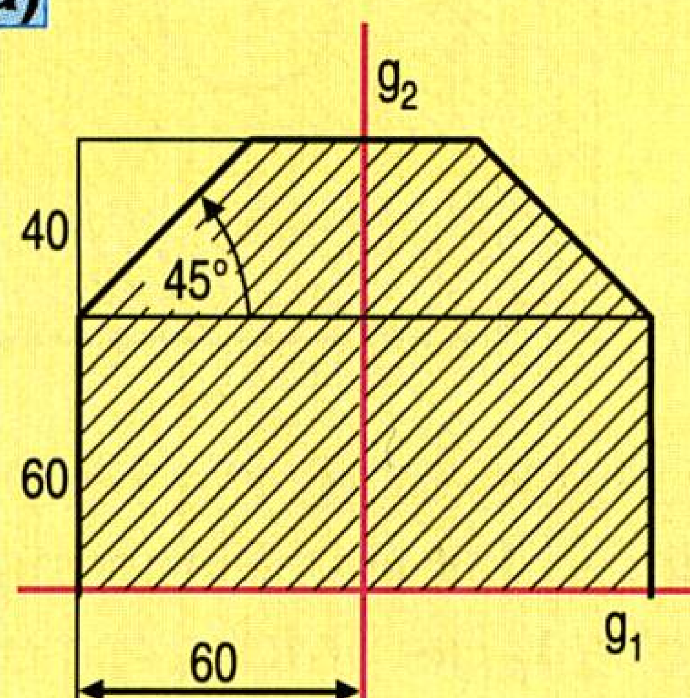
c) ABCD [A (–2, 3), B (6, 3), C (6, 4), D (–2, 4)] **d)** ABCD [A (–6, 7), B (–1, 1), C (4, 7), D (–1,10)]

366. Folgende Kurven rotieren im gegebenen y-Intervall um die y-Achse. Schwerpunkt S des entstehenden Rotationskörpers?

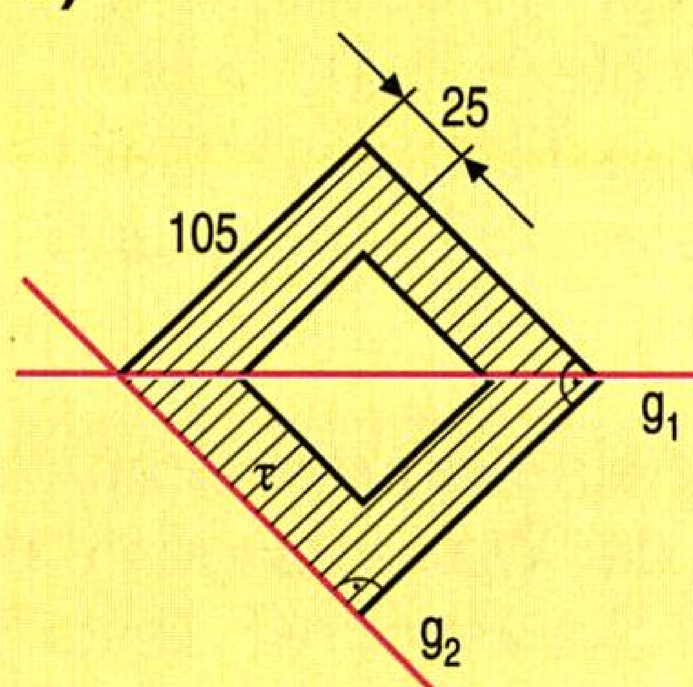
a) $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $[0, 8]$ **b)** $y = x^2 - 4$, $[-2, 2]$ **c)** $y = e^x$, $[0, 1]$ **d)** $y = \frac{1}{4}x\sqrt{x}$, $[1, 4]$

367. Man berechne die Flächenträgheitsmomente J_1 und J_2 der nachstehenden Figuren bezüglich der beiden — rot eingezeichneten — Achsen g_1 und g_2 (Bemaßung in mm).

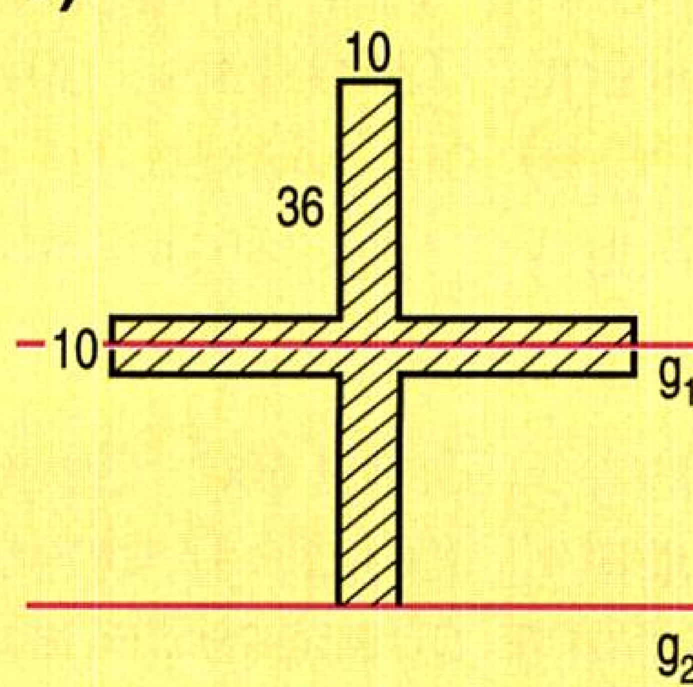
a)



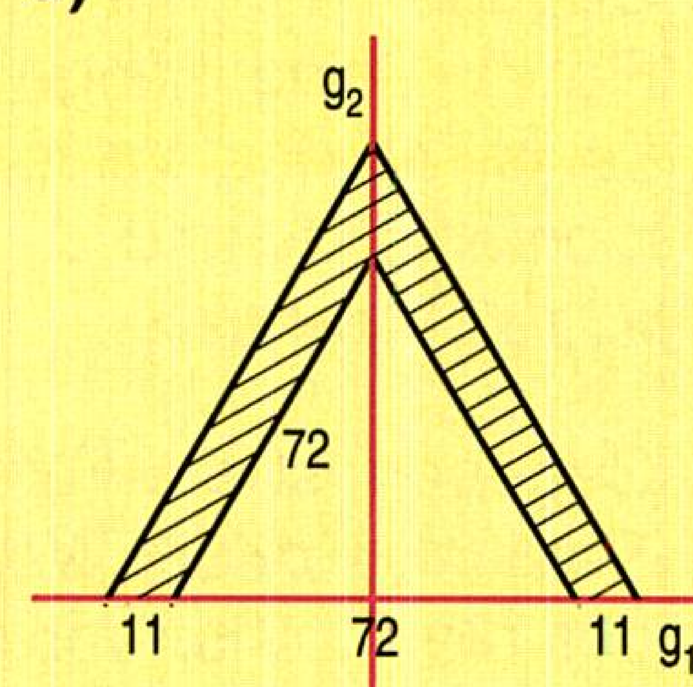
b)



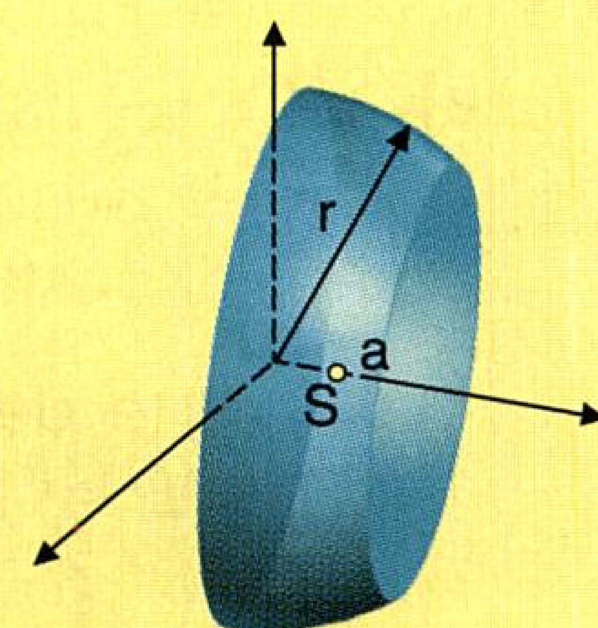
c)



d)



368. **Gegeben:** Kugelsegment (vgl. nebenstehende Figur)
Gesucht: Schwerpunkt S in Abhängigkeit der Höhe a.



369. Die Graphen der Funktionen mit den nachstehenden Gleichungen rotieren im gegebenen Intervall um die x-Achse und erzeugen so einen Rotationskörper. Es ist das Trägheitsmoment J_s dieses Rotationskörpers zu bestimmen.

a) $y = \sin\frac{x}{3}$, $x_1 = 0, x_2 = 3\pi$ **b)** $y = \sqrt[3]{x}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 9$

c) $y = \frac{1}{4}\tan x$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ **d)** $y = x^3 + 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 8$

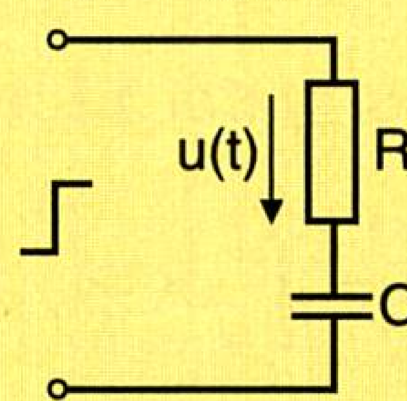
Problemstellungen der Physik und Technik

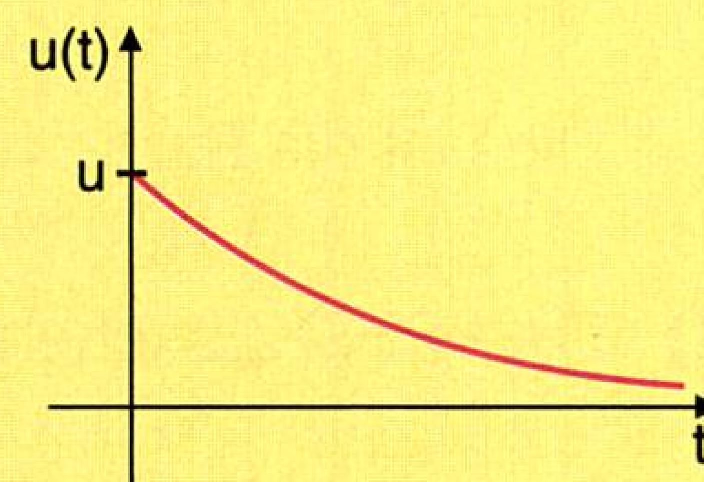
370. Die sogenannten **FRESNELschen Integrale** $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$, $\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx$ sind in der **theoretischen Optik** und in der **Antennentheorie** bedeutsam. Sie sind analytisch (elementar) nicht lösbar. Mit anderen Mitteln der Mathematik lässt sich zeigen: $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. In der Bautechnik werden diese Integrale in der Form $\int\limits_0^\infty \sin\frac{s^2}{2a}\,ds$, $\int\limits_0^\infty \cos\frac{s^2}{2a}\,ds$ verwendet. Sie bedeuten dort die Parameterdarstellung der **Klotoide**, einer Kurve, deren Krümmung linear mit der Bogenlänge s variiert. Wie groß ist ihr jeweiliger Wert?

Anleitung: Substitution.

371. Einem RC-Schaltkreis wird ein Spannungssprung U aufgeprägt. Dadurch ergibt sich am Widerstand R der Spannungsverlauf $u(t) = Ue^{\frac{-t}{RC}}$. Wie groß ist die Arbeit W am Widerstand?

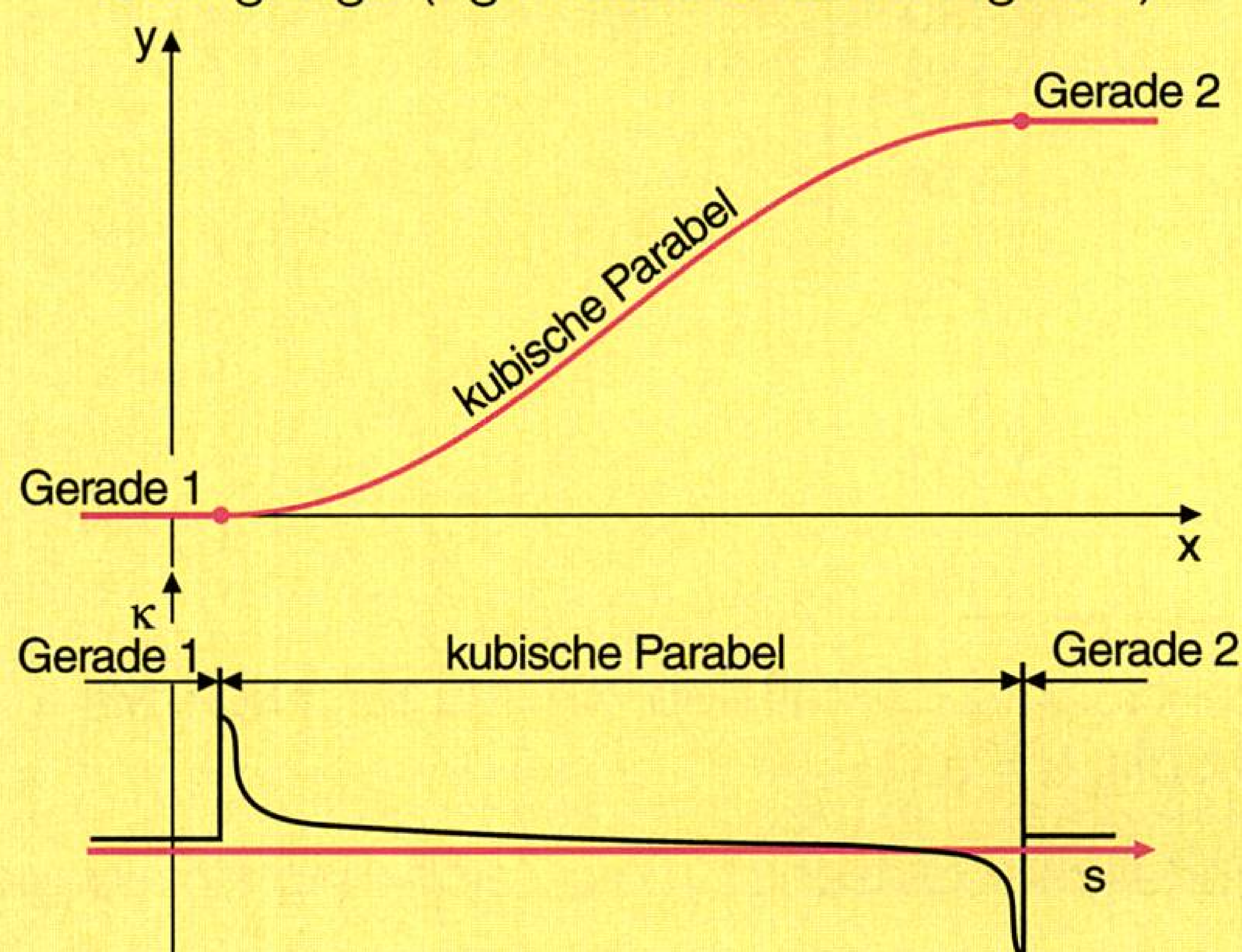
Anleitung: $W = \frac{1}{R}\int\limits_0^\infty (u(t))^2\,dt$

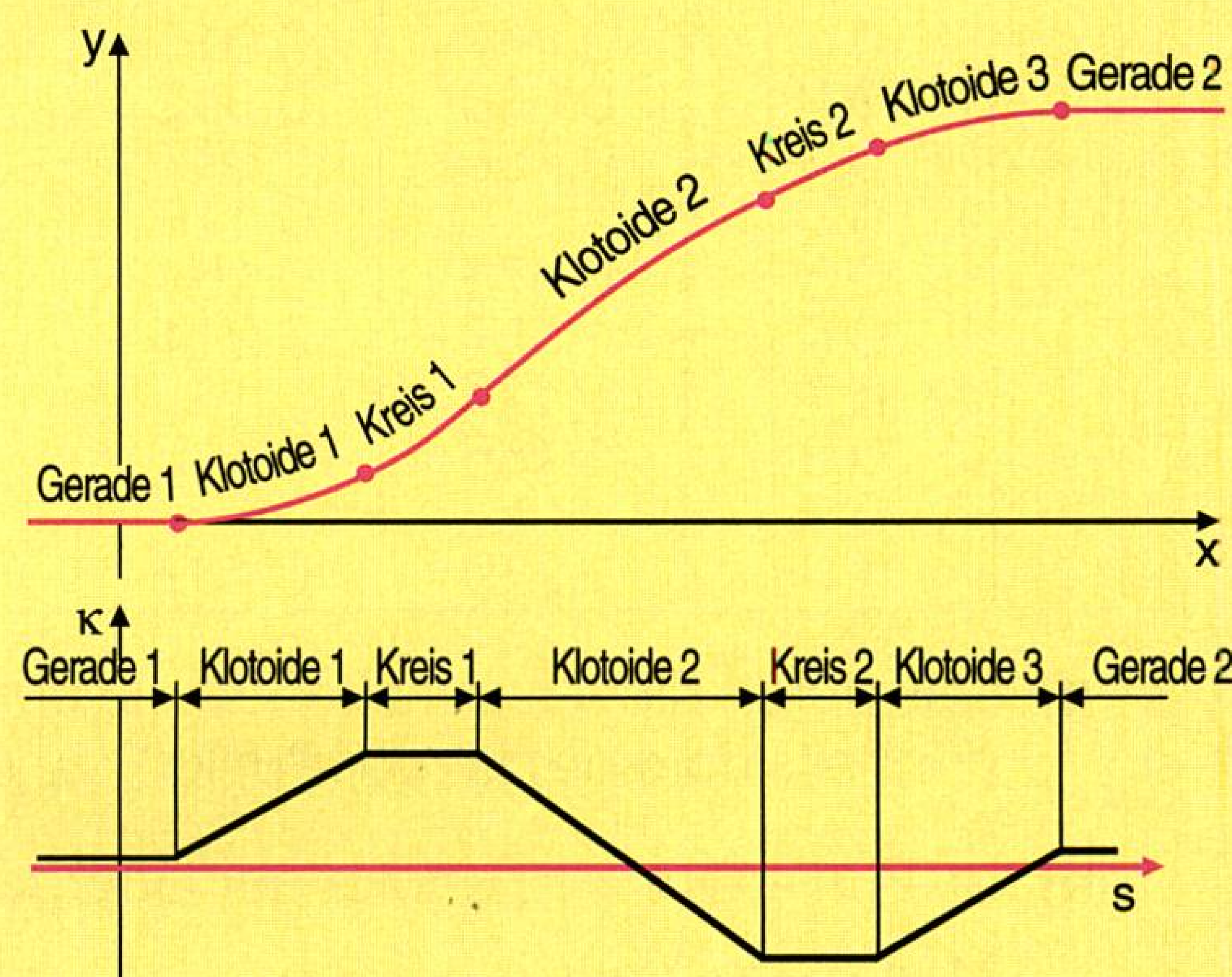




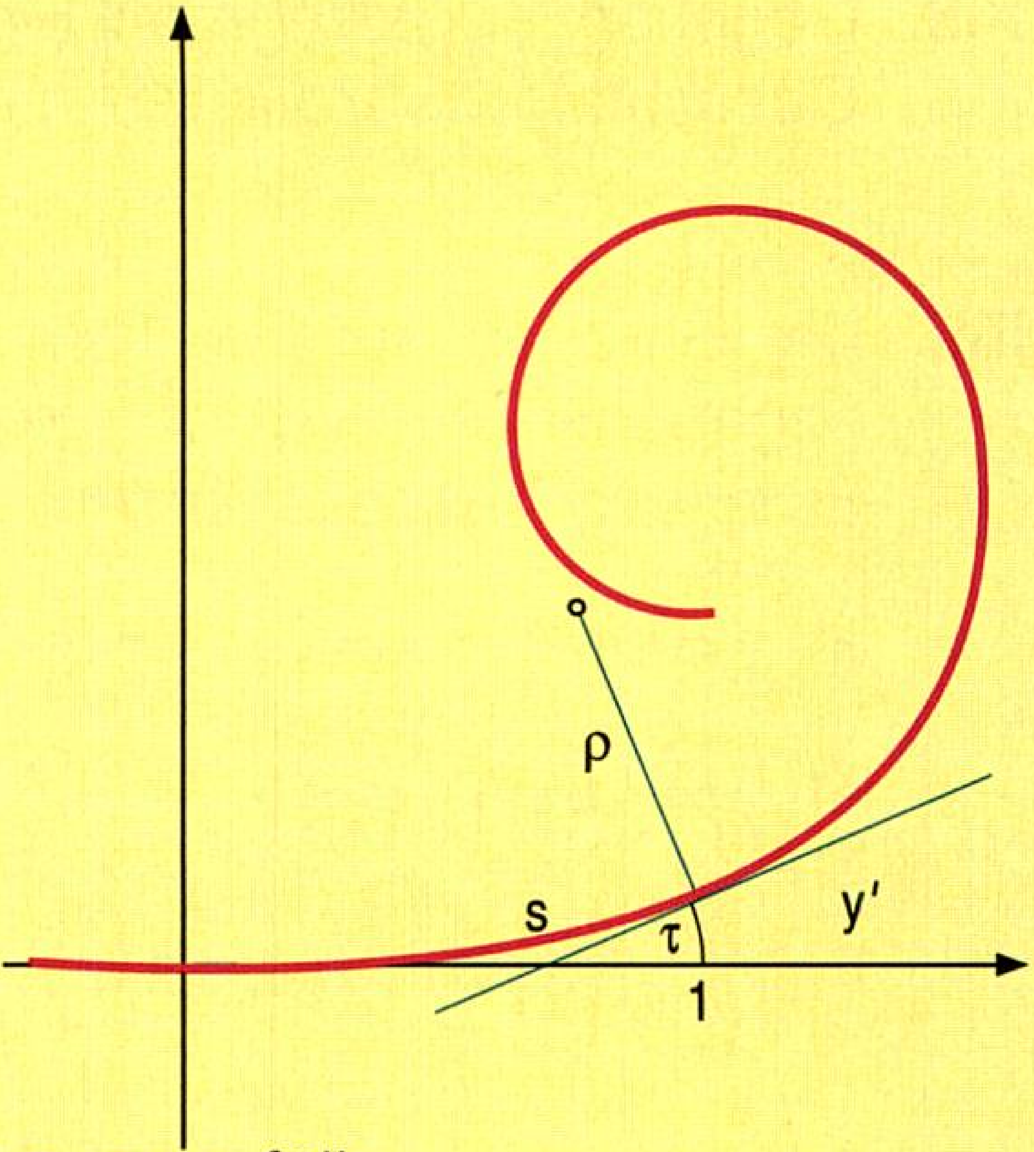
372. Im Straßenbau wird beim Trassieren, d. h. bei der Planung eines Straßenstücks, mit drei Grundelementen gearbeitet: Der Geraden, dem Kreisbogen und der **Klotoide**. Letztere hat drei Aufgaben zu erfüllen. Erstens soll sie die stetige Änderung der bei Kurvenfahrten auftretenden Zentrifugalbeschleunigung gewährleisten, zweitens dient sie als Übergangsstrecke für die Fahrbahnverwindung (Schräglage der Straßen in Kurven) und drittens muss sie für einen optisch befriedigenden Verlauf der Straße sorgen.

Die erste Bedingung fordert eine Proportionalität zwischen der Kurvenlänge s und der Krümmung κ. Diese ist nicht mit der Stetigkeit einer Funktion in der **ersten** Ableitung zu verwechseln, also „glatte" Übergänge (vgl. nachstehende Figuren).





372. (Fortsetzung)



a) Mit $\kappa = \frac{1}{\rho}$ ist zu zeigen, dass mit der Forderung nach Proportionalität zwischen Kurvenlänge s und Krümmung κ, gilt: $s \cdot \rho = a^2$
a ..... Konstante, Parameter der Klotoide

b) Mit Hilfe der Definitionsgleichung der Krümmung wird $\frac{d\tau}{ds} = \ldots$
(Der Winkel heißt konventionsgemäß τ.)

$$\Rightarrow \tau(s) = \int \ldots\ ds = \ldots = \frac{s^2}{2a^2} + k$$

c) Mit $\tau(0) = 0$ wird $k = \ldots$

d) Weiters gilt $y' = \tan\tau$ (vgl. Figur). Um **eine** Parameterdarstellung der Klotoide zu erhalten, ersetzen wir y' durch $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (mit dem Parameter s).

Es ist zu zeigen, dass $f: s \mapsto \begin{cases} \dot{x} = \cos\tau \\ \dot{y} = \sin\tau \end{cases}$ mit $\tau = \frac{s^2}{2a^2}$ die obige Bedingung erfüllt.

e) Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen:

$\dot{x} = \cos\tau = \frac{dx}{ds}$	$\dot{y} =$
$x = \int_0^{s_0} \frac{dx}{ds}\,ds = \int_0^{s_0} \cos\tau(s)\,ds$	$y =$
$\Rightarrow x = \int_0^{s_0} \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds$	$\Rightarrow y =$

Dies ist die **Parameterdarstellung der Klotoide** mit Hilfe der FRESNELschen Integrale.

f) Die FRESNELschen Integrale $x = \int_0^{s_0} \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds$, $y = \int_0^{s_0} \sin\frac{s^2}{2a^2}\,ds$ sind zwar nicht geschlossen integrierbar, jedoch existiert eine Reihenentwicklung:

$$x = \int_0^{s_0} \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds = \sqrt{2\tau} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tau^{2n-2}}{(4n-3)(2n-2)!} \approx \sqrt{2\tau}\left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \frac{\tau^6}{9360} + \frac{\tau^8}{685440}\right)$$

$$y = \int_0^{s_0} \sin\frac{s^2}{2a^2}\,ds = \sqrt{2\tau} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tau^{2n-2}}{(4n-1)(2n-1)!} \approx \sqrt{2\tau}\left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \frac{\tau^7}{75600} + \frac{\tau^9}{6894720}\right)$$

mit $\tau = \frac{s^2}{2a^2}$. Die folgende Tabelle ist zu ergänzen:

τ	x	y	τ	x	y
0			1,1	1,314	0,499
0,1	0,447	0,015	1,2	1,341	0,559
0,2	0,630	0,042	1,3		
0,3	0,768	0,077	1,4	1,374	0,678
0,4		0,118	1,5	1,382	0,736
0,5	0.975	0,164	1,6		0,739
0,6	1,057	0,214	1,7		
0,7	1,127		1,8		0,901
0,8	1,186		1,9	1,354	0,951
0,9			2,0	1,335	
1,0	1,279	0,439	2,1		1,041

g) Das durch die ausgefüllte Tabelle bestimmte Klotoidenstück ist im Maßstab 10 :1 zu zeichnen. Mit a = 1 (Einheitsklotoide) ist der Punkt P zu ermitteln, in dem gilt: s = a.

h) Im Punkt $Q\left(\tau = \frac{\pi}{2}\right)$ erfolgt der Übergang zu einem Viertelkreis. Dieser ist in die Zeichnung einzutragen. Man zeige, dass die Fläche eines ganzen Kreises mit demselben Radius gleich 1 ist.

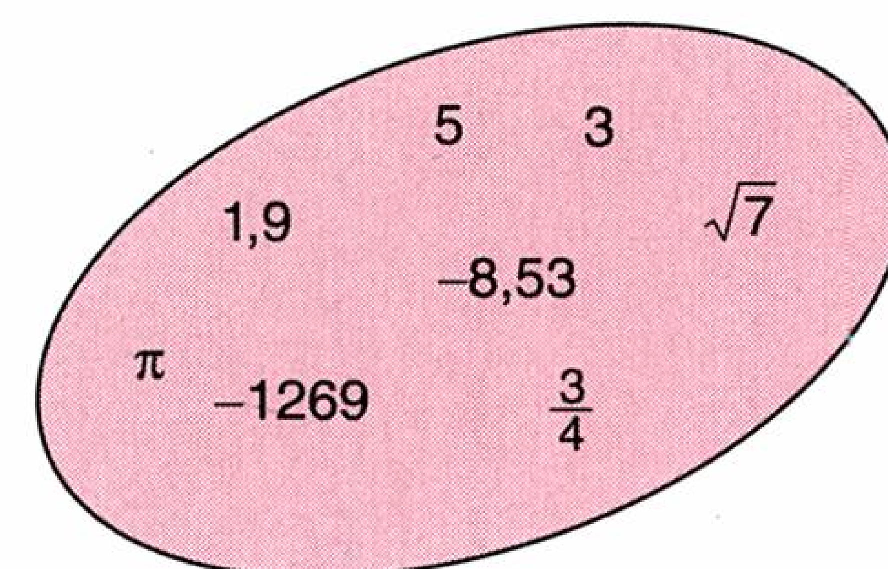
DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

1. Einleitung

Der Leserin oder dem Leser dieses Kapitels könnte sich die Frage aufdrängen: Warum schon wieder neue Gleichungen? Sind es nicht schon allmählich genug?

Welche Gleichungen haben wir bisher kennengelernt? Da waren

- lineare (Bestimmungs-) Gleichungen (z. B.: $2x + 5 = 13$)
- quadratische Gleichungen (z. B.: $x^2 - 2x - 15 = 0$)
- Wurzelgleichungen (z. B.: $\sqrt[3]{5x+9+2\sqrt{x^2-2x+4}} = 2$)
- Gleichungen höheren Grads (z. B.: $2x^6 - 5x^5 - 74x^4 + 190x^3 - 74x^2 - 5x + 1 = 0$)
- Trigonometrische bzw. goniometrische Gleichungen (z. B.: $\tan x + \cos x = 1 + \sin x$)
- Transzendente Gleichungen (z. B.: $e^x = \sin x$)



Was all diese Gleichungen anbelangt, so können wir sie einigermaßen überblicken und beherrschen, oder? Ebenso verschieden waren ihre Lösungsmethoden. Und wo die Lösung nicht exakt bestimmt werden konnte, da begnügten wir uns eben mit guten Näherungen (NEWTONsches Näherungsverfahren, Regula falsi).

So verschieden all diese Gleichungen und die Methoden ihrer Lösungen auch sein mögen, so haben sie doch eines gemeinsam: Sie sind Gleichungen in einer **Variablen**. (Gleichungs-**Systeme** interessieren uns jetzt nicht.) Für die Variable (x) kann man sich **beliebige** Zahlenwerte eingesetzt denken. Die meisten dieser beliebig gewählten Zahlenwerte werden aus der Gleichung sicher eine **falsche Aussage** machen. Nur wenige Zahlenwerte für die Variable können die jeweilige Gleichung erfüllen, d. h. eine wahre Aussage produzieren. Diese Zahlenwerte werden bekanntlich als Lösung(en) bezeichnet. Alle Lösungen der uns bis jetzt bekannten Gleichungen waren **Zahlen**. Die Lösungsmengen waren stets **Zahlenmengen**!

Das Ganze hat aber nur deshalb funktioniert, weil wir bisher auch nur nach „relativ" einfachen Dingen gefragt haben: Wie hoch, wie breit, wie schwer, wie groß, wie lang, wie schnell ist dies oder jenes. All dies ließ sich durch einzelne **Zahlenwerte** ausdrücken. Und dafür waren die bisherigen Gleichungen bestens geeignet.

Jedoch gibt es in der Welt der Technik und innerhalb der Natur- und Geisteswissenschaften Aufgaben, die sich in das Schema **herkömmlicher** Gleichungen nicht mehr fügen.

Angenommen, wir wollen wissen, welche Form ein sich unter einer Last durchbiegender Balken annimmt. Kann man dieses Problem lösen, indem man als Antwort etwa gibt: $x = 3$ cm ? Nein! Denn die **Gestalt** des Balkens lässt sich nicht auf eine solche Antwort reduzieren. Daher wird auch eine herkömmliche Gleichung für derartige Probleme nicht ausreichen!

Wie kann stattdessen die Form eines gebogenen Balkens überhaupt angegeben werden? Ein gebogener Balken beschreibt – wenn wir uns den Balken hauchdünn vorstellen – eine Kurve. Und eine Kurve (z. B. im kartesischen Koordinatensystem) ist der Graph einer **Funktion** (bzw. einer Funktionsgleichung). Wir suchen also in diesem Fall eine ganze Funktion!

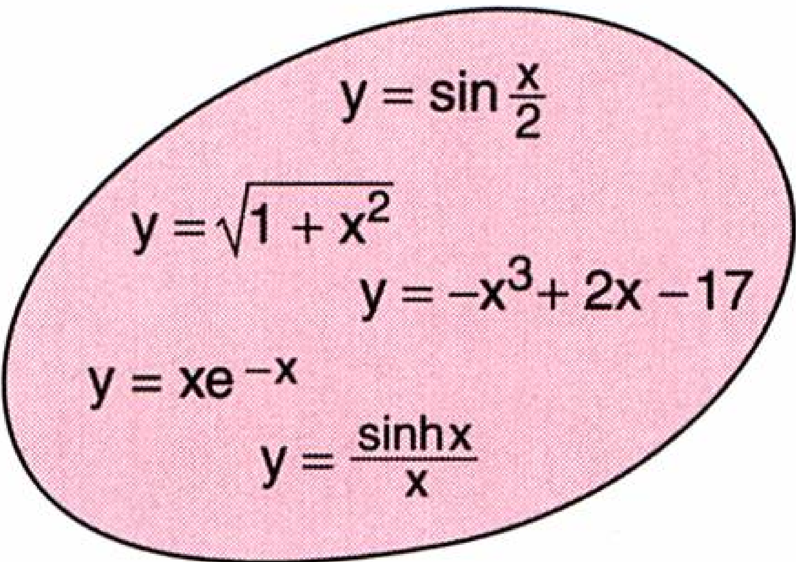
Ebenso war es mit den in der Außenspalte angeführten Problemstellungen.

- Ingenieure konnten der Atomenergiekommission (A.E.C.) nachweisen, dass die im Meer versenkten Fässer radioaktiven Abfalls beim Aufprall auf dem Meeresboden höchstwahrscheinlich auseinanderbrechen. Dies führte dazu, dass die Lagerung von schwachaktivem Atommüll im Meer verboten wurde.
- Die Beschreibung der Wachstumsdynamik von Tumorzellen
- Die Erkennung von Diabetes mellitus (einer Stoffwechselerkrankung)
- Die Beschreibung von Epidemien (z. B. Grippe)
- Eine Erklärung dafür, warum ein gemäßigter Fischfang die Anzahl der Speisefische erhöht, die Anzahl der Haie aber reduziert, und umgekehrt: warum hingegen das Aussetzen des Fischfangs die Anzahl der Speisefische verringert und die der Haie erhöht (wie es während des Ersten Weltkrieges im Mittelmeer zu beobachten war)
- Der Nachweis von Kunstfälschungen

All diese Aufgaben bestanden nicht in der Suche nach einzelnen Zahlenwerten, sondern in der Suche und dem Auffinden ganzer Funktionen.

Definitionen:

Ist $y = f(x)$ eine Funktion in einer Variablen x, so nennt man jede Gleichung der Form $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ eine **(gewöhnliche) Differenzialgleichung (DG)**.



Die Gleichungen, die all die oben aufgezählten Aufgabenstellungen bewältigen, haben demnach auch eine ganze Funktion als Unbekannte. Aber weil eben bei den meisten Problemstellungen Veränderungen und Tendenzen eine wichtige Rolle spielen, und Derartiges durch Ableitungen (bzw. Differenzialquotienten) ausgedrückt wird, sind auch die Ableitungen der gesuchten Funktion Bestandteil solcher Gleichungen. Diese Bestimmungsgleichungen heißen demnach **Differenzialgleichungen**.

Ihre Lösungen sind keine Zahlen, sondern Funktionen – ihre Lösungsmengen sind **Funktionenmengen**! Mit den DGen betreten wir völliges Neuland.

Die Geschichte der Mathematik zeigt, dass es keine einheitliche Lösungsmethode für alle DGen gibt. Demnach zerfallen die DGen in Teilgebiete, für die bestimmte Lösungswege erfolgreich sind. All diese verschiedenen Lösungsansätze machen das Gebiet der DGen so ungeheuer groß – daher können wir hier nur einen winzigen Ausschnitt vorstellen.
Da es nun keine einheitliche Lösungsmethode gibt, ist es unvermeidlich, das Gebiet der DGen zu ordnen und zu klassifizieren. Es hat sich herausgestellt, dass für eine Klassifizierung aller DGen zwei Begriffe sehr wertvoll sind: **Ordnung** und **Grad**.
Die **Ordnung einer DG** meint einfach die höchste in ihr vorkommende Ableitung.
Beim Begriff des Grads einer DG orientiert man sich an den Polynomen. Auch dort haben wir den Begriff „Grad" kennengelernt. Erinnern wir uns: Der Grad eines Polynoms ist der höchste in ihm vorkommende Exponent der jeweiligen Variablen. Analog dazu ist der **Grad einer DG** der Exponent der höchsten in ihr vorkommenden Ableitung.

Eine **DG** ist von **n-ter Ordnung** (oder von der **Ordnung n**), wenn $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ die höchste Ableitung der Funktion $y = f(x)$ ist, die in der DG vorkommt.

Eine **DG** ist **k-ten Grads** (oder hat den **Grad k**), wenn das Polynom F in den Variablen $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ebenfalls den Grad k aufweist. Der höchste Exponent der Funktion y bzw. einer ihrer Ableitungen $y^{(i)}$ ist also k. Eine DG ersten Grads nennt man auch **lineare DG**.

Um eine Ahnung zu bekommen, wie DGen „funktionieren", diene ein einfaches Beispiel.

Beispiel:

Ermitteln Sie durch eine einfache Probe, welche der folgenden Funktionen $y = f(x)$

a) $y = 1$ **b)** $y = x$ **c)** $y = x^2$ **d)** $y = \sin x$ **e)** $y = 8e^x$ **f)** $y = -3e^x$ die DG $y = y'$ lösen.

Lösung:

Wir bilden jeweils die erste Ableitung y' zu $y = f(x)$ und setzen dann in den linken und rechten Term der DG ein:

a) $y = 1$	$y' = 0$	$T_L \neq T_R$	**b)** $y = x$	$y' = 1$	$T_L \neq T_R$
c) $y = x^2$	$y' = 2x$	$T_L \neq T_R$	**d)** $y = \sin x$	$y' = \cos x$	$T_L \neq T_R$
e) $y = 8e^x$	$y' = 8e^x$	$T_L = T_R$	**f)** $y = -3e^x$	$y' = -3e^x$	$T_L = T_R$

Noch einmal: Die Lösungen von DGen sind keine Zahlen, sondern **Funktionen in einer unabhängigen Variablen**! Wir sprechen in diesem Fall auch von **gewöhnlichen DGen**. Sind die gesuchten Funktionen von mehreren Variablen abhängig, dann handelt es sich bei den Ableitungen auch um partielle Ableitungen. Analog dazu spricht man dann von **partiellen DGen**. Wir werden hier ausschließlich die gewöhnlichen DGen behandeln.

Mit diesem Vorwissen können wir eine DG schon einmal ganz anders „lesen", wie in dem folgenden Beispiel.

Beispiel:

Die DG $y = xy' + y''y'''$ ist **a)** zu lesen und zu interpretieren **b)** zu klassifizieren.

Lösung:

a) Die Lösung der gegebenen DG besteht im Auffinden einer Funktion oder Funktionenschar $y = f(x)$. Jede Lösungsfunktion soll die Eigenschaft haben, dass sie und ihre Ableitungen y', y'', y''' – in die DG eingesetzt – diese DG erfüllen, d. h. eine wahre Aussage produzieren.

b) Die höchste Ableitung ist y''', daher ist die Ordnung 3.

y und seine Ableitungen kommen zwar jeweils nur in erster Potenz vor, aber das Produkt $y''\,y'''$ bedingt, dass die Exponenten von y'' und y''' für die Bestimmung des Grads addiert werden müssen. Somit ist die höchste vorkommende Potenz 2, und das ist somit auch der Grad der DG. Es handelt sich also bei der obigen Gleichung um eine DG 3. Ordnung und 2. Grads.

AUFGABEN

373. Die wahren Aussagen sind anzukreuzen:

- ○ **a)** DGen sind Bestimmungsgleichungen für Funktionenmengen.
- ○ **b)** DGen sind Bestimmungsgleichungen für Differenziale.
- ○ **c)** DGen sind Gleichungen, die das Verhalten eines Getriebe-Differenzials beschreiben.
- ○ **d)** Alle DGen können prinzipiell mit einer einheitlichen Methode gelöst werden.
- ○ **e)** Die Lösungsmenge einer DG ist eine Zahlenmenge.
- ○ **f)** Die Lösung einer gewöhnlichen DG besteht aus einer Menge Funktionen in einer unabhängigen Variablen.
- ○ **g)** Unter dem Grad einer DG versteht man den Schwierigkeitsgrad ihres Lösungsweges.
- ○ **h)** Von der Ordnung einer DG spricht man, wenn die Ableitungen ihrer Größe nach geordnet sind.

Bei den folgenden Aufgaben ist durch eine einfache Probe zu ermitteln, welche der folgenden Funktionen $y = f(x)$ die DG $y = y'^2$ lösen.

374. **a)** $y = 2$ **b)** $y = 4x$ **c)** $y = \frac{x^2}{4}$ **d)** $y = \cos x$

375. **a)** $y = e^x$ **b)** $y = \frac{x^2}{4} - 3x - 3$ **c)** $y = \frac{x^2}{4} + x + 1$ **d)** $y = \frac{x^2}{4} + Cx + C$

Die folgenden DGen sind zu klassifizieren. Neben Ordnung und Grad ist jeweils anzugeben, ob die DG in expliziter oder impliziter Darstellung vorliegt und wie unabhängige und abhängige Variable der gesuchten Funktion heißen.

376. **a)** $y' = 2y + 3\sin x$ **b)** $y' + 2\cos y = 0$

377. **a)** $(y'^2 - 4x^2y')\sin x = 0$ **b)** $y'' + 3y = 6$

378. **a)** $dy + (xy - \cos x)dx = 0$ **b)** $y''' + 2xy'' + 3yy'^2 + 4xy = 0$

379. a) $x = 2y - (x + y'^2)\,y$ **b)** $y'' = \sin x - yy'\cos x$

380. a) $\ddot{x}^2 + 2t^2x = 5$ [1] **b)** $y' + 2x = (y + xy')^{-3}$

381. a) $y^{(4)} - 3y^2 = 4$ **b)** $y'' = 4xy^2 - 5x^2y$

382. a) $e^{y'''} - 2xy'' = -y$ **b)** $\frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{dv}{dx} + 2x\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v = 0$

2. Ein Bild sagt mehr als ...

Bevor wir daran gehen, DGen zu lösen, beschäftigen wir uns erst noch ein wenig mit dem Endprodukt derartiger DGen, nämlich den Funktionen selbst. Es könnte der Verdacht entstanden sein, dass die Lösungsmengen von DGen aus ganz wild zusammengewürfelten Funktionen bestehen. Glücklicherweise ist dem nicht so.

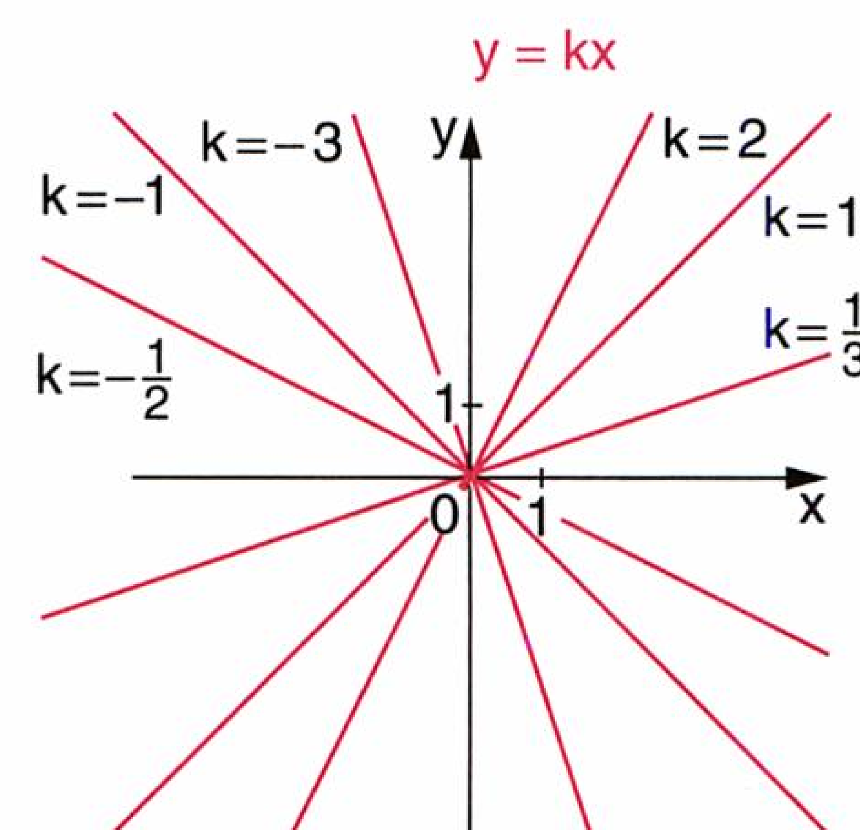
Sehen wir uns einmal sehr einfache Funktionen an:

Beispiel:
In der Funktionsgleichung $y = kx$ spielt k die Rolle eines **Parameters**[2].
Es sind die dadurch bestimmten Funktionen zu bestimmen und eine signifikante Auswahl daraus in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch darzustellen. Um welche Graphen handelt es sich dabei?

Lösung:
$y = kx$ ist eine lineare Funktion

k ist **keine** Variable, die wie x variiert, sondern für alle x eine jeweils konstante Hilfsgröße. Durch Variierung von k erhält man eine Menge linearer Funktionen. Durch konkrete Wahl des Parameters k greift man aus dieser Menge ein Element heraus.

Bei den zugehörigen Graphen handelt es sich um alle Geraden, die durch den Koordinatenursprung gehen.



Die im vorigen Beispiel beschriebenen Funktionen bilden in ihrer Gesamtheit eine Menge: die **Funktionenmenge**. Wie lautet sie übrigens (vgl. Aufgabe **383**.)? Man kann eine derartige Funktionenmenge auch als **Funktionenschar** bezeichnen.

In Analogie dazu nennt man die zu einer Funktionenmenge zugehörigen Graphen eine **Kurvenschar** (auch wenn die Bezeichnung „Kurve" bei Geraden ein wenig übertrieben erscheint).

Es gibt nun eine einfache Möglichkeit, die obige Kurvenschar, ohne Verwendung des Parameters k zu beschreiben: nämlich durch **Aufstellen der zugehörigen DG**.

Aufstellen einer DG:

1. Bestimmung der analytischen Gleichung $y = f(x)$ mit n Parametern, welche die Kurvenschar beschreibt.
2. Bilden geeignet vieler Ableitungen $y^{(i)}$, um alle Parameter zu eliminieren.
3. Elimination aller n Parameter.

---

[1] Die Punkte über der Variablen x deuten an, dass es sich um einen **zeitlichen** Vorgang x(t) handelt und dass mit $\dot{x}$ (gesprochen: x-punkt) die erste Ableitung $\frac{dx}{dt}$ und mit $\ddot{x}$ (gesprochen: x-zwei-punkt) die zweite Ableitung $\frac{d^2x}{dt^2}$ nach der Zeitvariablen t gemeint ist.

[2] Parameter (gr.-nlat.): konstante oder unbestimmt gelassene Hilfsgröße.

Beispiel:

Die Kurvenschar im vorigen Beispiel ist als DG, also ohne Verwendung eines Parameters, darzustellen.

Lösung:

(1) Wir schreiben die Funktionsgleichung an: $y = kx$

(2) und bilden die erste Ableitung: $y' = k$

(3) Wir können nun den Parameter k eliminieren, indem wir die zweite Gleichung in die erste einsetzen. Dadurch erhalten wir schließlich die DG des Geradenbüschels durch den Koordinatenursprung: $y = y'x$

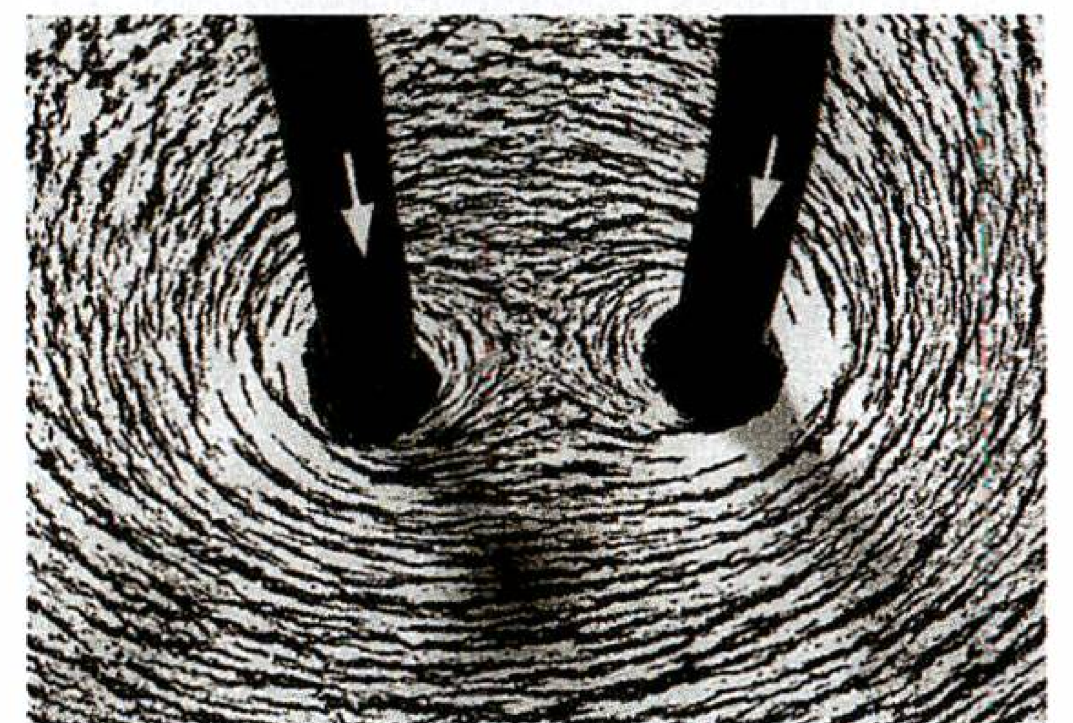
Probe! (Vgl. Aufgabe **384**.)

Ein technisches Beispiel für einfache Kurvenscharen sind die Feldlinien von Magnetisierungen.



Um beispielsweise derartige Feldlinien sichtbar zu machen, werden Eisenfeilspäne auf ein Blatt Papier gestreut, wo sie zunächst noch in ungeordneter Form zu liegen kommen.

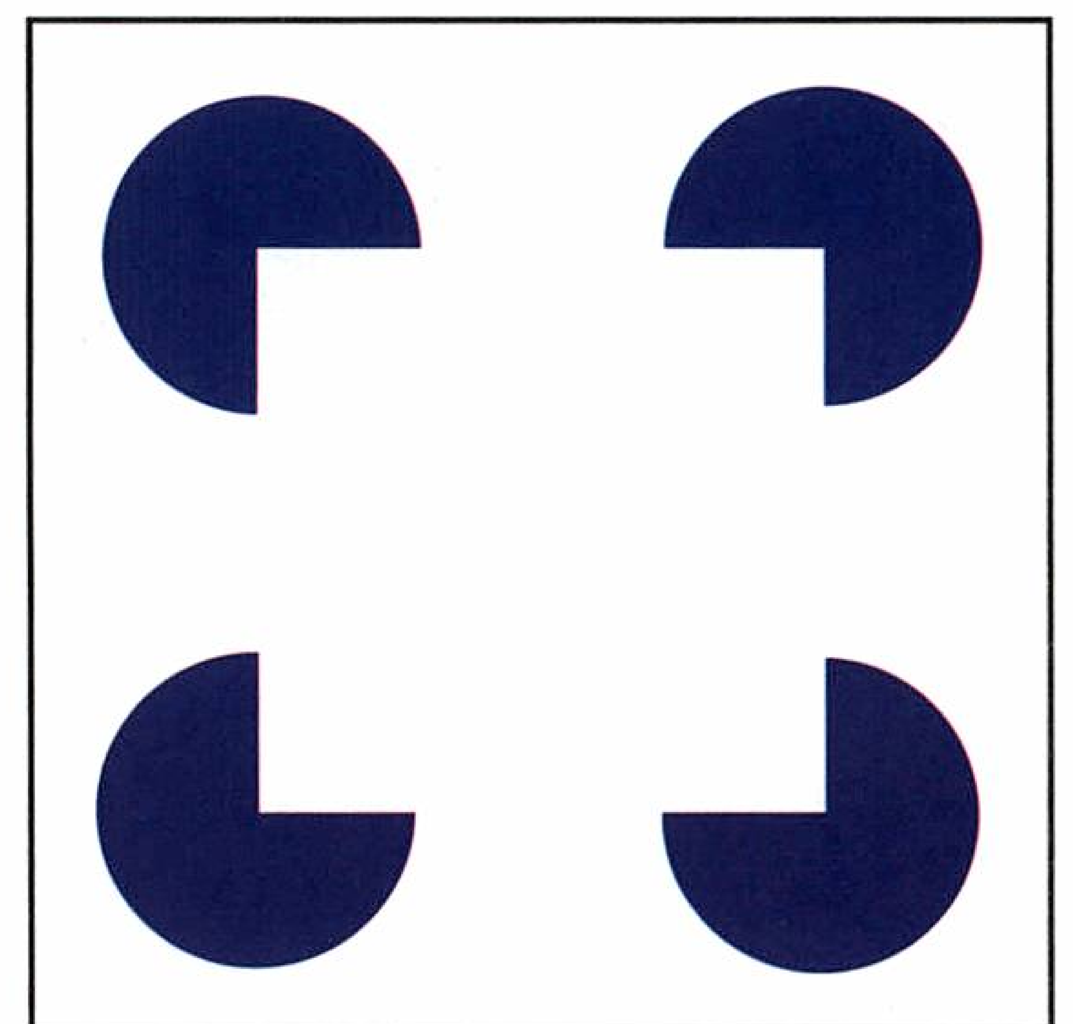
Hält man das Papier mit den Eisenspänen jedoch in das Magnetfeld, so richten sie sich zu geordneten Bahnen aus, sodass man die Schar der Magnetisierungslinien erahnen kann.



Es erscheint ein Richtungsfeld. Das ist eine geschickte Methode, wie man an sich unsichtbare Feldlinien geometrisch veranschaulichen kann (vgl. nebenstehende Fotos).

Der Trick, dass wir Formen und Gestalten „sehen", obwohl gar keine sichtbaren vorhanden sind, dass wir also mehr sehen, als unseren Sinnesorganen eigentlich dargeboten wird, passiert in unserem Gehirn.

Besonders deutlich sieht man das an den Beispielen für „optische Täuschungen", wie nebenan eines abgebildet ist:



Wir „sehen" alle das Quadrat, obwohl es nachweislich nicht vorhanden ist. Unser Gehirn spielt uns diesen Streich, indem es dazu neigt, Informationen spontan zu „ergänzen".

Dies macht man sich auch bei der Darstellung von Luft- oder Flüssigkeits-Strömungen zu Nutze: Auf den Tragflächen von Segelflugzeugen (und auch an den Segeln von Segelbooten) werden zuweilen zahlreiche Wollfäden angebracht, die die Richtung der örtlichen und momentanen Luftströmung anzeigen. Wenn die Luftströmung um die Tragflächen abreißen und die laminare Strömung in eine turbulente umschlagen sollte, zeigen die Wollfäden dies sofort an. Dem betrachtenden Piloten bietet sich somit ein Bild der aktuell herrschenden Strömungsverhältnisse an den Flügeln.[1)]

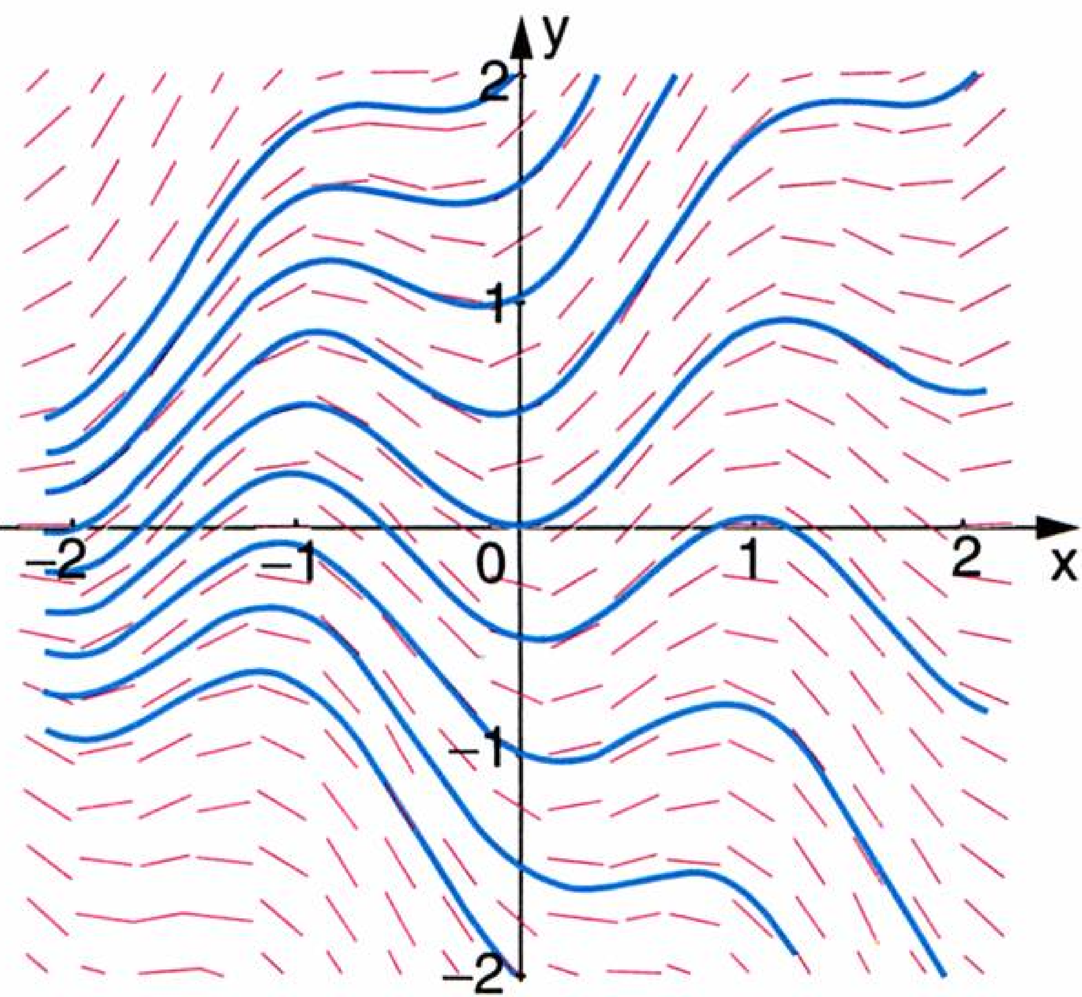
[1)] Luftströmung auf den Tragflächen eines Flugzeugs: http://www.quarks.de/fliegen2/0202.htm

Wie ist ein **Richtungsfeld** einer DG anzufertigen?

1. Ordnung der DG muss 1 sein
2. DG für y′ in expliziter Weise darstellen (sofern das möglich ist)
3. Wahl eines geeigneten Punktrasters
4. Berechnung von y′ zu jedem Punkt P(x, y) des Punktrasters, Eintragung in einer Tabelle
5. Zu jedem Punkt P(x, y) ist ein Linienelement einzuzeichnen

Und was hat das mit unseren DGen zu tun?

Diesen Trick kann man sich auch bei der grafischen Veranschaulichung mancher DGen und deren Lösung zu Nutze machen. Denn, sobald wir eine DG vor uns haben, wissen wir im Allgemeinen natürlich nicht, welche Funktionen sie beschreibt. Denn so direkt ist das ja nicht ersichtlich. Aber immerhin gibt uns doch eine DG wie beispelsweise $y' = \frac{y}{2} + \sin 3x$ für jeden Punkt der xy-Ebene an, mit welcher Steigung er von einer Kurve der Kurvenschar durchlaufen wird. Das können wir dann für eine signifikante Auswahl an Punkten der xy-Ebene andeuten, indem wir zu jedem dieser Punkte ein kurzes Tangentenstück der Steigung y′ (auch **Linienelemente** genannt) einzeichnen. Das zeigt dann die Kurvenrichtung an, ähnlich wie die Eisenfeilspäne sich an den Mangetisierungslinien oder die Wollfäden an den Luftströmungen ausrichten.



Auf diese Weise erhalten wir das **Richtungsfeld**[1] der DG. Jedoch können wir das nur für DGen erster Ordnung anfertigen, die sich überdies in der Form $y' = f(x, y)$ (also explizit für y′) ausdrücken lassen.

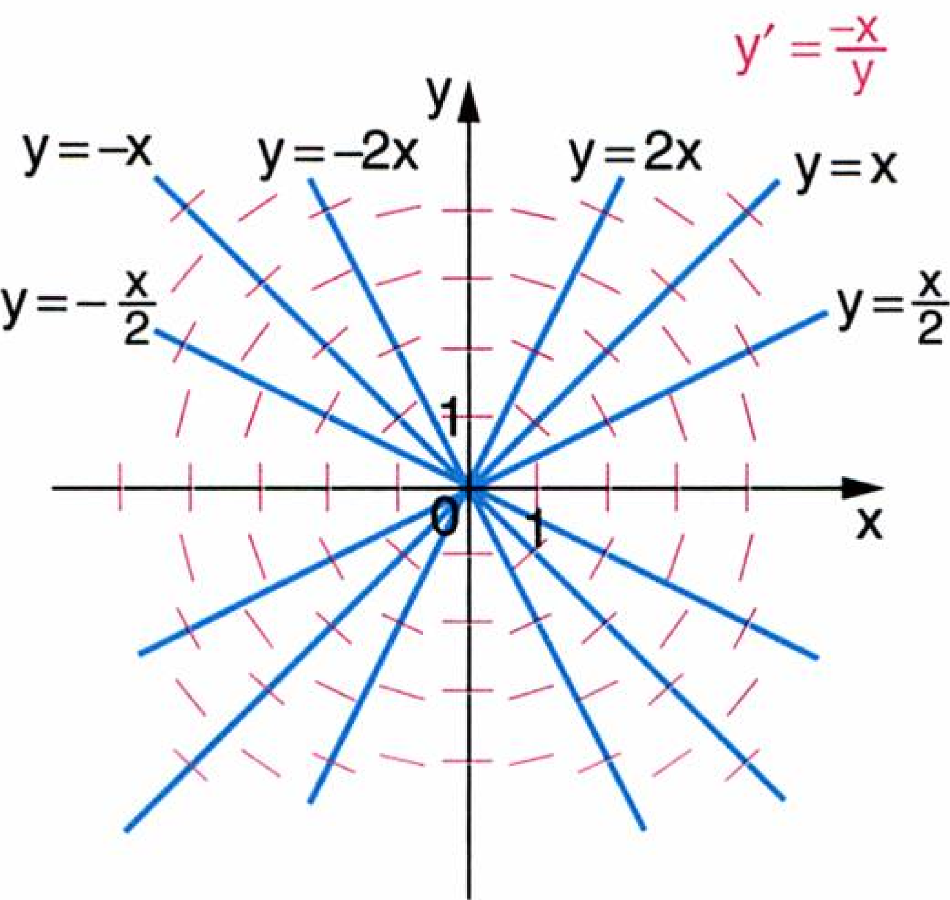
Beispiel:

Das Richtungsfeld der DG $yy' + x = 0$ ist grafisch darzustellen. Um welche Kurvenschar handelt es sich dabei?

Lösung:

1. Die DG enthält keine höhere Ableitung als y′, ist also von erster Ordnung.
2. y′ lässt sich explizit darstellen: $y' = \frac{-x}{y}$
3. Wir wählen für die Punkte der xy-Ebene jene, die ganzzahlige Koordinaten haben.
4. Mit Hilfe der DG $y' = \frac{-x}{y}$ können wir die Werte für y′ berechnen (vgl. nebenstehende Tabelle). In vielen Fällen können wir unsere Arbeit jedoch vereinfachen: Wir fassen all jene Punkte der xy-Ebene zusammen, welche die gleiche Steigung aufweisen. Diese Linien (**Isoklinen**) sind oft von einfacher geometrischer Natur, sind also leicht zu zeichnen und erleichtern so die Konstruktion eines Richtungsfeldes. In unserem Fall sind die Isoklinen Geraden der Form $y = kx$. Die Punkte auf diesen Isoklinen haben jeweils die Steigung $y' = \frac{-x}{kx} = \frac{-1}{k}$.
5. Zu jedem Punkt P(x, y) zeichnen wir das zugehörige Linienelement.

x \ y	±1	±2	±3	±4
±1	∓1	$\frac{\mp 1}{2}$	$\frac{\mp 1}{3}$	$\frac{\mp 1}{4}$
±2	∓2	∓1	$\frac{\mp 2}{3}$	$\frac{\mp 1}{2}$
±3	∓3	$\frac{\mp 3}{2}$	∓1	$\frac{\mp 3}{4}$
±4	∓4	∓2	$\frac{\mp 4}{3}$	∓1



Das Richtungsfeld lässt erahnen, dass es sich bei der Kurvenschar um die Schar konzentrischer Kreise um den Koordinatenursprung handelt.

[1] Animation einer Funktionenschar zu einem Richtungsfeld: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/birep/biomath/archiv/material.html

Am Ende des letzten Beispiels haben wir die Vermutung geäußert, dass es sich bei der Kurvenschar, die der DG $y\,y' + x = 0$ zugeordnet ist, um eine Schar konzentrischer Kreise mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt handelt. Wie könnten wir diese Behauptung bestätigen oder widerlegen? Wir müssten die DG einer derartigen Kreisschar aufstellen und dann feststellen, ob sie mit der obigen DG übereinstimmt oder nicht. Genau das ist das Thema im folgenden Beispiel.

Definition:

Verbindungslinien gleichen Kurvenanstiegs heißen **Isoklinen**.

Beispiel:

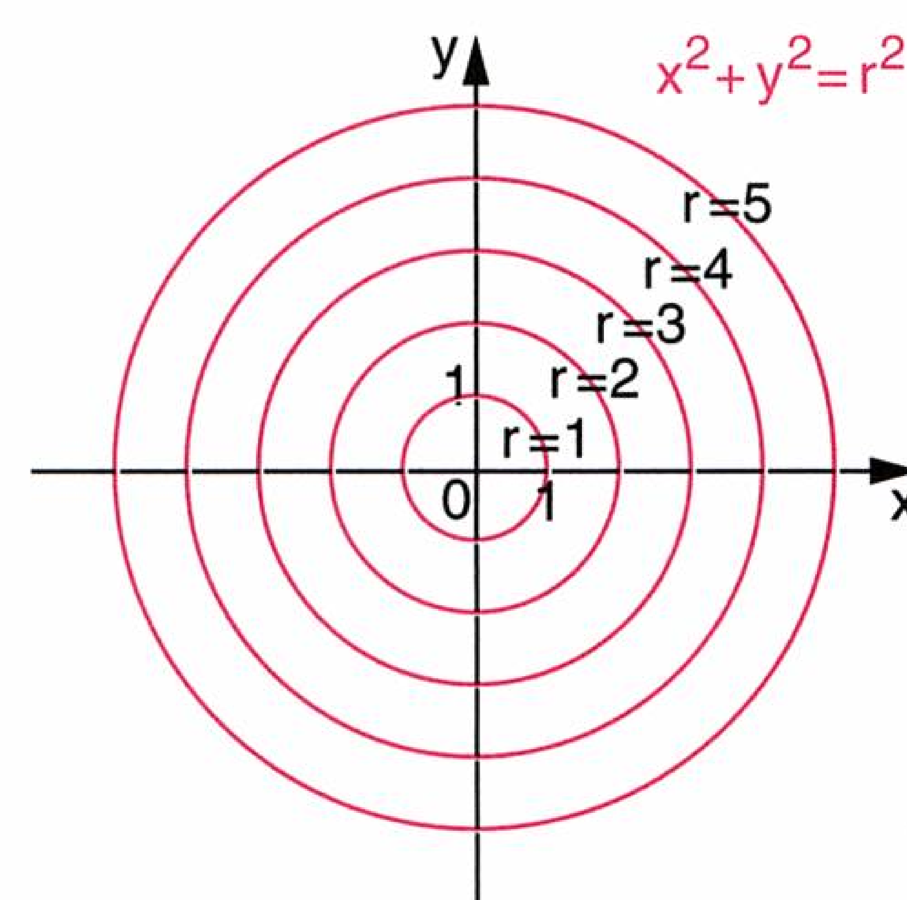
Wie lautet die DG aller konzentrischen Kreise, die ihren Mittelpunkt im Koordinatenursprung haben?

Lösung:

(1) Die (analytische) Gleichung derartiger Kreise lautet:
$x^2 + y^2 = r^2$
Der Radius r spielt in dieser Gleichung die Rolle des Parameters. Durch seine Variierung entstehen verschieden große Kreise. In ihrer Gesamtheit bilden sie die Schar konzentrischer Kreise mit dem Koordinatenursprung als gemeinsamen Mittelpunkt.

(2) Um diesen Parameter r zu eliminieren, bilden wir die (implizite) erste Ableitung:
$2x + 2yy' = 0$

(3) $x + yy' = 0$



Damit ist unsere obige Vermutung bestätigt, dass der DG $yy' + x = 0$ die Schar konzentrischer Kreise mit dem Koordinatenursprung als gemeinsamen Mittelpunkt zugeordnet ist. Mit welcher Überlegung kann man die in Rede stehende DG aus der DG des Geradenbüschels durch den Koordinatenursprung herleiten? (Vgl. Aufgabe **392.**)

Beispiel:

Die DG für alle Geraden mit der Steigung 3 ist anzugeben. Kurvenschar und Richtungsfeld sind anzufertigen.

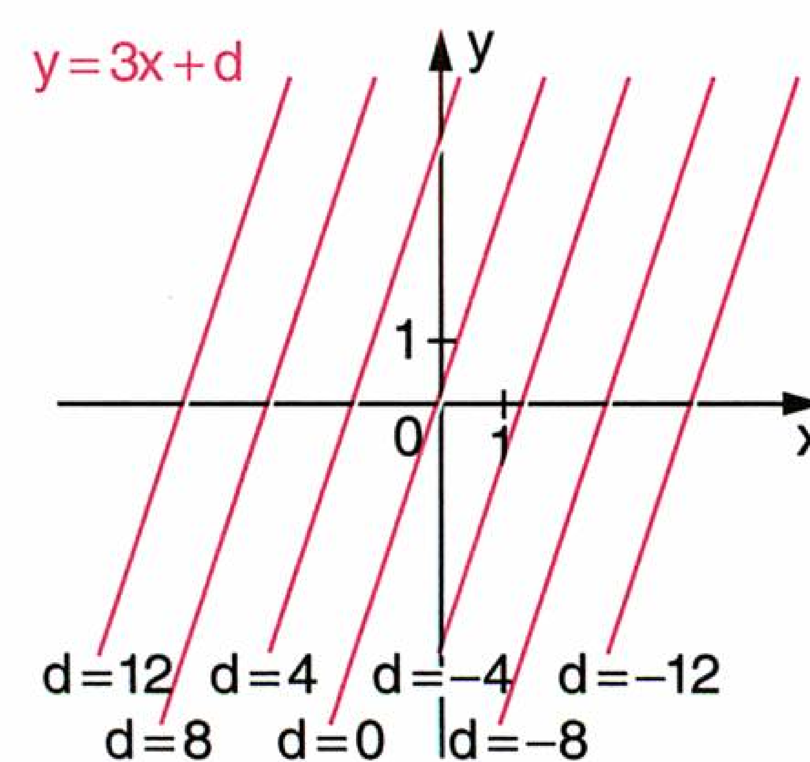
Lösung:

Aufstellen der DG:

(1) In der Geradengleichung $y = kx + d$ nimmt k den konstanten Wert 3 an. k=3 ist somit **kein** zu eliminierender Parameter, sondern eine die Funktionenschar konstituierende Bedingung. d hingegen bleibt ein echter Parameter, und der ist zu eliminieren:
$y = 3x + d$

(2) $y' = 3$

(3) Durch die erste Ableitung hat sich d von selbst eliminiert. Ein Einsetzen ist nicht mehr nötig. Die gesuchte DG ist bereits mit $y' = 3$ gefunden! Diese DG beschreibt eine Schar „Kurven“, die sich dadurch auszeichnen, überall die Steigung 3 zu haben.



Richtungsfeld:

(1) y' ist bereits die höchste Ableitung.

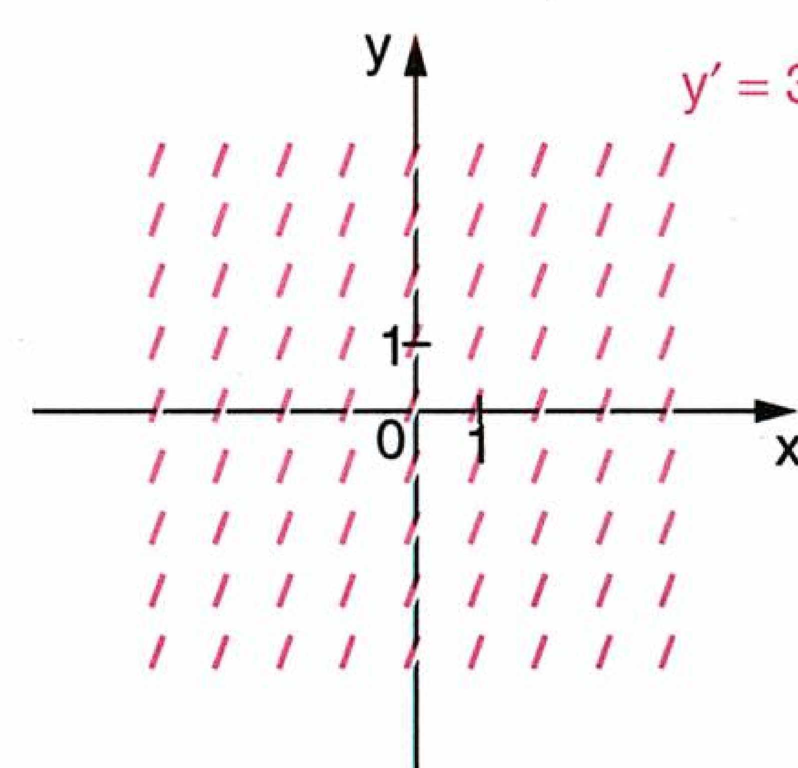
(2) Die DG ist bereits in für y' expliziter Weise dargestellt.

(3) Wir wählen für die Punkte der xy-Ebene jene, die ganzzahlige Koordinaten haben.

(4) Eine Tabelle ist überflüssig, da y' für alle Punkte der xy-Ebene den konstanten Wert 3 aufweist.

(5) Zu jedem Punkt P(x, y) zeichnen wir das zugehörige kurze Tangentenstück mit der Steigung 3.

Das Richtungsfeld lässt erahnen, dass es sich bei der Lösung der DG um die Schar paralleler Geraden mit der Steigung 3 handelt.



Beispiel:

Es ist die DG sämtlicher Geraden der xy-Ebene aufzustellen. Kurvenschar und Richtungsfeld!

Lösung:

(1) $y = kx + d$

(2) Nachdem keiner der beiden Parameter k und d eine besondere Bedingung erfüllen muss (so wie etwa $k = 3$ im vorigen Beispiel), sind beide zu eliminieren:
$y' = k$
$y'' = 0$

(3) Zweimaliges Ableiten reicht für die Elimination völlig aus.

Die zugehörige Kurvenschar besteht aus sämtlichen Geraden der xy-Ebene. Würden wir versuchen, all diese Geraden einzuzeichnen, so müssten wir konsequenterweise die xy-Ebene schwarz anmalen. Ein Richtungsfeld kann ebenfalls nicht gezeichnet werden, da die Ordnung der DG bereits 2 ist (vgl. Aufgabe 393.)!

Betrachtet man nur die DG $y'' = 0$ (ohne deren Lösung bereits zu kennen), so kann man immerhin über sie aussagen, dass sie die Menge aller „Kurven" der xy-Ebene beschreibt, die in ihrem gesamten Verlauf keinerlei Krümmung aufweisen. Um das besser zu verstehen, lese man die DG folgendermaßen: Egal, welche Werte sowohl die Variablen x und y als auch die Ableitung y' annehmen, der Wert der zweiten Ableitung y'' – und somit auch jener der Krümmung κ – ist konstant Null. Es gibt also keinen Punkt der xy-Ebene, der in irgendeiner Richtung gekrümmt durchlaufen wird. Und das ist nur möglich, wenn die Lösungskurven Geraden sind.

AUFGABEN

383. Die Funktionen $y = kx$ bilden in ihrer Gesamtheit eine Funktionen**menge**. Wie lautet sie?

384. Man zeige, dass die Funktionenschar $y = kx$ tatsächlich die DG $y = y'x$ erfüllt.

385. **a)** Es ist die Funktionenschar aller Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt P(0, 1) gehen.
b) Die zugehörige DG ist anzugeben.

386. **a)** Es ist die Funktionenschar aller Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt P(3, 4) gehen.
b) Die zugehörige DG ist anzugeben.

387. Die zugehörige DG zur Funktionenschar $y = Ax^2 + Bx$ ist anzugeben.

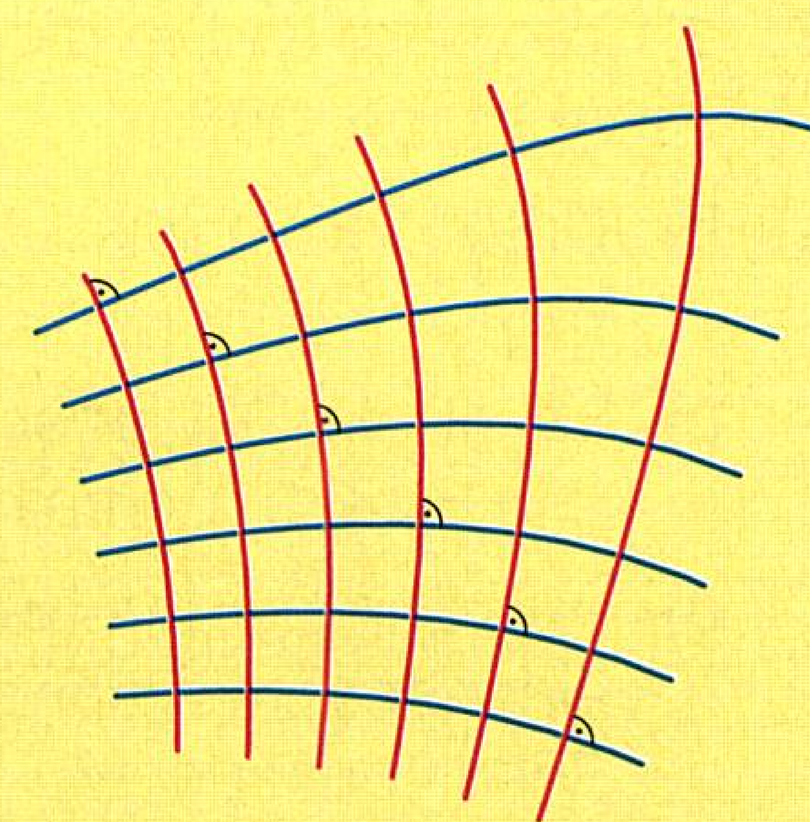
388. Welche DG gehört zur Funktionenschar $y = Ax^2 + A^2$?

389. **a)** Es ist die Funktionenschar aller Kreise zu bestimmen, die die y-Achse berühren und deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen.
b) Es ist anzugeben, welche Größen in der Funktionsgleichung (1) Variable (2) Parameter (3) Konstante sind.
c) Die zugehörige DG ist anzugeben.
d) Das zugehörige Richtungsfeld ist anzufertigen.

390. **a)** Es ist die Funktionenschar aller Kreise mit konstantem Radius r zu bestimmen, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen.
b) Es ist anzugeben, welche Größen in der Funktionsgleichung (1) Variable (2) Parameter (3) Konstante sind.
c) Die zugehörige DG ist anzugeben.
d) Das zugehörige Richtungsfeld ist für $r = 3$ anzufertigen.

391. **a)** Es ist die Funktionenschar aller Kreise mit konstantem Radius r zu bestimmen, die die x-Achse berühren.
b) Es ist anzugeben, welche Größen in der Funktionsgleichung (1) Variable (2) Parameter (3) Konstante sind.
c) Die zugehörige DG ist anzugeben.
d) Das zugehörige Richtungsfeld ist für $r = 2$ anzufertigen.

392. Der DG $y = y'x$ entspricht grafisch das Geradenbüschel durch den Koordinatenursprung. Wie lässt sich durch einfache Umformung zeigen, dass der Schar aller konzentrischen Kreise mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt die DG $x + yy' = 0$ entspricht?



Bemerkung: Zwei Kurvenscharen, deren Kurven senkrecht auf einander stehen, nennt man **orthogonale Trajektorien**.
Für **jeden** Punkt der xy-Ebene gilt, dass er von zwei Kurven durchsetzt wird, für deren Kurvenanstiege gilt: $y'_1 \cdot y'_2 = -1$

393. Um das Richtungsfeld einer DG anfertigen zu können, darf sie höchstens erster Ordnung sein. Zeigen Sie, dass diese Einschränkung sinnvoll ist, indem Sie die Probleme aufzeigen, die sich beim Versuch ergeben, das Richtungsfeld zu $y'' = 0$ zu zeichnen.

394. **a)** Die Punkte A(–3, 0) und B(3, 0) bilden die Endpunkte der einen Achse einer Ellipsenschar. Die Gleichung der Kurvenschar ist aufzustellen.

b) Die DG dieser Kurvenschar ist in der Form $y' = F(x, y)$ anzugeben.

c) Die DG ist zu klassifizieren.

d) In einem Schaubild (E = 1 cm) ist eine charakteristische Auswahl aus der zugehörigen Kurvenschar zu zeichnen. Die Aussage der DG ist anhand der Punkte P(1, 2) und Q(5, 4) zu demonstrieren.

e) Die Aufgabe **d)** hat gezeigt, dass es keine Ellipse gibt, auf der der Punkt Q(5, 4) liegt. Um herauszufinden, welche Kurven die DG im Bereich $3 < |x| < 6$ beschreibt, ist ein geeignetes Richtungsfeld anzufertigen.

f) Auf Grund des Richtungsfeldes ist zu vermuten, welche Kurven – außer den Ellipsen – der DG ebenfalls genügen.

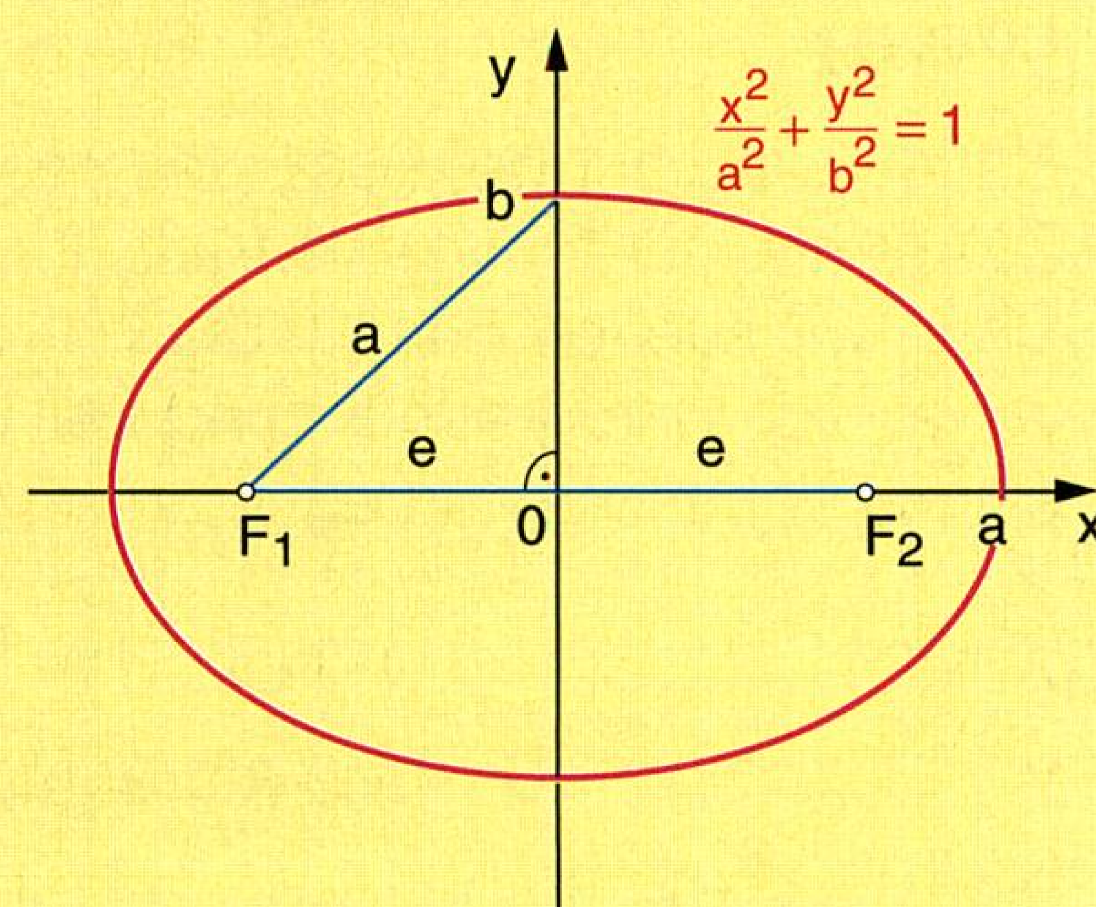
Anleitung: Man denke dabei an Kegelschnitte.

g) Die Vermutung aus Aufgabe **f)** ist zu überprüfen, indem für die vermutete Kurvenschar die zugehörige DG aufgestellt und mit der DG aus **b)** verglichen wird. Stimmen beide DGen überein, ist die Vermutung bestätigt, andernfalls widerlegt.

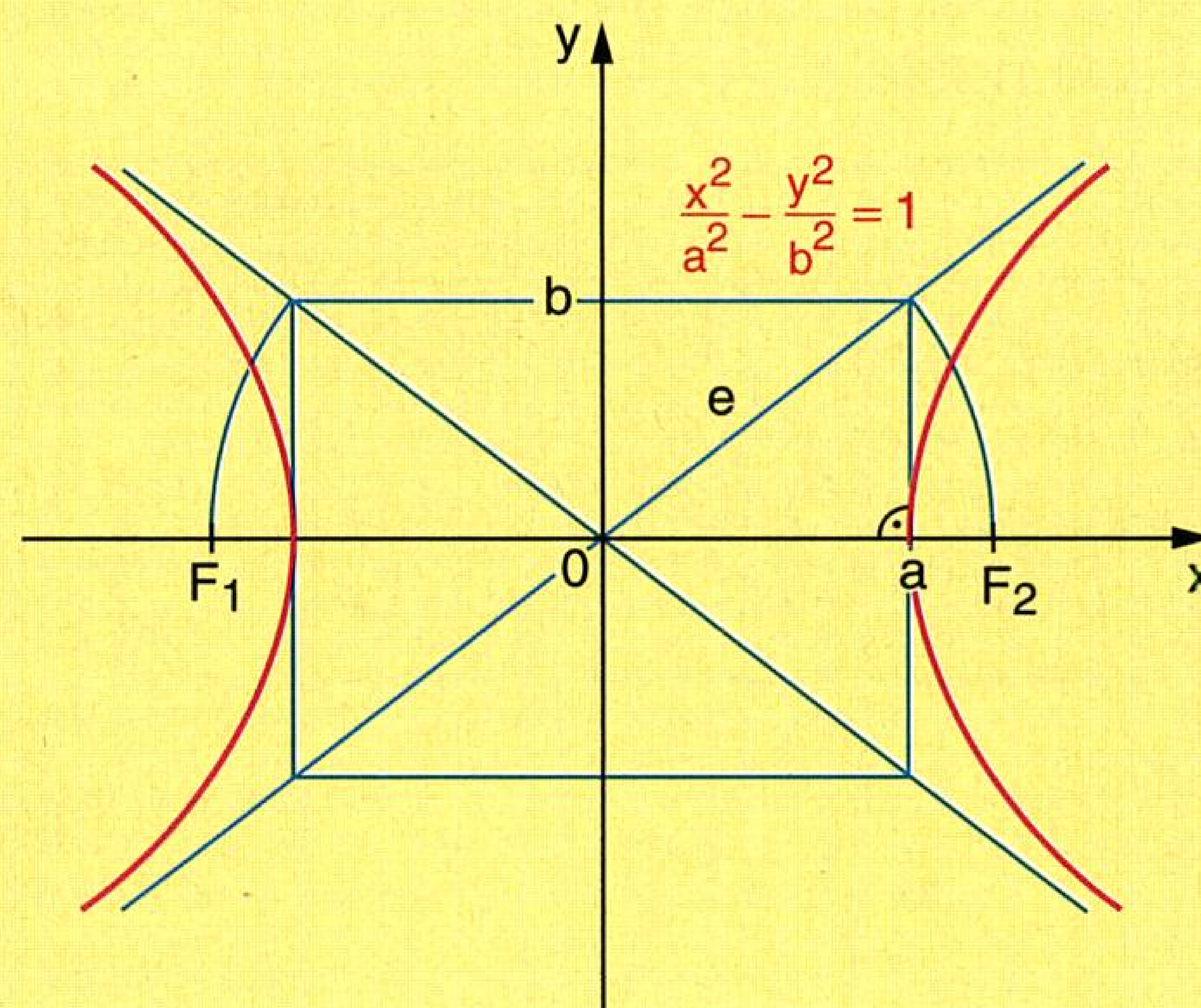
h) Das Schaubild in Aufgabe **b)** ist entsprechend der Erkenntnis aus Aufgabe **d)** zu ergänzen.

395. Es ist die DG einer Schar **konfokaler Ellipsen** (Ellipsen mit den selben Brennpunkten) aufzustellen.

Anleitung: Der Abstand $\overline{F_1F_2} = 2e$ der beiden Brennpunkte zueinander ist konstant.



396. Es ist die DG einer Schar **konfokaler Hyperbeln** (Hyperbeln mit den selben Brennpunkten) aufzustellen.
Anleitung: vgl. Aufgabe **395**.



397. **a)** Vergleichen Sie die DG konfokaler Ellipsen (vgl. Aufgabe **395.**) mit jener konfokaler Hyperbeln (vgl. Aufgabe **396.**).

b) Unter der Voraussetzung, dass beide Kurvenscharen gemeinsame Brennpunkte haben, ist zu zeigen, dass sie orthogonale Trajektorien sind (vgl. Aufgabe **392.**).

c) Es ist die DG jener Ellipsen- bzw. Hyperbelschar zu bestimmen, welche die Brennpunkte $F_1(-4, 0)$ und $F_2(4, 0)$ gemeinsam haben.

d) Aus den beiden Kurvenscharen der Aufgabe **c)** werden jene Ellipse und Hyperbel ausgewählt, die einander im Punkt P(5, 3) schneiden. Welche Steigungen weisen die beiden Kurven in ihrem Schnittpunkt auf?

e) Wie lauten ihre Funktionsgleichungen?

Anleitung: Die DG muss dazu nicht eigens gelöst werden.

f) Der Schnitt beider Kurven ist in einem geeigneten Schaubild darzustellen (E = 1 cm).

3. Grundsätzliches zum Lösen von DGen

Bisher haben wir Lösungen von DGen nur durch Herumprobieren, durch Anfertigen eines Richtungsfeldes und dessen intuitives Interpretieren gefunden. Das wäre vergleichbar damit, hätten wir uns bisher damit begnügt, beispielsweise die Lösung der Gleichung $x^2 - 2x - 15 = 0$ lediglich durch blindes Probieren und geometrisches Erahnen zu finden.

Stattdessen verstehen wir unter dem Lösen von Gleichungen die systematische Suche nach passenden Lösungen. Die abschließende Probe ist dann nur eine Art Qualitätstest. Nehmen wir eine ganz einfache DG als Beispiel.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Lösungsfunktionen der DG $y' = 2x$.

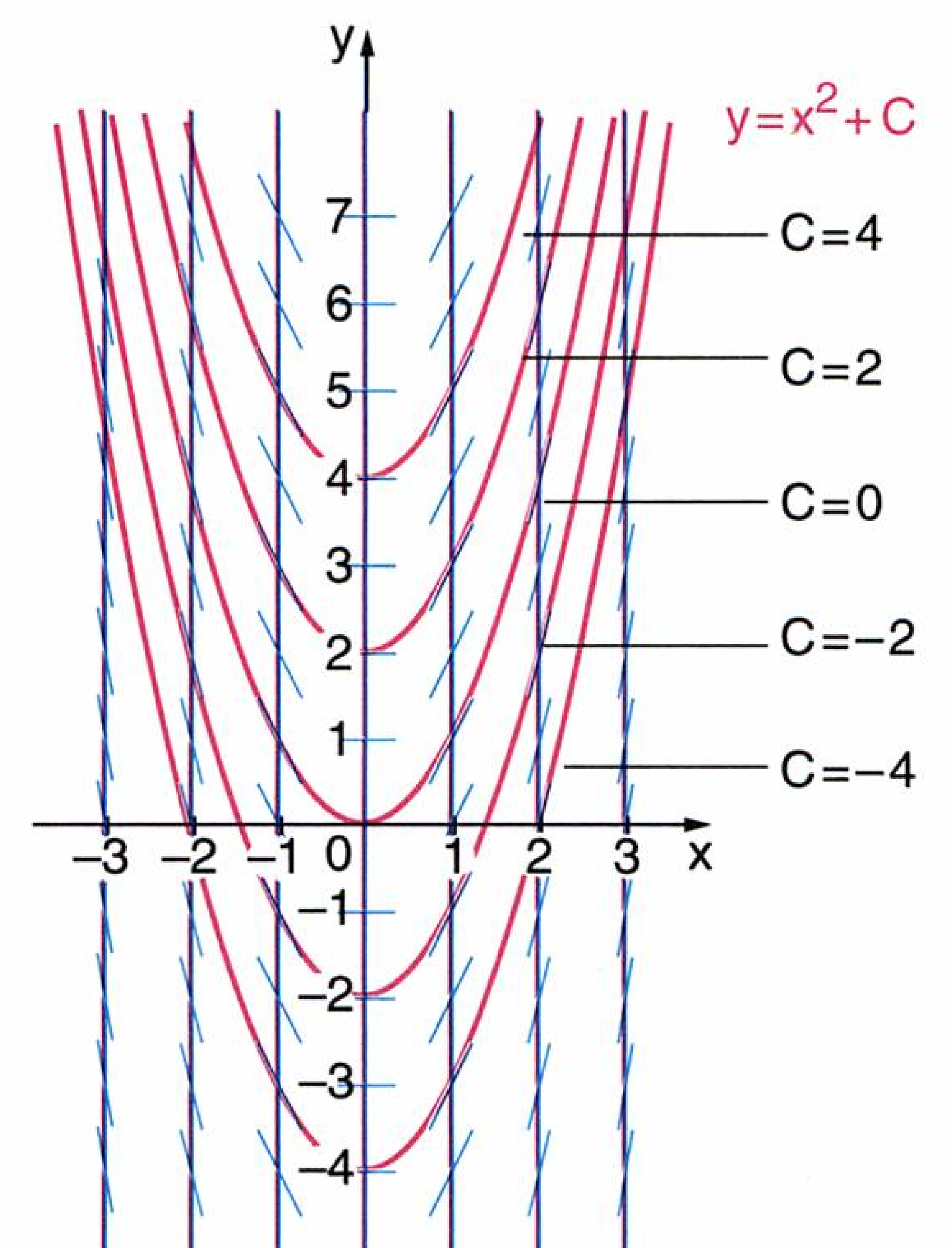
Lösung:

Hätten wir nicht gewusst, dass es sich bei $y' = 2x$ um eine (lineare) DG (erster Ordnung) handelt, ihre Lösung läge bereits längst vor! Denn wir suchen doch lediglich die **Stammfunktion** von y′. Und wie wir von der Integralrechnung her wissen, müssen wir hiefür lediglich einmal unbestimmt integrieren:

$y' = 2x$ | unbestimmte Integration auf beiden Seiten

$y = 2\int x\,dx = x^2 + C$ | deshalb Anfügen der Integrationskonstanten C

Mit $\mathbf{y = x^2 + C}$ haben wir bereits alle Lösungen gefunden. Die Kurvenschar fügt sich bestens in das von uns zuvor angefertigte Richtungsfeld.



DG des Typs:
$y' = f(x)$
Lösung:
$y = \int f(x)dx + C$

Als wir in der Vergangenheit unbestimmte Integrale der Art $y = \int f(x)dx$ ermittelt haben, haben wir – ohne es zu wissen – bereits DGen des Typs $y' = f(x)$ gelöst! Es sind dafür also keine zusätzlichen Kenntnisse erforderlich. Wir müssen für diesen einfachen Gleichungstypus lediglich die Stammfunktion von y′ ermitteln.

Dies ist nur ein Beispiel dafür, dass im Zuge des Lösungsweges einer DG oft integriert werden muss. Deshalb wird die Lösung einer DG auch ihr **Integral** genannt. Eine DG zu **integrieren**, heißt demnach einfach, sie zu lösen.

Erinnern wir uns: Bei der Bildung unbestimmter Integrale haben wir bisher die Integrationskonstante C meist nur pflichtbewusst hinzugefügt – jedoch widerwillig, da ohne rechte Einsicht in das Warum. Mit unserem Wissen aber, dass die Lösung jeder DG eine **Funktionenschar** ist, sehen wir jetzt endlich den Grund dafür: Die Integrations„konstante" ist eigentlich keine Konstante, sondern jener Parameter, der aus einer Funktion eine ganze Funktionenschar macht. In unserem Fall handelt es sich um nur **einen** Parameter. Kompliziertere DGen „produzieren" in der Lösung entsprechend mehrere Parameter.

Wir erweitern nun unsere vorige Problemstellung.

Beispiel:

Gesucht ist jene Lösung der DG $y' = 2x$, deren Graph den Punkt P(1, 2) durchsetzt.

Lösung:

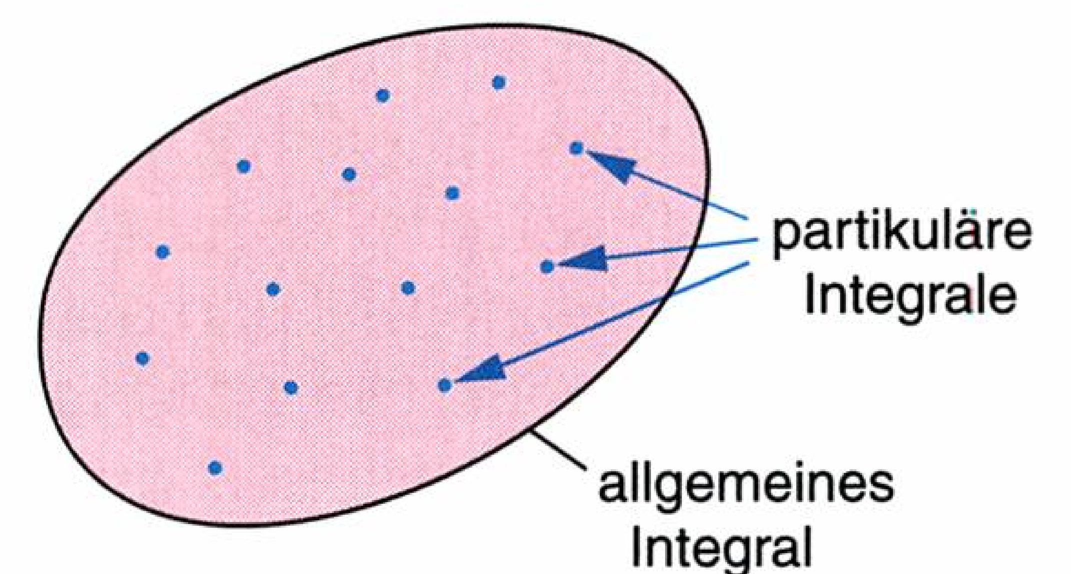
Aus dem vorigen Beispiel kennen wir das Integral der DG bereits, es lautet: $\mathbf{y = x^2 + C}$

Wir wissen weiters, dass es sich dabei um die parametrisierte Darstellung einer Schar Einheitsparabeln handelt. Nun interessieren uns aber nicht alle derartige Parabeln, sondern nur jene Parabel, welche die eingangs erwähnte Zusatzbedingung erfüllt, dass sie durch den Punkt P(1, 2) geht, also setzen wir diese Bedingung ein und bestimmen damit den Parameter C:

$2 = 1 + C$
$C = 1$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet daher: $\mathbf{y = x^2 + 1}$

An dem letzten Beispiel konnten wir mitverfolgen, wie eine Bedingung, die man an die Lösung einer DG knüpft, aus der Lösungsmenge aller Funktionsgleichungen genau ein Element davon herausgreift. Derartiges werden wir noch recht oft unternehmen. Deshalb werden hier nun einige übliche Begriffe für diesen Vorgang vereinbart.



Die gesamte Lösungsmenge einer DG heißt **allgemeines Integral der DG**. Jeweils ein Element dieser Lösungsmenge wird dann ein **partikuläres Integral der DG** genannt.

Jene Bedingungen, die aus dem allgemeinen Integral (Funktionenmenge) ein partikuläres (Funktion) herausgreifen, nennt man **Anfangs-** oder **Randbedingungen**.

Den einfachsten Fall stellt die sogenannte **Anfangsbedingung** dar. Dabei werden für einen bestimmten Wert $x = x_0$ für die gesuchte Funktion $y = f(x)$ und ihre $n - 1$ Ableitungen $y', \ldots, y^{(n-1)}$ (Anfangs-)Werte vorgegeben. Das sind somit insgesamt n Bedingungen, genau so viele wie zu bestimmende Parameter. Eine andere Möglichkeit, aus der Kurvenschar genau eine Kurve auszuwählen, besteht darin, für zwei oder mehrere x-Werte **Randbedingungen** vorzugeben. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um (Rand-)Werte für die gesuchte Funktion $y = f(x)$ bzw. um (Rand-) Werte ihrer Ableitungen. Auch hier müssen ebenso viele Bedingungen wie Parameter vorhanden sein.

Die Aufgabe, mit den gegebenen Anfangs- oder Randwerten genau eine spezielle Lösungsfunktion aus der gesamten Lösungsmenge auszusuchen, wird **Anfangswert-** oder **Randwertproblem** bezeichnet.

Achtung:
Um aus dem **allgemeinen Integral** einer DG ein **partikuläres Integral** auszusondern, sind sämtliche freien Parameter zu bestimmen.
Dazu muss die **Anzahl** der zu verwertenden **Rand-** bzw. **Anfangsbedingungen** gleich der **Anzahl** vorhandener **Parameter** sein.

Wenden wir diese neuen Begriffe auf die beiden vorigen Beispiele an: Das **allgemeine Integral** der DG $y' = 2x$ lautete $y = x^2 + C$. Die **Randbedingung** $y(1) = 2$ sonderte aus dem allgemeinen Integral das **partikuläre Integral** $y = x^2 + 1$ aus.

AUFGABEN

In den Aufgaben **398.** bis **400.** ist jeweils zunächst das Richtungsfeld zu bestimmen. Anhand diesem ist abzuschätzen, um welche Funktionenschar es sich bei der Lösung der jeweiligen DG handelt. Anschließend sind sowohl allgemeines wie auch partikuläres Integral zu bestimmen.

398. a) $y' = \frac{2}{x} \quad y(e) = 4$ **b)** $\frac{dv}{dt} = 2t \quad v(2) = 4$

In das Schaubild der Funktionenschar ist eine signifikante Auswahl an Isoklinen einzuzeichnen.

399. a) $y' = 2xe^{-x} \quad y(0) = 1$ **b)** $y' = 3\tan x \quad y(\pi) = -4$

400. a) $\frac{ds}{dt} = 4\sin 3t \quad s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$ **b)** $dy = \sqrt[3]{5x^2}\,dx \quad y(5) = 10$

Demonstrieren wir das Bisherige (Aufstellen von DGen, Integration, Lösen des Anfangs- oder. Randwertproblems) anhand zweier ausführlicher Beispiele aus der elementaren Physik (lotrechter Wurf) und der Mechanik (Biegelinie). Bei den folgenden Beispielen kann die Lösung einfach durch Integrieren gefunden werden. Weitere Kenntnisse sind zunächst nicht erforderlich.

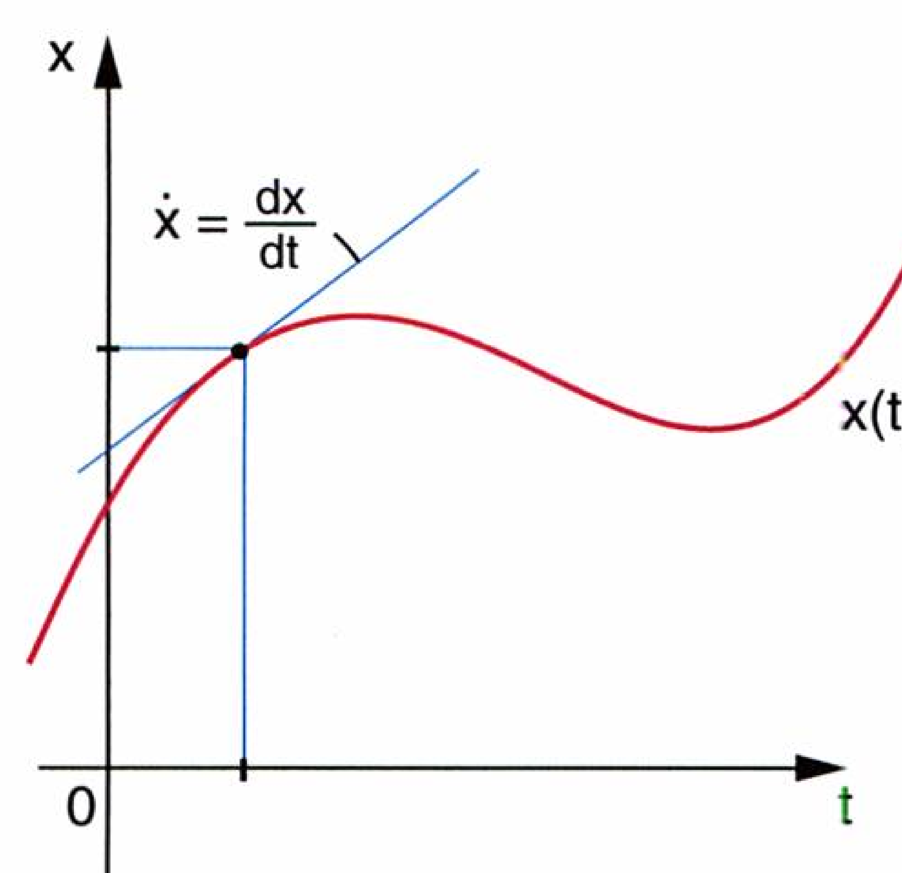
3.1 Lotrechter Wurf[1)]

Beispiel:
Wie lautet die Bewegungsgleichung für den lotrechten Wurf eines Objekts im Erdschwerefeld?

Lösung:

Aufstellen der DG:

Wir vereinbaren zunächst, den gesamten Bewegungsvorgang in einem Weg-Zeit-Diagramm abzubilden: auf der Abszisse tragen wir die unabhängige Zeitvariable t und auf dessen Ordinate die momentane Höhe x des Objekts auf. Die abhängige Variable x möge jeweils von einem bestimmten Bezugspunkt aus vermessen werden.



Nach dem NEWTONschen Gesetz werden Gegenstände unter dem Einfluss der Gravitationskraft von der Erde angezogen mit der Wirkung, dass die Objekte in diese Richtung hin gleichförmig beschleunigt und in der Gegenrichtung entsprechend abgebremst werden. Die Beschleunigung g wird empirisch ermittelt und beträgt üblicherweise etwa 9,81 m/s^2.

Es gilt also: Beschleunigung = – g

Das negative Vorzeichen rührt daher, dass die beschleunigende Kraft des Objekts der von uns vereinbarten Orientierung von x entgegengesetzt ist.
Nun müssen wir die „Beschleunigung" in unserer Formel irgendwie anders darstellen. Aus der Physik wissen wir, dass Momentangeschwindigkeit und Beschleunigung der ersten Ableitung $\dot{x}$ (gesprochen: x-punkt) bzw. der zweiten Ableitung $\ddot{x}$ (gesprochen: x-zwei-punkt) entsprechen. (Die Punkte über der Variablen deuten üblicherweise an, dass es sich um einen **zeitlichen** Vorgang x(t) handelt und die

1) Bewegungsbahnen eines schiefen Wurfes:
http://www.walter-fendt.de/ph14d/

Ableitung $\frac{dx}{dt}$ bzw. $\frac{d^2x}{dt^2}$ nach der Zeitvariablen t gemeint sind.) Damit können wir unsere obige Gleichung nun komplett in die Formelsprache übersetzen:

$$\ddot{x} = -g$$

Das ist die DG des lotrechten Wurfs. Sie ist linear und von zweiter Ordnung. Ihr allgemeines Integral bestimmen wir durch zweimaliges Integrieren:

DG des Typs:
$y'' = f(x)$
Lösung:
(1) $y' = \int f(x)dx + C_1$
(2) $y = \iint f(x)dxdx + C_1x + C_2$

Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$\ddot{x} = -g$
(1) $\dot{x} = -gt + C_1$
(2) $x = \frac{-g}{2} \cdot t^2 + C_1t + C_2$

Im Zuge der Integration sind zwei Integrationsparameter C_1 und C_2 dazugekommen. Es handelt sich dabei um jene Parameter, mit deren Hilfe das **allgemeine Integral der DG** dargestellt wird.

Anfangswertproblem:

Mit dem allgemeinen Integral haben wir aber noch keinen konkreten Bewegungsablauf unseres Objekts beschrieben. Erst wenn wir zusätzlich noch etwaige Anfangsbedingungen berücksichtigen, erhalten wir ein **partikuläres Integral der DG**.
Da wir **zwei Parameter** haben, müssen ebenso **zwei Anfangsbedingungen** herangezogen werden. Wir wählen die beiden folgenden:

1. Die Bewegung x(t) startet zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ in der Höhe x_0; also kurz: $x(0) = x_0$
2. Die Geschwindigkeit v(t) hat zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ den Betrag v_0; also kurz $\dot{x}(0) = v_0$

(Die Wahl erscheint vor allem aus physikalischer Sicht praktisch, jedoch wären prinzipiell auch zwei ganz andere Bedingungen denkbar.)

Bei x_0 und v_0 handelt es sich nun um Konstante (wir können uns also beispielsweise denken, dass $x_0 = 2m$ und $v_0 = 5m/s$ beträgt). Nun müssen wir dieses Wissen in unser allgemeines Integral einarbeiten. Wir setzen die erste Bedingung in die Funktionsgleichung und die zweite Bedingung in deren Ableitung (die wir im Zuge der Integration sowieso schon erhalten haben) ein:

$x_0 = \frac{-g}{2} \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2$ $\quad$ $v_0 = -g \cdot 0 + C_1$
$\mathbf{C_2 = x_0}$ $\quad$ $\mathbf{C_1 = v_0}$

Diese beiden Ergebnisse setzen wir nun wieder in das allgemeine Integral ein

$$\mathbf{x(t) = \frac{-g}{2} \cdot t^2 + v_0t + x_0}$$

und erhalten somit ein **partikuläres Integral der DG**.

Mögliche Kombinationen von zwei **Randbedingungen** für den lotrechten Wurf:

1. 2 Ortsinformationen
2. 1 Ortsinformation
   1 Geschwindigkeits-Information (vgl. nebenstehendes Beispiel)
   $x(t_1) = x_1$
   $\dot{x}(t_2) = v_2$

Warum ist es hier nicht möglich, zwei Geschwindigkeits-Informationen zu verwerten? (vgl. Aufgabe **404.**)

Bemerkung: Die Bezeichnung partikuläres Integral für die letzte Funktionsgleichung für x(t) ist nur insofern gerechtfertigt, als wir uns x_0 und v_0 als Konstante und nicht als Parameter (wie eben C_1 und C_2) denken. Andernfalls würde sich die Gleichung nicht wesentlich vom allgemeinen Integral unterscheiden!

Beispiel:
Der Bewegungsablauf eines senkrecht geworfenen Gegenstandes ist für folgende zwei Situationen in einem gemeinsamen Schaubild grafisch darzustellen:

a) Der Gegenstand wird in einer Höhe von 2 m fallengelassen.

b) Der Gegenstand wird emporgeschleudert, erreicht nach 1 s eine Höhe von 20 m und fällt nach weiteren 2 s zu Boden.

Die Erdbeschleunigung kann der Einfachheit halber mit 10 m/s² angenommen werden.

Lösung:

a) Es gelten die Anfangsbedingungen: $x(0) = 2$, $v(0) = 0$ (während der Rechnung dürfen die Einheiten weggelassen werden). Damit entsprechen die Anfangsbedingungen genau jenen des vorigen Beispiels. Wir müssen also nur in das bereits vorliegende partikuläre Integral einsetzen:

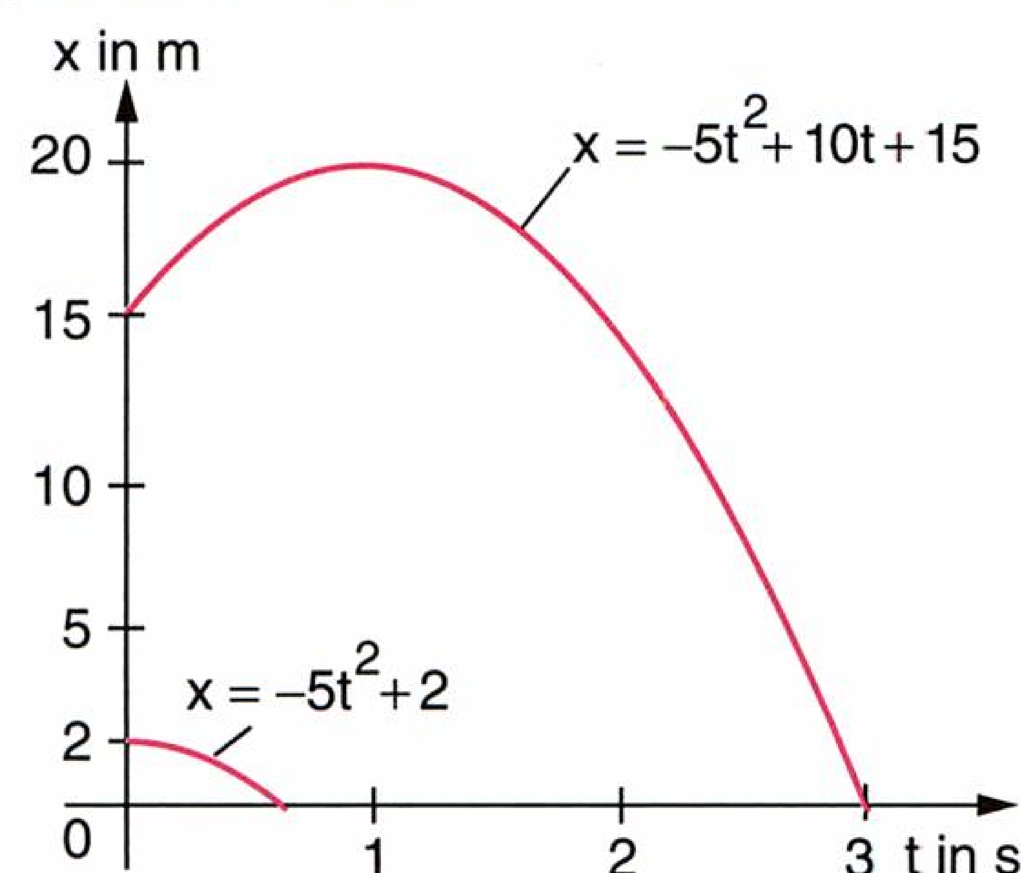
$$\mathbf{x(t)} = \frac{-10}{2} \cdot t^2 + 0 \cdot t + 2 = \mathbf{-5t^2 + 2}$$

b) Es gelten die Randbedingungen: $x(1) = 20$, $x(3) = 0$. Nachdem es sich hier nicht mehr um Angaben zum Zeitpunkt Null (wie im vorigen Beispiel) handelt, müssen wir beide Ortsinformationen in das allgemeine Integral einsetzen, um das zugehörige partikuläre Integral zu erhalten:

$$20 = -5 + C_1 + C_2$$
$$0 = -5 \cdot 9 + 3C_1 + C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} 25 = C_1 + C_2 \\ 45 = 3C_1 + C_2 \end{array}\right\} - \quad \Rightarrow C_1 = 10,\ C_2 = 15$$

$$\mathbf{x(t) = -5t^2 + 10t + 15}$$



Um die allgemeine Darstellung des partikulären Integrals

$x(t) = \frac{-g}{2} \cdot t^2 + v_0 t + x_0$ verwenden zu können, hätten die

Anfangsbedingungen lauten müssen: $x_0 = 15$, $v_0 = 10$. Oder in Worten: Der Gegenstand wird in einer Höhe von 15 m mit 10 m/s emporgeschleudert.
Das vorliegende Beispiel kann auch auf eine etwas andere Weise gerechnet werden (vgl. Aufgabe **403.**)

AUFGABEN

401. Ein Gegenstand wird in einer Höhe von 7 m mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 2 m/s empor geschleudert.

a) Wie lauten die Anfangsbedingungen?

b) Beschreiben Sie die Flugbahn.

c) Nach welcher Zeit fällt der Gegenstand zu Boden?

402. **a)** Ein Tennisball wird aus 8 m Höhe fallen gelassen. Wie lauten die Anfangsbedingungen? Nach wie vielen Sekunden schlägt der Ball auf?

b) Der Ball wird mit 3 m/s nach unten geworfen. Wie lauten die Anfangsbedingungen? Wie lange dauert der Flug bis zum Aufprall?

c) Beide partikulären Integrale sind in ein gemeinsames Schaubild einzutragen.

403. Ein senkrecht in die Höhe geworfener Gegenstand erreicht nach 1 s seine maximale Höhe und fällt nach weiteren 2 s zu Boden. Wie lauten die Anfangsbedingungen und die Bahnkurve?

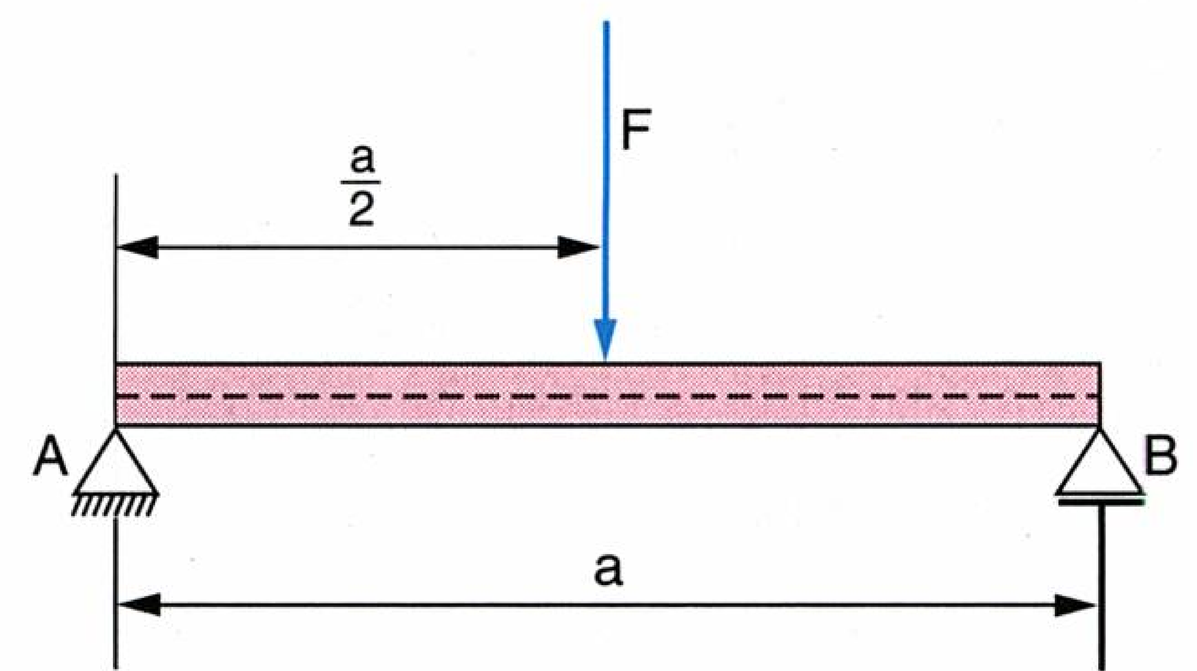
Anleitung: Benützen Sie das auf Seite **155** ermittelte partikuläre Integral für einen lotrechten Wurf und bestimmen Sie den Scheitel der Wurfparabel.

404. Warum sind beim lotrechten Wurf zwei Geschwindigkeitsinformationen als Randbedingung nicht möglich?

3.2 Biegelinie

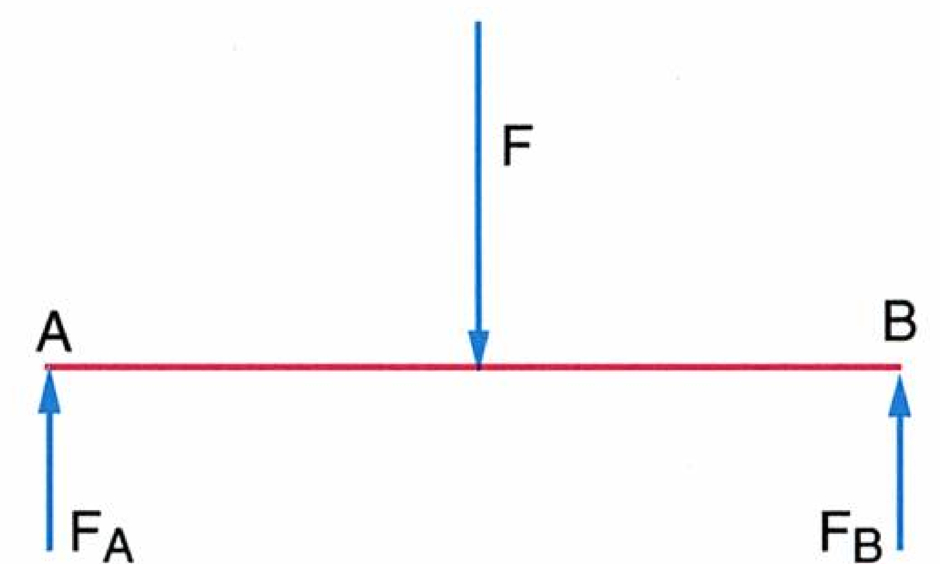
Beispiel:

Ein elastischer Stab der Länge a ruht auf zwei Auflagepunkten (A und B) und wird in seiner Mitte mit einer Einzelkraft F lotrecht belastet (vgl. Figur). Welche Form nimmt der (massenlose) Stab unter der Belastung an, wenn wir voraussetzen, dass sowohl seine Materialeigenschaften als auch sein Querschnitt über die gesamte Stablänge unverändert bleibt?



Lösung:

Aufstellen der DG:



Wird ein elastischer Stab wie in der nebenstehenden Figur gebogen, so wird die Stabunterseite dabei gedehnt, die Staboberseite jedoch gestaucht. Irgendwo dazwischen können wir uns eine Linie denken, die spannungslos bleibt und deshalb bei der Verformung des Stabs ihre Länge nicht ändert. Die Mechanik spricht in diesem Fall von der sogenannten **neutralen Faser**. Diese neutrale Faser beschreibt unter Last die sogenannte **elastische Linie** oder **Biegelinie**. Bei der Lösung unserer Aufgabe wird uns nur interessieren, wie diese Biegelinie aussieht. Es interessiert uns hier aber nicht – wie etwa beim lotrechten Wurf – wie die Biegelinie sich unter der Krafteinwirkung **zeitlich** ändert, sondern lediglich wie sie in ihrem stabilen Endzustand aussieht. Und dieser Endzustand ist physikalisch ein Gleichgewichtszustand. Wann aber befindet sich der Stab im Gleichgewicht? Wenn er sich nicht mehr "rührt", wenn also die Summe der auf ihn einwirkenden Kräfte (die „Resultierende") Null ist. Auf den Stab wirken drei Kräfte: die Einzellast F und die beiden Auflagekräfte F_A und F_B, die aus Symmetriegründen gleich sind: $F_A = F_B$

Gleichgewicht herrscht bei:

$$F_A + F_B - F = 0$$

$$2F_A = F$$

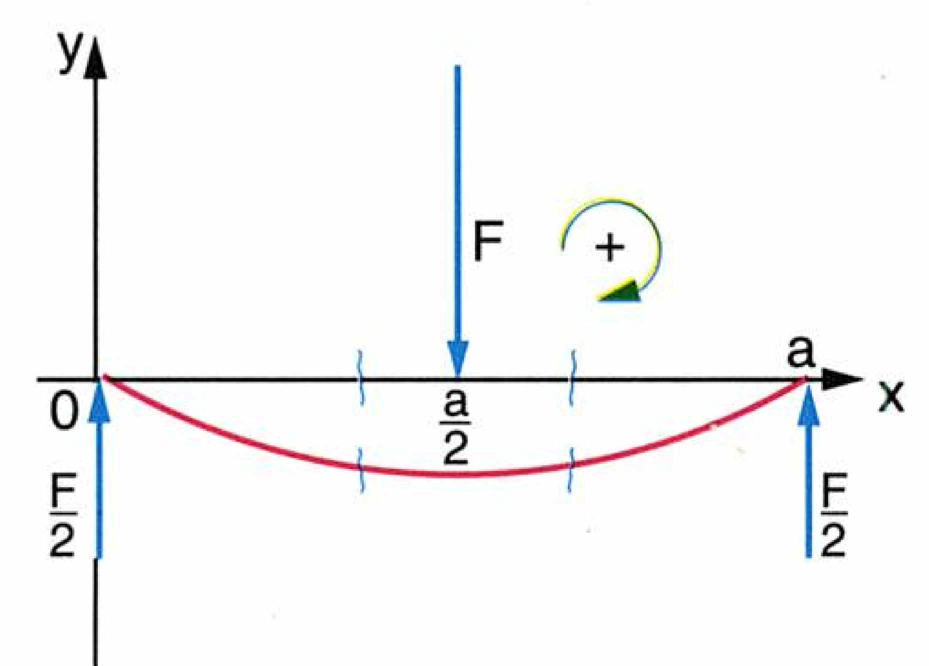
$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

Und nun ziehen wir die Erkenntnisse der Festigkeitslehre zu Rate. Diese teilt uns mit, dass die örtliche Krümmung $\kappa(x)$ der Biegelinie proportional zum dort wirksamen Drehmoment (bzw. Biegemoment) M(x) ist, solange sich der Stab im elastischen Bereich befindet:

$$\kappa(x) \sim M(x)$$

Das ist anschaulich klar: umso stärker eine verbiegende Kraft auf eine Stelle einwirkt, desto stärker krümmt sich der Stab unter ihr! Jetzt ist der Augenblick gekommen, wo wir unsere Biegelinie in ein Koordinatensystem verlegen müssen. Wir wählen hierzu unser gewohntes xy-System. Dann können wir die Krümmung κ einer Kurve $y = f(x)$ darstellen als:

$$\kappa(x) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Angesichts dieser Formel haben wir nun die Chance, unsere ursprüngliche Problemstellung deutlich zu vereinfachen. Denn wir sehen aus obiger Formel, dass wir eine gute Näherung für die Krümmung κ erhalten können:

$$|y'| \approx 0 \text{ bzw. } |y'| << 1 \Rightarrow \kappa \approx y''$$

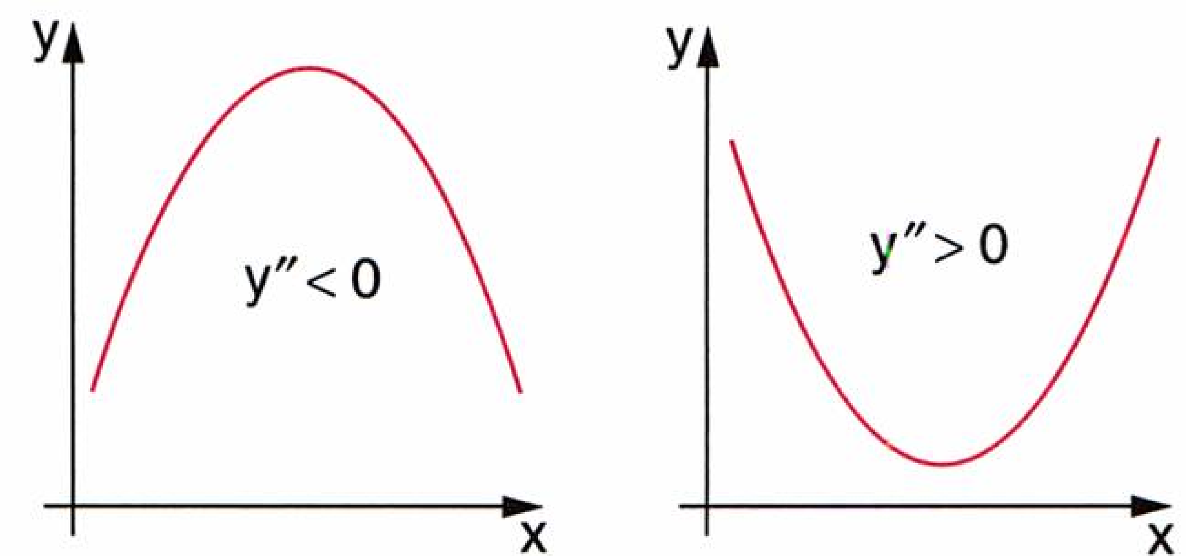
Das bedeutet, dass es vertretbar ist, y″ als Näherung für die Krümmung κ zu betrachten, solange der Kurvenanstieg y′ der Biegelinie sehr klein im Vergleich zu 1 bleibt. Diese Bedingung muss natürlich entlang der gesamten Biegelinie erfüllt sein.

Dadurch vereinfacht sich nun unsere Beziehung wesentlich: $y'' = k \cdot M(x)$

Übrigens beträgt die Größe des Proportionalitätsfaktors k laut Festigkeitslehre $\frac{1}{EJ}$

E ..... Elastizitätsmodul des Stabmaterials, ein stoffabhängiger Parameter
J ..... Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnits bezüglich der horizontalen Schwerachse

In der obigen Zeichnung haben wir bereits angedeutet, **im Uhrzeigersinn** wirkende Biegemomente positiv zu zählen. (Das ist aber nur eine Vereinbarung.) Diese Momente haben die Wirkung, einen realen Stab **nach unten zu krümmen**. y'' muss passend dazu negativ sein. Damit dies geschieht, fügen wir in der Gleichung noch ein negatives Vorzeichen ein. (Sonst würde die **abwärts** gerichtete Kraft F eine sich **nach oben krümmende** Biegelinie bewirken, was offenbar unsinning wäre.)



$$y'' = -\frac{M(x)}{EJ}$$

Damit haben wir die DG der Biegelinie teilweise aufgestellt. Ihre rechte Seite ist uns noch nicht näher bekannt. Trotzdem kann über diese DG bereits ausgesagt werden, dass sie in Grad (linear) und Ordnung (2) mit jener des lotrechten Wurfs übereinstimmt. Bestimmen wir nun auch die rechte Seite unserer DG. Wir drücken den Momentenverlauf M(x) mit Hilfe der drei Kräfte F, F_A, F_B, der Stablänge a und der jeweiligen Stelle x aus. Sehen wir uns beide Stabhälften getrennt voneinander an.

Aus der Elementarphysik wissen wir:
Moment = Kraft mal Abstand
Unter dem „Abstand“ wird dabei der Normalabstand der Wirkungslinie der Kraft vom betrachteten Punkt verstanden.

Linke Stabhälfte $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}\right)$:

Rechte Stabhälfte $\left(\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant a\right)$:

Wir wählen eine beliebige Stelle x auf dem Stab und vereinbaren zweierlei:

(1) Sämtliche (Biege-)Momente, die auf die Stelle x im **Uhrzeigersinn** einwirken, sollen **positiv** gezählt werden.

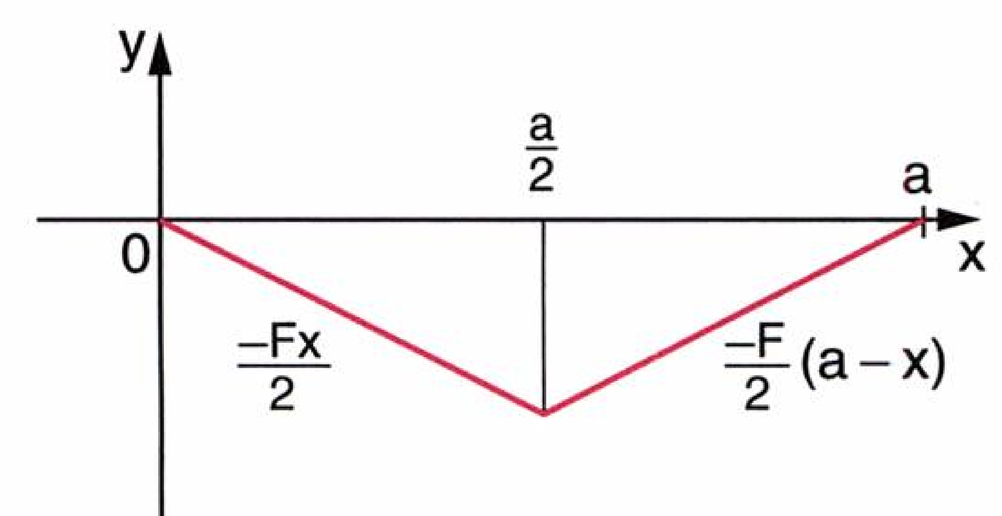
(2) Von **links** auf die Stelle x einwirkende (Biege-)Momente werden ignoriert.

Die rechte Seite ist – entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Seite – auf einem separaten Blatt zu vervollständigen (vgl. Aufgabe **405.**):

$$M_L(x) = +F\left(\frac{a}{2} - x\right) - F_A(a - x) =$$
$$= F\left(\frac{a}{2} - x\right) - \frac{F}{2}(a - x) = \frac{-Fx}{2}$$

$$M_R(x) = \ldots$$
$$\vdots$$
$$= \frac{-F}{2}(a - x)$$

Aus diesen beiden Ergebnissen ist ersichtlich, dass wir M(x) nicht mit einer **einzigen** Funktionsgleichung für das gesamte Intervall $0 \leqslant x \leqslant a$ darstellen können. Wir können diese Schwierigkeit aber umgehen, indem wir zwei getrennte DGen aufstellen.



$$y_L'' = \frac{-M(x)}{EJ}$$
$$y_L'' = \frac{Fx}{2EJ}$$

$$y_R'' = \frac{-M(x)}{EJ}$$
$$y_R'' = \cdots$$

Damit haben wir beide DGen der Biegelinie aufgestellt, die wir lediglich 2-mal integrieren müssen.

DG des Typs:
$y^{(n)} = f(x)$
Lösung:

(1) $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$

$\vdots \quad \vdots$

(n) $y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x)dx \cdots dx + \sum_{i=1}^{n} C_i x^{i-1}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung

(1) $y'_L = \frac{Fx^2}{4EJ} + A$

(2) $y_L = \frac{Fx^3}{12EJ} + Ax + B$

(1) $y'_R = \ldots$

$\vdots$

(2) $y_R = \ldots$

Randwertproblem:

Die allgemeinen Integrale der beiden DGen enthalten insgesamt **vier Integrationsparameter** A, B und C, D, die mit jeweils zwei Randbedingungen bestimmt werden können. Naheliegend sind die folgenden **vier Bedingungen**:

1. Der Stab ruht auf dem linken Stützpunkt auf, der sich im Koordinatenursprung befindet: $y_L(0) = 0$
2. Da die Biegelinie einen bezüglich der Achse $x = \frac{a}{2}$ symmetrischen Verlauf nehmen muss und nicht knicken darf, gilt:

   $y'_L\left(\frac{a}{2}\right) = 0$

3. Der Stab ruht auf dem rechten Stützpunkt auf: $y_R(a) = 0$
4. Da die Biegelinie einen bezüglich der Achse $x = \frac{a}{2}$ symmetrischen Verlauf nehmen muss und nicht knicken darf, gilt:

   $y'_R\left(\frac{a}{2}\right) = 0$

Wir setzen die erste (dritte) Randbedingung in die Lösungsfunktion ein:

$0 = \frac{F}{12EJ} \cdot 0 + A \cdot 0 + B$

$B = 0$

…

Die zweite (vierte) Randbedingung wird in die Ableitungsfunktion y′ eingesetzt, die während der Integration nebenbei entstanden ist. Ein eigenes Ableiten ist daher nicht nötig:

$0 = \frac{F}{4EJ} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + A$

$A = \frac{-Fa^2}{16EJ}$

…

Durch die Bestimmung der beiden Integrationsparameter A und B (C und D) greifen wir jeweils aus dem allgemeinen Integral ein partikuläres heraus:

$y_L = \frac{Fx^3}{12EJ} - \frac{Fa^2}{16EJ} \cdot x + 0$

$y_L = \frac{Fx}{48EJ}(4x^2 - 3a^2)$

$y_R = \ldots$

$\vdots$

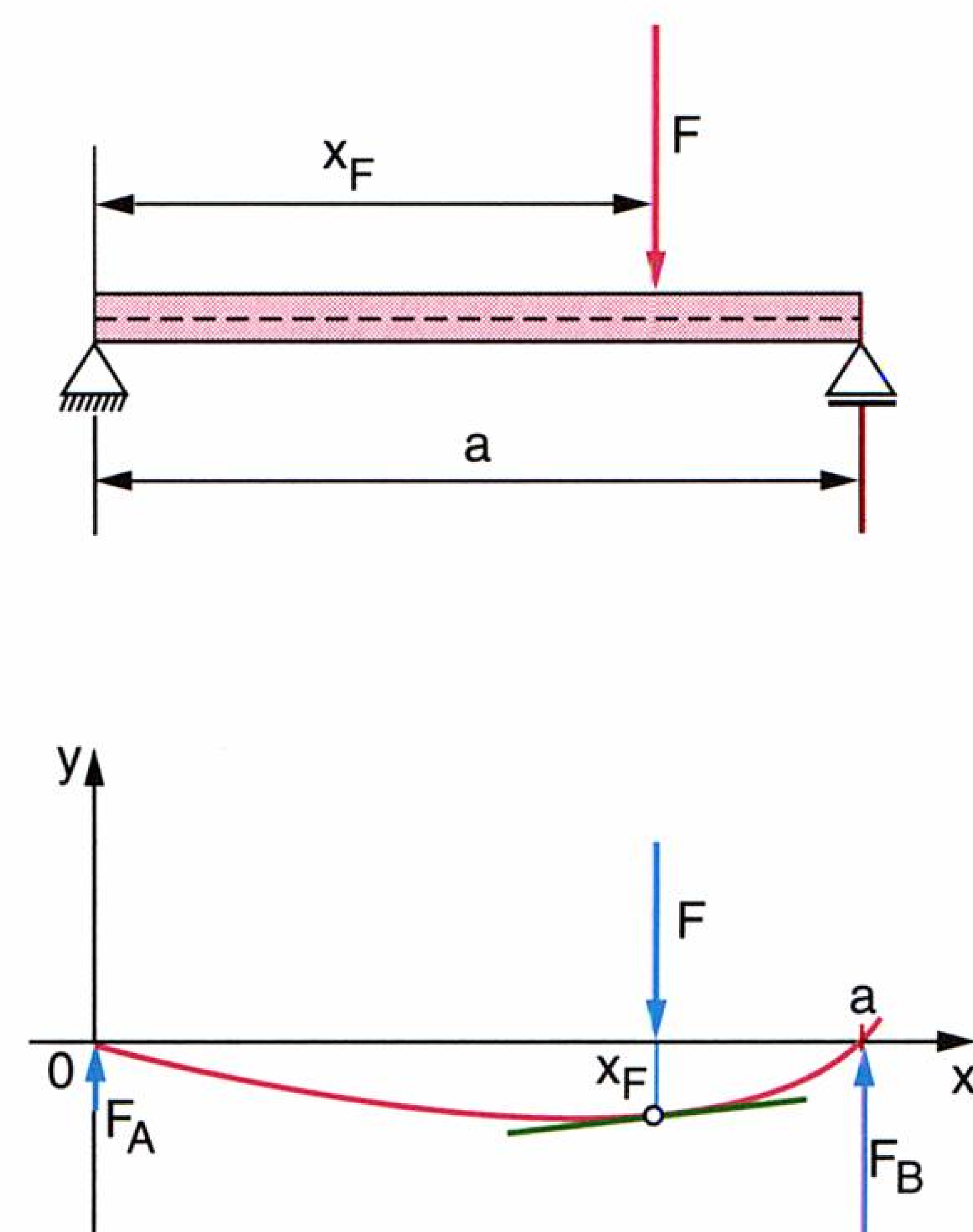
$y_R = \frac{F}{48EJ}(-4x^3 + 12ax^2 - 9a^2x + a^3)$

Solange die Einzelkraft F mittig angreift, wird die Biegelinie symmetrisch verlaufen und die maximale Durchbiegung f **in der Stabmitte** auftreten. Eine gute Probe besteht nun darin, zu überprüfen, ob beide Funktionen an der Stelle $x = \frac{a}{2}$ jeweils den gleichen Wert annehmen (vgl. Aufgabe **406.**).

Diese symmetrischen Verhältnisse verschwinden, sobald der Stab asymmetrisch belastet wird. Wie diese geänderte Ausgangssituation das Randwertproblem beeinflusst, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel:

Wie ändern sich die Randbedingungen im vorigen Beispiel, wenn die Einzelkraft F außerhalb der Mitte an der Stelle x_F angreift?



Lösung:

1. **Randbedingung:**
   bleibt unverändert: $y_L(0) = 0$
2. **Randbedingung:**
   Da die Biegelinie überall stetig sein muss, also auch an der Stelle x_F der Krafteinwirkung keine Unstetigkeitsstelle aufweisen darf, müssen dort die Funktionswerte übereinstimmen: $y_L(x_F) = y_R(x_F)$
3. **Randbedingung:**
   bleibt unverändert: $y_R(a) = 0$
4. **Randbedingung:**
   Die Biegelinie darf an der Stelle x_F keinen Knick aufweisen. Daher müssen auch die ersten Ableitungen übereinstimmen: $y'_L(x_F) = y'_R(x_F)$

Warum wäre es falsch, im letzten Beispiel die beiden Ableitungen in der 4. Randbedingung Null zu setzen? (Vgl. Aufgabe **407. b)**).

AUFGABEN

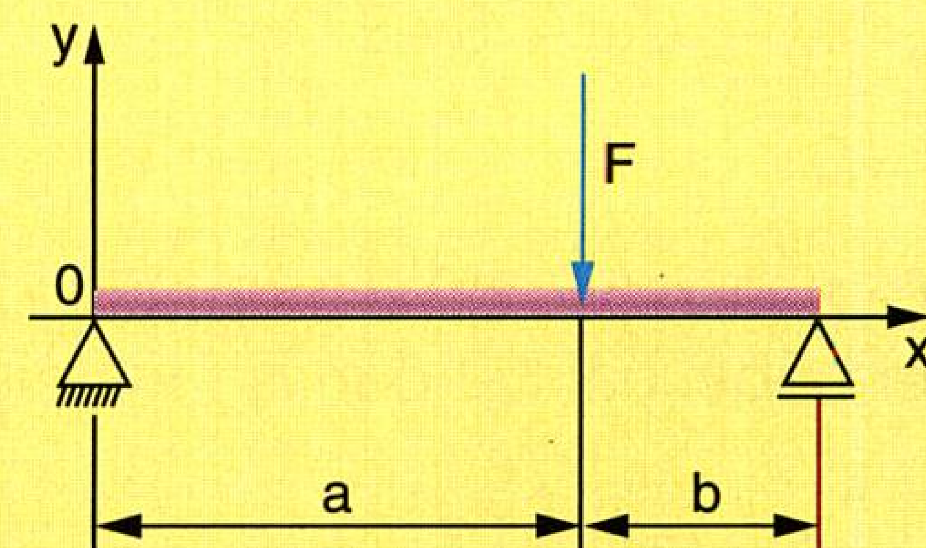
405. Es sind Momentenverlauf, DG und allgemeines Integral der DG für die rechte Hälfte des mittig belasteten Trägers (vgl. Seiten **158f.**) zu ermitteln.

406. Wie groß ist die maximale Durchbiegung des mittig belasteten Trägers (vgl. Seite **159**)? Bestimmen Sie die Funktionswerte für beide Stabhälften.

407. a) Wie lautet die Biegelinie für einen außermittig durch eine Einzelkraft F belasteten Stab?

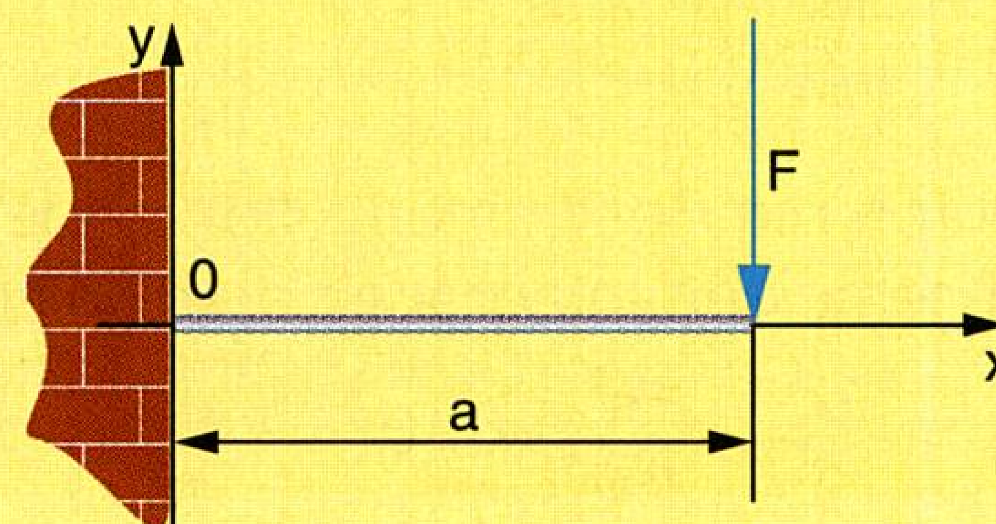
b) Warum wäre es falsch, bei einem asymmetrisch belasteten Stab als 4. Randbedingung (vgl. obiges Beispiel) $y'_L(a) = y'_R(a)$ Null zu setzen?

c) Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung der Biegelinie.



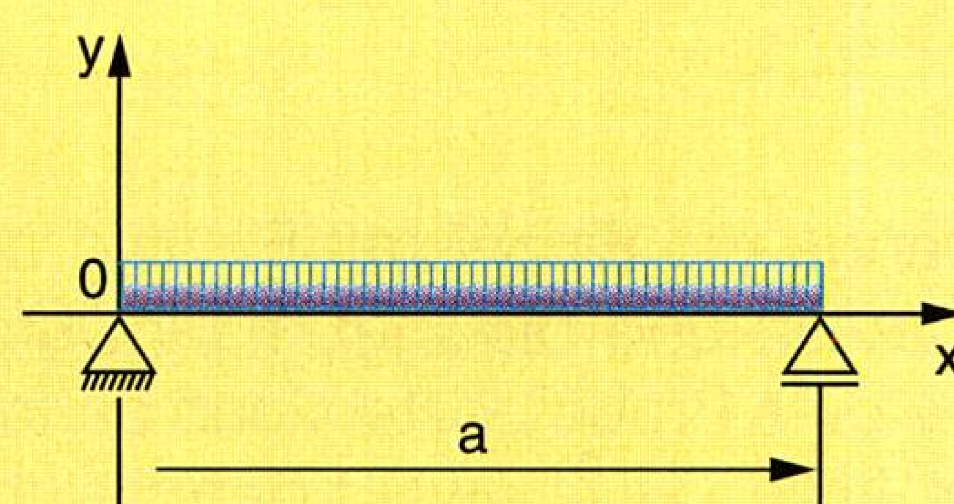
408. a) Wie lautet die Biegelinie eines einseitig eingespannten Trägers?

b) Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung der Biegelinie.



409. a) Wie lautet die Biegelinie eines Stabes unter Gleichlast (Streckenlast q)?

b) Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung der Biegelinie.



4. Einfache Lösungswege

4.1 Trennung der Variablen

Einfaches Integrieren hat uns bei den bisherigen DGen schon recht weitgebracht. Aber wird das immer so einfach sein? Betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel:

Wie lautet das allgemeine Integral der DG $y = y' x$?

Lösung:

Bei der DG handelt es sich um jene, die wir zu Beginn des zweiten Abschnitts aufgestellt haben. Die Lösung muss ergeben, dass die zugehörige Kurvenschar aus allen Geraden besteht, die durch den Koordinatenursprung laufen.

$$y' = \frac{y}{x} \quad \Big| \int$$

Der Versuch, diese DG zu integrieren, funktioniert zwar auf der linken Seite, aber was machen wir mit der rechten Seite? Diese DG können wir also nicht in der herkömmlichen Weise behandeln.

Obwohl die vorige DG doch sehr einfach gebaut ist (linear, Ordnung 1) und wir das Richtungsfeld zeichnen können (vgl. Seite **146**), kommen wir mit unserer bisherigen Methode nicht weiter.

Es gibt aber einen Trick, wie wir derartigen **DGen erster Ordnung** beikommen können. Dazu müssen sich aber die Variablen x und y algebraisch „trennen" lassen. D. h. die DG $y' = F(x, y)$ muss sich in die Form $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ bringen lassen. Dann kann man (nach dem Schema in der Außenspalte) x und dx auf die eine Seite und y und dy auf die andere Seite der Gleichung bringen. Das ist erlaubt, da auch die beiden Differenziale dx und dy Variable sind, die den üblichen Rechengesetzen unterworfen sind. Nach dieser Variablentrennung werden beide Gleichungsseiten separat integriert. Die auf beiden Gleichungsseiten entstehenden Integrationsparameter können zu einem gemeinsamen zusammengefasst werden. Eine Begründung hierfür findet sich in Aufgabe **412.** Mit diesem Wissen lässt sich das vorige Beispiel sehr schnell lösen. Der Verständlichkeit halber stellen wir jedoch den Lösungsweg in seiner ganzen Detailliertheit dar!

Trennung der Variablen:

(1) Ordnung der DG muss 1 sein

(2) DG $y' = F(x, y)$ muss sich umformen lassen in
$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

(3) Trennen der Variablen:
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

(4) Unbestimmte Integration:
$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2$$

(5) Zusammenfassen der Integrationskonstanten:
$G(y) = F(x) + C$

Bemerkung: Differenziale wie dx und dy sind **Variable**, mit denen man ganz normal rechnen darf!

Lösung (Fortsetzung des vorigen Beispiels):

(1) Die Ordnung der DG $y' = \underbrace{\frac{y}{x}}_{F(x,y)}$ ist 1. Das ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Methode der Variablentrennung.

(2) Umformung: $y' = \underbrace{y}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$ Damit sind alle Bedingungen für die Variablentrennung erfüllt.

(3) Trennen der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{x} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

(4) Unbestimmte Integration auf beiden Gleichungsseiten:

$$\int \frac{dy}{y} + C_1 = \int \frac{dx}{x} + C_2$$

$$\underbrace{\ln|y|}_{G(y)} + C_1 = \underbrace{\ln|x|}_{F(x)} + C_2$$

(5) Zusammenfassen der Integrationsparameter:

$\ln|y| = \ln|x| + C$

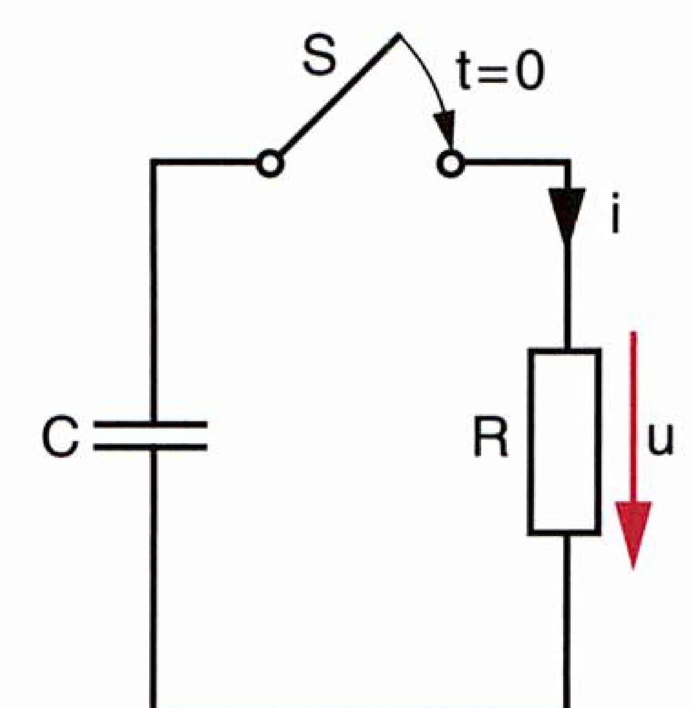
$\ln|y| = \ln|x| + \underbrace{\ln|k|}_{=C}$ |Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen

$\ln|y| = \ln|kx|$ |Entlogarithmieren

$\mathbf{y = \pm kx}$

Dem allgemeinen Integral der DG y = y′x entspricht tatsächlich – wie zu erwarten war – ein Geradenbüschel durch den Koordinatenursprung! Damit haben wir erfolgreich sowohl die zugehörige DG aufgestellt als auch wiederum gelöst.
Mit der „Trennung der Variablen" haben wir eine Methode kennengelernt, die sich auf sehr viele DGen erster Ordnung anwenden lässt. Viele Problemstellungen aus Naturwissenschaft und Technik führen auf DGen mit derartig trennbaren Variablen. Wir stellen ein solches Problem aus dem Bereich der Elektrotechnik (Entladung eines Kondensators) exemplarisch vor.

Beispiel:
Ein Kondensator der Kapazität C wurde auf die Spannung U_0 aufgeladen. Zum Zeitpunkt t = 0 wird der Schalter S geschlossen, worauf sich der Kondensator über den Widerstand R entlädt. Welchen zeitlichen Verlauf nimmt der Spannungsabfall u(t) am Kondensator?



Lösung:

Aufstellen der DG:

Zunächst ist die DG für die Spannung u(t)[1] aufzustellen.

Die Spannung u gehorcht dem OHMschen Gesetz, da sie am Widerstand R anliegt.

(1) $u = i \cdot R$

Dabei ist i der Strom, der durch den Widerstand R fließt. Der Stromfluss kommt zustande, da der Kondensator seine Ladung q **abbaut**. i ist also der **Entladungsstrom**. Der Ladungsabbau folgt daher dem Gesetz

(2) $i = \frac{-dq}{dt}$

Das negative Vorzeichen ist damit begründet, dass der Stromfluss proportional zur **Ladungsabnahme** ist. Ladung q und Spannung u sind aber noch über die **Kondensatorgleichung** miteinander verbunden:

$q = C \cdot u$

Ihre differenzielle Form lautet:

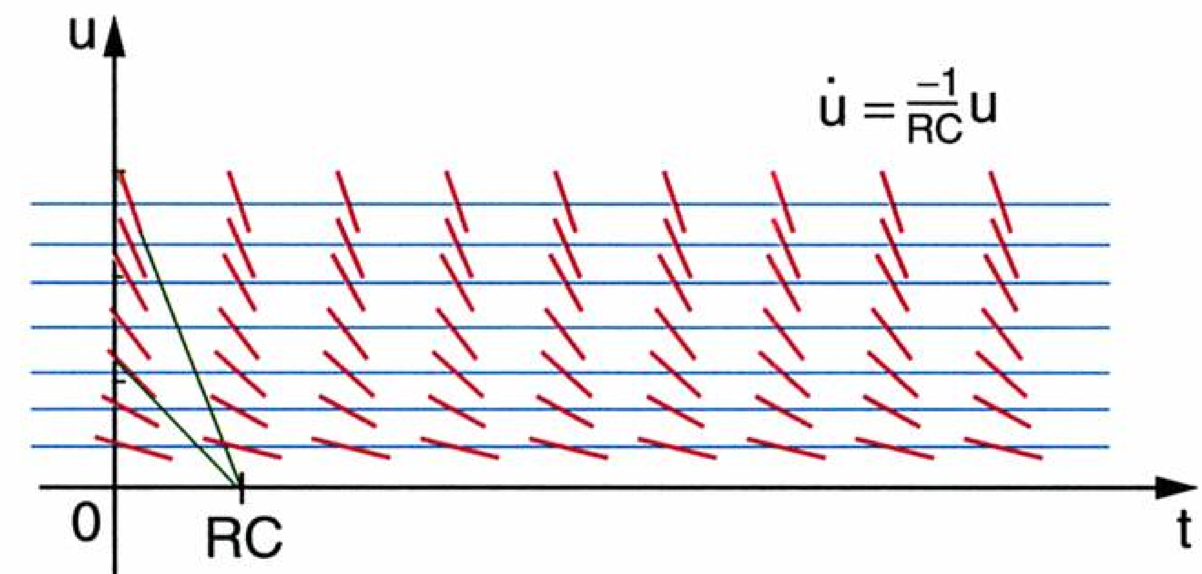
(3) $dq = C \cdot du$

[1]) In der Elektrotechnik werden üblicherweise konstante Größen mit Großbuchstaben (U, I etc.), zeitlich veränderliche Größen jedoch mit Kleinbuchstaben (u, i etc.) gekennzeichnet.

Wir setzen die Gleichungen (2) und (3) in die Gleichung (1) ein:

(1) $u = i \cdot R \overset{(2)}{=} \frac{-dq}{dt} \cdot R \overset{(3)}{=} \frac{-Cdu}{dt} \cdot R$

$u = \frac{-du}{dt} \cdot RC$



(1) Damit haben wir nun eine **lineare DG erster Ordnung** für die Funktion u(t) erhalten. (Zur Erleichterung ihrer Klassifizierung können wir auch schreiben: $u + \dot{u} \cdot RC = 0$) Ihr Richtungsfeld lässt erahnen, dass ihre Lösung eine Schar exponentiell abklingender Funktionen ist.

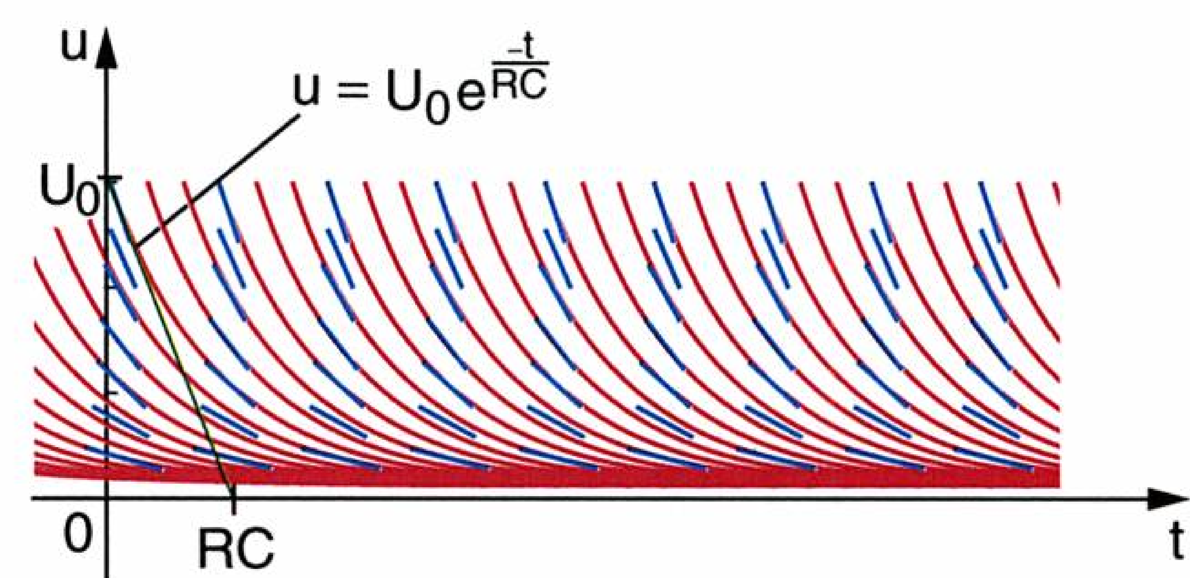
(2) Die DG erfüllt die Voraussetzungen für die Trennung der Variablen u und t:

(3) $\frac{-dt}{RC} = \frac{du}{u}$

Bestimmung der allgemeinen Lösung:

(4) Nach erfolgter Variablentrennung lässt sich die DG beidseitig problemlos integrieren.

(5) Der dabei entstehende gemeinsame Integrationsparameter sollte aber jetzt nicht C genannt werden, da dies bereits die Kapazität des Kondensators bezeichnet.



$\frac{-1}{RC} \cdot t + k = \ln|u|$

$|u| = e^{\frac{-t}{RC}+k}$

$u = e^{\frac{-t}{RC}} \cdot \underbrace{e^k}_{=A}$

$u = Ae^{\frac{-t}{RC}}$

Anfangswertproblem:

Die Anfangsbedingung lautet: Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat u den Wert U_0: $u(0) = U_0$. Damit wird aus dem allgemeinen Integral der DG ein partikuläres ausgesondert:

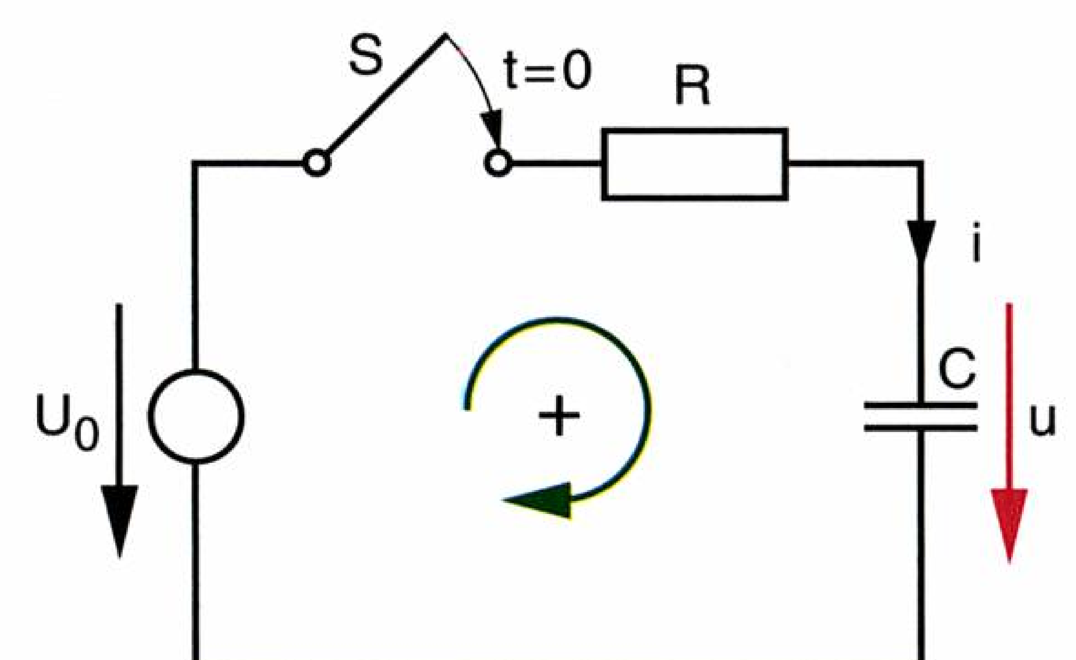
$U_0 = Ae^0$

$A = U_0$

$\mathbf{u = U_0 e^{\frac{-t}{RC}}}$

Theoretisch benötigt unser Kondensator unendlich viel Zeit, um sich zu entladen (vgl. Aufgabe **423. b)**).

Wir wollen jedoch nicht so lange warten, bis die Kondensatorladung verschwunden ist, um herauszufinden, nach welchem Gesetz er sich aus dem ungeladenen Zustand wieder auflädt. Dazu bauen wir die Schaltung ein wenig um und nehmen an, dass der Kondensator am Beginn der Aufladung noch leer ist.



Analoge Überlegungen führen uns dann zu der DG $u + \dot{u}RC = U_0$ (vgl. Aufgabe **424.**). Ihr Lösungsweg verläuft jedoch ein wenig anders, als jener bei der Entladung.

Beispiel:

Die Gleichung $u + \dot{u}RC = U_0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf des Spannungsabfalls u(t) am Kondensator während seiner Aufladung. Diese DG ist zu lösen.

Lösung:

Aufstellen der DG:

Die DG sieht unserer vorigen zum Verwechseln ähnlich. Lediglich auf der rechten Seite steht die Konstante U_0. Aber in dieser Form können wir die DG auf herkömmliche Weise nicht lösen. Eine kurze Überlegung zeigt nämlich, dass bei der DG $u + \dot{u}RC = U_0$ die Methode der Variablentrennung **zunächst** versagt (vgl. Aufgabe **425.**). Aber wir können uns in dieser Situation mit einer einfachen **Substitution** helfen. Dazu formen wir die DG etwas um:

$$u + \dot{u}RC = U_0$$

$$\underbrace{u - U_0}_{z} + \dot{u}RC = 0$$

Den Term $u - U_0$ fassen wir zu einer neuen Variablen z zusammen. Unsere Substitution lautet also: $z = u - U_0$. Damit transformieren wir die Variable u in die Variable z.

Für die Ableitung gilt dann: $\dot{z} = \dot{u}$

Somit lautet unsere neue DG: $z + \dot{z}RC = 0$

Diese neue DG ist nun eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion z(t). Die Variable u kommt nicht mehr vor. Durch diesen kleinen Trick hat unsere DG aber eine uns vertraute Gestalt angenommen. Sie ist nämlich identisch mit der vorigen.

Bestimmung der allgemeinen Lösung:

Die allgemeine Lösung lautet demnach analog: $z = Ae^{\frac{-t}{RC}}$

Durch Rücksubstitution erhalten wir $u = Ae^{\frac{-t}{RC}} + U_0$

Das ist das allgemeine Integral der DG.

Anfangswertproblem:

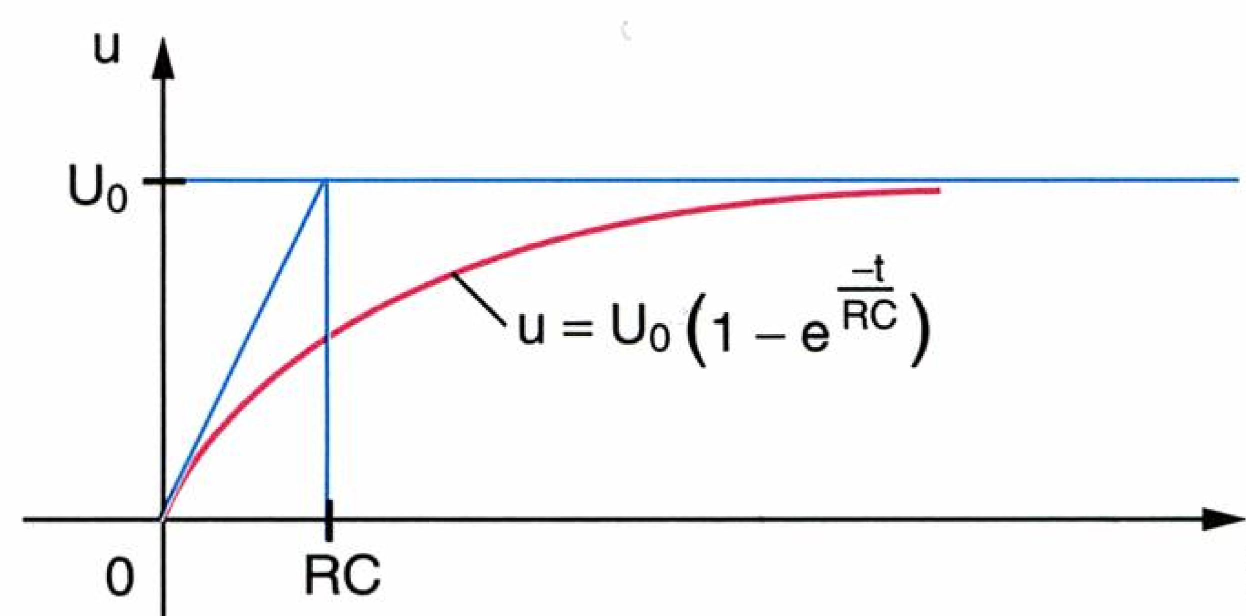
Um nun (wie bei der Entladung) unser gesuchtes partikuläres Integral zu erhalten, verwerten wir die für die Aufladung des Kondensators maßgebliche Anfangsbedingung: Aus der Elektrotechnik wissen wir, dass der Kondensator auf einen Spannungsstoß (in Folge des Schließens des Schalters) wie ein Kurzschluss reagiert. Die an ihm abfallende Spannung u(t) ist daher zum Zeitpunkt $t = 0$ Null: $u(0) = 0$

$$u = Ae^{\frac{-t}{RC}} + U_0$$

$$0 = Ae^0 + U_0$$

$$A = -U_0$$

$$\mathbf{u} = -U_0 e^{\frac{-t}{RC}} + U_0 = \mathbf{U_0}\left(1 - \mathbf{e}^{\frac{-t}{RC}}\right)$$



Wurde jetzt irgendjemand von den Ergebnissen der beiden vorangegangenen Beispiele überrascht? Spätestens das Richtungsfeld hat es bereits angedeutet, dass die zugehörige Kurvenschar aus Exponentialfunktionen bestehen dürfte.

Aber noch etwas anderes hätte uns auf die Idee bringen können, wie das allgemeine Integral der DGen beschaffen sein muss: Die DG war jedesmal von der einfachen Bauart $y' = ky$. D. h. wir suchen eine Funktion $y = f(x)$, deren Ableitung lediglich ein Vielfaches ihrer selbst ist. Funktion und Ableitung sind prinzipiell von der selben Bauart.

– diese besondere Funktionseigenschaft trifft nicht auf Polynomfunktionen, Wurzelfunktionen oder Winkelfunktionen und deren Umkehrungen, noch auf Logarithmen, sondern einzig und allein auf Exponentialfunktionen zu. (vgl. Tabelle auf Seite **87**)

Um also die DG $y' = ky$ zu lösen, hätte auch der einfache Ansatz $y = e^{\lambda x}$ für die Lösung mit anschließendem Koeffizientenvergleich genügt. Diese Funktionseigenschaft ist sehr wichtig. Sie kommt in Natur, Technik und Wirtschaft sehr häufig vor, z. B.:

- Zinseszinsgesetz (vgl. Aufgabe **422.**)
- Schaltvorgängen an Kondensatoren[1)] und Induktivitäten (vgl. Aufgaben **423.** bis **426.**)
- Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe (vgl. Aufgabe **427.**)
- Abkühlungsgesetz (vgl. Aufgabe **428.**)
- Zerfall radioaktiver Isotope (vgl. Aufgabe **429.**)
- Abnahme der Strahlungsintensität mit zunehmender Eindringtiefe (vgl. Aufgabe **430.**)
- Chemische Reaktionen erster Ordnung (vgl. Aufgabe **431.**)
- Bakterienwachstum bei unbegrenzten Ressourcen (vgl. Aufgabe **432.**)

Wir werden die Exponentialfunktion und ihre besondere Eigenschaft bei der Behandlung von Schwingungsvorgängen wieder benötigen!

AUFGABEN

Die Aufgaben **410.** und **411.** sind mittels Variablentrennung zu lösen. Probe!

410. a) $y' + xy^2 = 0$ **b)** $y' = x^2y^2$

411. a) $y' = \frac{x^2}{y}$ **b)** $y'(1+x) + y + 1 = 0$

412. Bei der Trennung der Variablen ist auf beiden Gleichungsseiten zu integrieren. Dabei entstehen zwei Integrationskonstante. Warum dürfen diese zu einer einzigen zusammengefasst werden?

Die Aufgaben **413.** bis **415.** sind mittels Variablentrennung zu lösen. Probe!

413. a) $y' = \frac{e^x}{y}$ **b)** $xy' - 2y' - y + 3 = 0$

414. a) $xy' - \frac{y}{x+1} = 0$ **b)** $y' = \frac{3}{y} + y$

415. a) $3xy' - 2y = 0$ **b)** $y' = \frac{2x^2+7x-4}{y^2-16}$

Bei den Aufgaben **416.** bis **419.** ist anzugeben, warum sich die DGen einer Behandlung mittels Variablentrennung entziehen.

416. a) $y' = x^2 + y^2$ **b)** $e^{y'} = xy$

417. a) $y'' = \frac{y^3}{\sqrt{1+x^2}}$ **b)** $\tan x + \tan y = y' - y' \tan x \tan y$

418. a) $y'' + 4y' + 5y = 0$ **b)** $y = xy' + y'(1 - \ln y')$

419. a) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ **b)** $xy' + y = x^2y^3$

---

1) Ladung und Entladung einer RC-Schaltung:
http://www-es.fernuni-hagen.de/playground/cload.html.de

420. **a)** Es sind die orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar $y = \sqrt{-2x + C}$ anzugeben.

b) Die Richtungsfelder beider Kurvenscharen sind u.a. mit Hilfe geeigneter Isoklinen anzufertigen.

421. Text wie Aufgabe **420.** für die Kurvenschar $y = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$

422. Zinseszinsgesetz
Bei der Verzinseszinsung eines Kapitals K sind die kurzfristigen Zinsen pro Zeitintervall dn dem Kapital K proportional.

a) Stelle den Zusammenhang zwischen dem Zuwachs dK und Kapital K mathematisch dar.

b) Es ist das allgemeine Integral der DG zu bilden.

c) Unter der Voraussetzung, dass das Startkapital K_0 beträgt, ist das zugehörige partikuläre Integral zu bestimmen.

d) Das Kapital wird zu einem Prozentsatz p % verzinst. Es gilt dann die bekannte

Zinseszinsformel: $K = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$

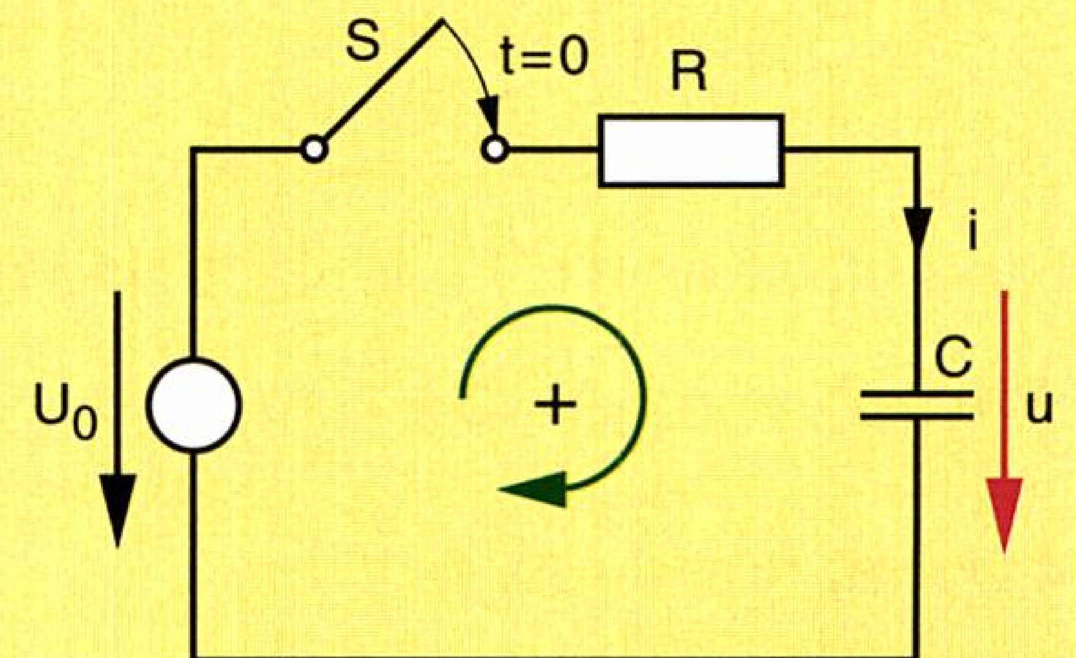
Es ist zu zeigen, dass diese Formel und die in **c)** gefundene Funktion äquivalent sind.

423. Entladung eines Kondensators

a) Die DG $\dot{u} = -u \cdot \frac{1}{RC}$ ist mittels Ansatz $u = Ae^{\lambda t}$ und anschließendem Koeffizientenvergleich zu lösen.

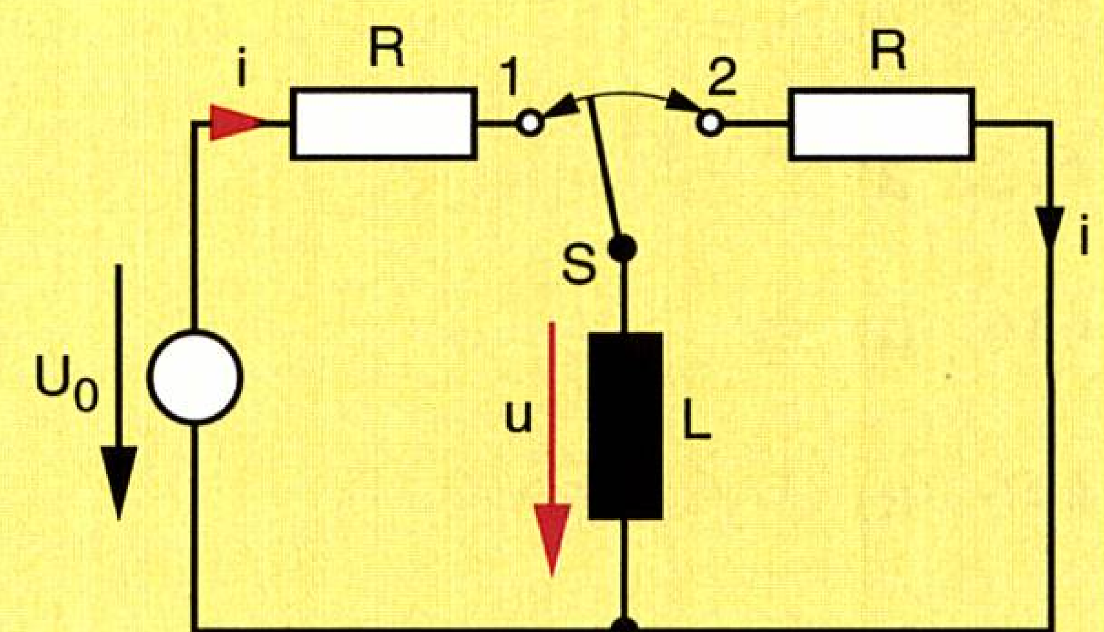
b) Es ist zu zeigen, dass der Kondensator sich nach genügend langer Zeit vollständig entlädt.

424. Aufladung eines Kondensators
Ein ungeladener Kondensator der Kapazität C ist mit einem Widerstand R in Reihe an eine Gleichspannungsquelle U_0 angeschlossen. Zum Zeitpunkt t = 0 wird der Schalter S geschlossen und der Kondensator beginnt sich über R aufzuladen. Welche DG beschreibt den Vorgang des zeitlichen Spannungsverlaufs u(t) am Kondensator?



425. Warum lässt sich die DG $u + \dot{u}RC = U_0$ (Aufladung eines Kondensators) ausschließlich mit Hilfe der Variablentrennung **nicht** lösen?

426. Schaltvorgänge an Induktivitäten
Eine Spule der Induktivität L wird über den Widerstand R an eine Gleichspannungsquelle U_0 angeschlossen.



a) Welchem zeitlichen Gesetz folgt der Gesamtstrom i(t), nachdem der Schalter S auf die Position 1 gestellt wird?.

Anleitung: Es gilt die Maschenregel.

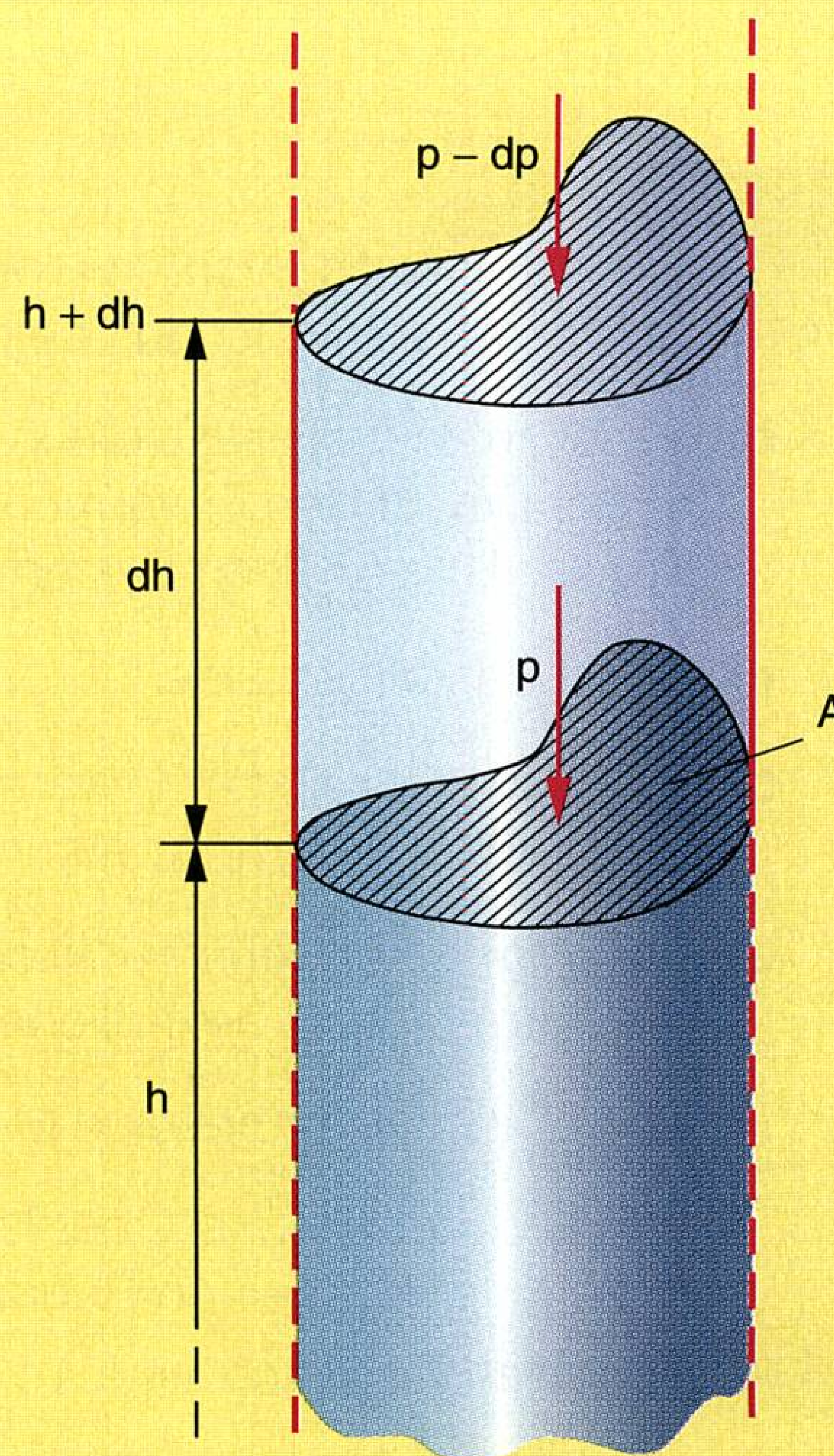
b) Wie hoch ist die Stromstärke, wenn (theoretisch) unendlich viel Zeit vergangen ist?

c) Nach Verstreichen beliebig langer Zeit wird der Schalter S auf die Position 2 gestellt. Welchen Verlauf nimmt daraufhin der Strom i(t)?

d) Welchen Wert nimmt der Strom nach beliebiger Zeit an?

427. **Barometrische Höhenformel**

Aus dem Physik-Unterricht ist bekannt, dass der Luftdruck von der Höhe über der Erdbodenoberfläche abhängt. Mittlerweile sind wir in der Lage, den gesetzmäßigen Zusammenhang mathematisch zu begründen. Dazu betrachten wir eine zylindrische Luftsäule mit der Querschnittsfläche A (ihre Geometrie ist dabei egal).



a) Wie groß ist das Volumen dV eines differenziellen Säulenabschnitts der Höhe dh?

b) Wie groß ist das Differenzial dm der Masse, wenn die Dichte der Luftsäule mit ρ bezeichnet wird?

c) Wie groß ist das Differenzial dG der Gewichtskraft der Luftsäule?

d) Welchen Druck dp übt somit die Luftsäule auf die unter ihr liegende Luftschicht aus?

e) Das BOYLE-MARIOTTEsche Gesetz, wonach die Dichte ρ in einem Gas proportional zum darin herrschenden Druck p steht, ist in die Formelsprache zu übertragen.

f) Der in **d)** gefundene Ausdruck für dp ist unter Zuhilfenahme des BOYLE-MARIOTTEschen Gesetzes (vgl. Aufgabe **e)**) zu einer DG für die Variable p umzuformen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Druck, der auf die Luftschicht der Höhe h + dh wirkt, um dp **kleiner** ist als der Druck, der auf die Luftschicht der Höhe h wirkt!

Handelt es sich dabei um eine homogene oder inhomogene DG (vgl. Seite **170**)?

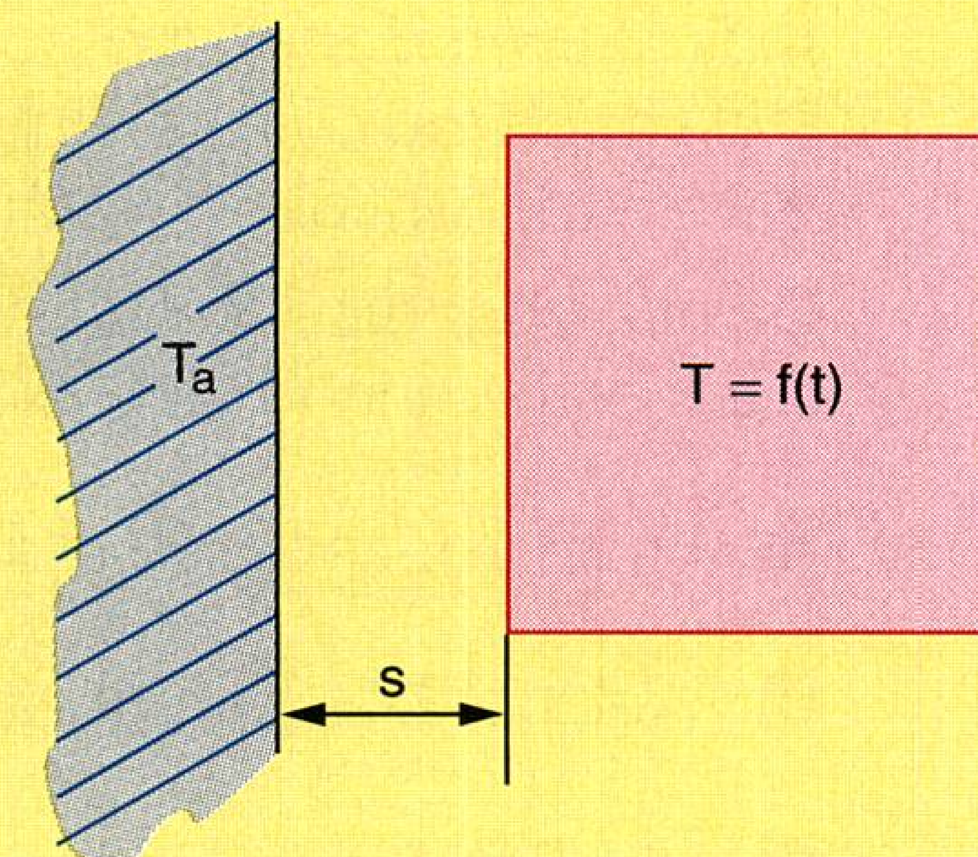
g) Bestimmen Sie das allgemeine Integral der DG.

h) Es ist anhand des allgemeinen Integrals das Wissen zu verwerten, dass der Luftdruck an der Erdbodenoberfläche (h = 0) p_0 beträgt.

428. **Erwärmungs- und Abkühlungsgesetz**

a) Ein Körper der Masse m und der Temperatur T_0 wird einer Umgebung mit der niedrigeren Temperatur T_a ausgesetzt. Dabei wird sich der Körper nach einem bestimmten Gesetz T = f(t) erwärmen. Wir wollen annehmen, dass die Umgebungstemperatur dabei konstant bleibt.

Pro Zeitintervall dt wird das wärmere Medium jeweils ein Wärme-„Paket" dQ zum Körper transportieren. Die Größe dieses Wärme-Pakets ist durch die sogenannte **Wärmeleitgleichung** bestimmt:



$$dQ = \lambda A \cdot \frac{T_a - T}{s}\, dt$$

λ … **Wärmeleitfähigkeit**: Dieser Proportionalitätsfaktor gibt an, welche Wärmemenge pro Sekunde durch 1 m² Körperoberfläche bei einem Temperaturgefälle von 1 K/m befördert wird $\left([\lambda] = 1\frac{W}{Km}\right)$.

A … Durchströmte Körperoberfläche

s … Abstand zwischen Körper und Medium

428. a) (Fortsetzung)

In welcher Weise nun das vom Körper übernommene Wärme-„Paket“ dQ in eine Temperaturänderung umgesetzt wird, ist eine Angelegenheit seiner **Wärmekapazität:**

$dQ = cmdT$ c … **Spezifische Wärmekapazität** des Körpers $\left([c] = 1\frac{J}{kgK}\right)$.

Da wir jedoch nicht an der Wärmemenge Q, sondern am funktionalen Zusammenhang $T = f(t)$ interessiert sind, ist aus beiden Gleichungen dQ zu eliminieren und die zugehörige DG aufzustellen.

b) Es ist zu zeigen, dass die in **a)** ermittelte DG prinzipiell von der Bauart $\dot{x} = kx$ ist. Welche Größen sind in der DG für den Erwärmungsprozess zueinander proportional? Es ist weiters anzugeben, in welcher Weise die einzelnen Systemkonstanten im Proportionalitätsfaktor k aufscheinen.

c) Es ist das allgemeine Integral der in **a)** ermittelten DG zu bestimmen.

d) Zu Beginn ($t = 0$) der Erwärmung beträgt die Temperatur des Körpers $T(0) = T_0$. Es ist das zugehörige partikuläre Integral zu ermitteln.

e) Die in **d)** gefundene Funktionsgleichung ist für den Fall einer Temperaturmessung anzuwenden: Das im Thermometer befindliche Quecksilber ist nun jener Körper, dessen Temperaturverlauf gesucht ist.

Das Quecksilber hat eine Masse von 7g und eine spezifische Wärmekapazität von $c_{Hg} = 120\frac{J}{kgK}$. Die wärmedurchströmte Oberfläche beträgt 2 cm². Das Thermometer, das zu Beginn der Messung 0°C anzeigt, wird in einen Raum mit einer Lufttemperatur von 22°C gebracht. Luft und Quecksilber sind voneinander durch eine 1mm dünne Glasröhre getrennt, dessen Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{Glas} = 0{,}8\frac{W}{Km}$ beträgt.

f) Nach welcher Zeit beträgt der Anzeigefehler nur mehr 0,1°C?

g) Wie ändert sich die DG, wenn sie statt einer Erwärmung den Vorgang einer Abkühlung beschreiben soll?

h) Wie lautet das partikuläre Integral für die Abkühlung ($T(0) = T_0 > T > T_a$)?

429. Zerfall radioaktiver Isotope[1)]

Im Unterschied zur Kernreaktion, die stets absichtlich herbeigeführt wird, versteht man unter einem **radioaktiven Zerfall** die spontane Umwandlung von Atomkernen. Bei dieser Elementumwandlung wird stets auch radioaktive Strahlung freigesetzt. Jedoch ist die Aktivität nicht zeitlich konstant, sondern nimmt etwa exponentiell ab nach dem Gesetz: $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Da nun aber die Aktivität A eine Begleiterscheinung der Kernumwandlung ist, wollen wir annehmen, dass die momentane Anzahl N(t) vorhandener (und noch nicht zerfallener) Atomkerne proportional zu A(t) ist.

a) Es ist der zeitliche Verlauf des Zerfalls als Funktion $N = f(t)$ (Zerfallsgesetz) darzustellen.

b) Welcher DG genügt N(t)?

c) Die in **b)** gefundene DG ist in Worte zu fassen.

d) Welche mathematische Bedeutung hat die Systemkonstante λ?

e) Wie hängt λ mit der Halbwertszeit τ zusammen?

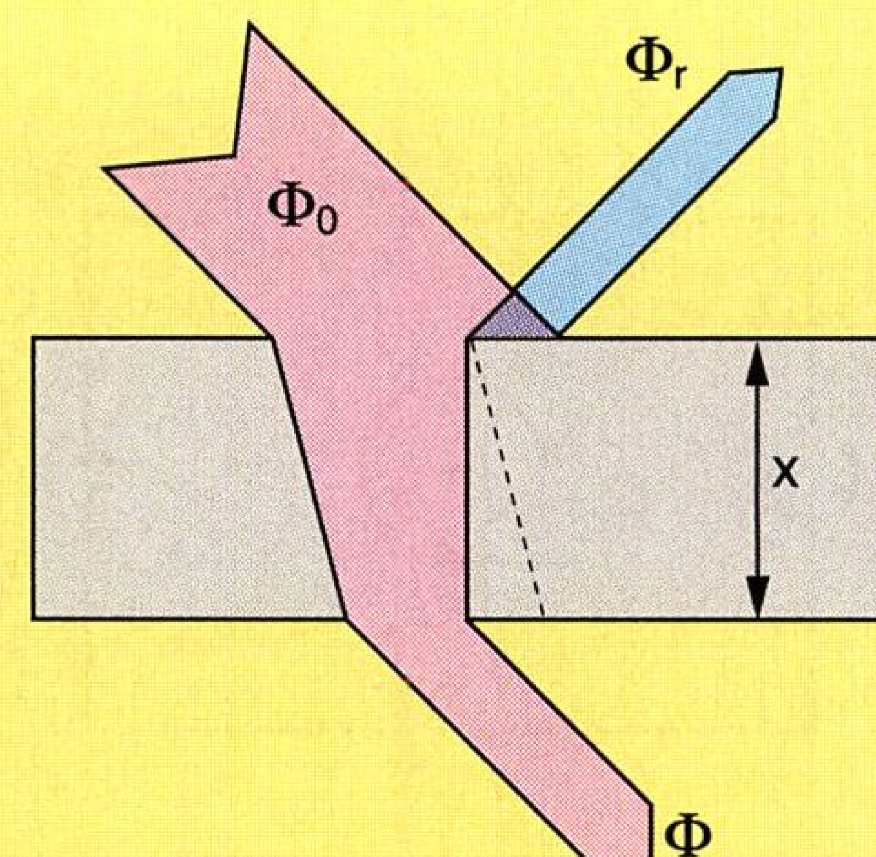
f) Radium hat eine Halbwertszeit von 1620 Jahren. Wie lautet das zugehörige Zerfallsgesetz?

---

1) Radioaktiver Zerfall:
http://www.walter.fendt.de/ph11d/zerfallsgesetz.htm

430. **Strahlungsabsorption**

Tritt monochromatisches Licht mit dem anfänglichen Strahlungsfluss Φ_0 in eine Schicht eines absorbierenden Mediums (fest, flüssig oder gasförmig), so ist der relative Verlust $\frac{d\Phi}{\Phi}$ proportional zur Schichtdicke dx (bei kleinem dx).



a) Wie lautet die zugehörige DG?

b) Bestimmen Sie das allgemeine Integral dieser DG.

c) Das LAMBERT-BEERsche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen der Schichtdicke x des absorbierenden Mediums und dem austretenden Strahlungsfluss Φ dar. Dieses Gesetz ist herzuleiten.

431. **Chemische Reaktion erster Ordnung**

Die **Kinetik** untersucht den Zeitverlauf chemischer Reaktionen. Bei einer chemischen Reaktion erster Ordnung steht nur eine einzige Ausgangssubstanz X zur Verfügung. Es ist nun zu untersuchen, welchen zeitlichen Verlauf ihre Masse x(t) nimmt, sobald sie in die chemische Reaktion eintritt. Wir nehmen an, dass die Stoffmenge dx, die während des Zeitintervalls der Länge dt in die Reaktion eintritt, proportional zur Stoffmenge x(t) ist, die noch nicht reagiert hat. Dies gilt jedoch nur für kleine Zeitintervalle dt.

a) Es ist die DG für den Massenverlauf x(t) aufzustellen. Handelt es sich dabei um eine homogene oder inhomogene DG?

b) Es ist das allgemeine Integral der DG für x(t) zu bestimmen.

c) Es ist die Tatsache zu verwerten, dass von der Substanz X zu Beginn der Reaktion die Menge a vorhanden ist.

d) Durch die chemische Reaktion entsteht die Substanz Y. Es ist die DG des zeitlichen Verlaufs ihrer Stoffmenge y(t) aufzustellen. Handelt es sich dabei um eine homogene oder inhomogene DG?

e) Es ist das allgemeine Integral der DG für y(t) zu bestimmen.

f) Wie lautet das zugehörige partikuläre Integral?

432. **Bakterienwachstum**

Das Wachstum einer isolierten Bakterienkultur kann mit Hilfe einer Funktion $x = f(t)$ beschrieben werden. Dabei stellt x die augenblickliche Populationsdichte zum Zeitpunkt t dar. Wir nehmen an, dass den Bakterien nahezu unbegrenzt Nahrung und Platz zur Ausbreitung zur Verfügung steht. Unter dieser Annahme ist dann die momentane Zunahme an Bakterien proportional zur aktuellen Populationsdichte und dem Zeitintervall dt (für kleine dt).

a) Es ist die DG für den Wachstumsprozess aufzustellen, wenn die Wachstumsrate r konstant ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DG.

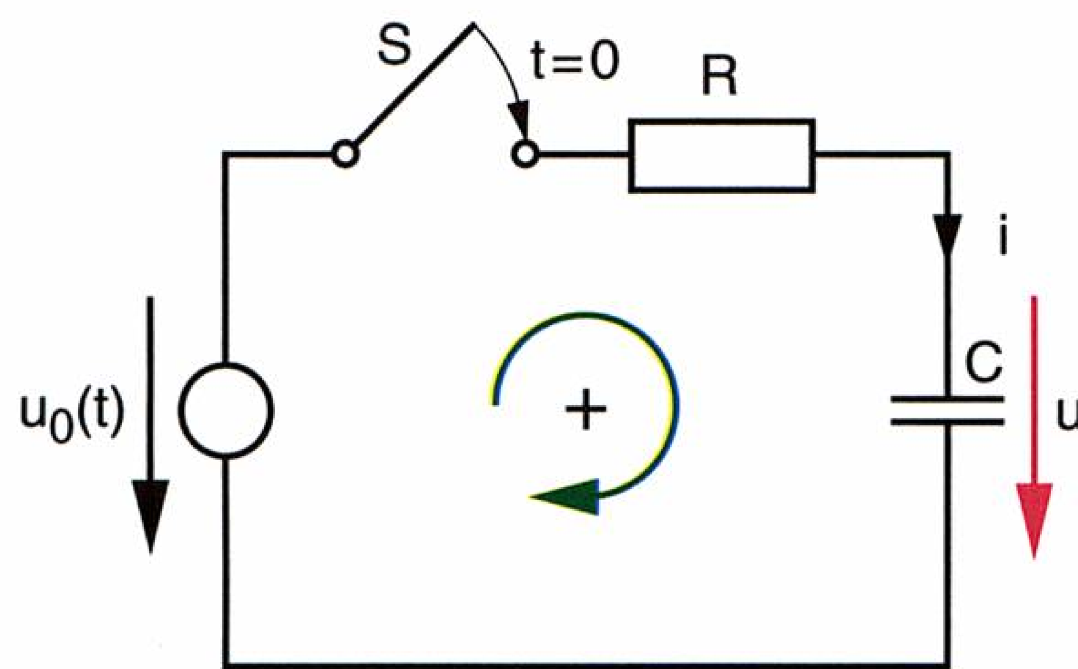
c) Unter der Voraussetzung, dass die Vermehrung zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Populationsdichte x_0 startet, ist ein dazu passendes partikuläres Integral aufzustellen.

d) Es ist der Zusammenhang zwischen der Wachstumsrate r und der Verdopplungszeit τ zu bestimmen.

Anmerkung: Unter der Verdopplungszeit versteht man jenes Zeitintervall, in dem sich eine anfängliche Anzahl verdoppelt.

4.2 Das Superpositionsgesetz[1)]

Was passiert nun, wenn wir an unser RC-Glied eine linear anwachsende Quellspannung $u_0(t)$ anlegen?



Nach welchem Gesetz verläuft dann die Spannung u am Kondensator?

In Analogie zu vorhin erhält die zugehörige DG dann die Gestalt: $u + \dot{u}RC = U_0 \frac{t}{T}$. Vergleichen wir einmal unsere beiden DGen:

Die neue DG $u + \dot{u}RC = U_0 \frac{t}{T}$ unterscheidet sich kaum von der ursprünglichen DG $u + \dot{u}RC = 0$ (für die Kondensator-Entladung). Lediglich auf der rechten Seite steht die lineare Funktion $s(t) = U_0 \frac{t}{T}$. Aber die ist entscheidend, denn sie verhindert, dass wir die DG auf herkömmliche Weise lösen können: Eine kurze Überlegung zeigt nämlich, dass bei der DG $u + \dot{u}RC = U_0 \frac{t}{T}$ die Methode der Variablentrennung versagt (vgl. Aufgabe **433.**). Auch eine Substitution oder ein einfacher Ansatz für die Lösung ist nicht in Sicht.

In dieser Notsituation benötigen wir ein wichtiges Hilfsmittel: **das Superpositionsgesetz für lineare DGen n-ter Ordnung**. Dazu müssen wir aber zuvor ein paar Begriffe vereinbaren.

Da ist einmal die uns längst bekannte **lineare DG n-ter Ordnung,** die wir nun in ihrer Allgemeinheit darstellen wollen:

$$f_0(x)y + f_1(x)y' + f_2(x)y'' + \cdots + f_n(x)y^{(n)} = 0$$

Beispiel für eine homogene lineare DG:

$5\sin x \cdot y'' + 3\cos x \cdot y' - 7y = 0$

Im Allgemeinen dürfen ihre Koeffizienten $f_i(x)$ selbst Funktionen von x sein. Diese Tatsache ändert nichts an der Linearität der DG. Sind die Funtionen $f_i(x)$ konstant, so spricht man von einer **DG mit konstanten Koeffizienten**.

Da ihre rechte Gleichungsseite Null ist, nennt man die DG auch **homogen**.

Von einer **inhomogenen linearen DG n-ter Ordnung** spricht man hingegen, wenn die Gleichung von der Bauart

$$f_0(x)y + f_1(x)y' + f_2(x)y'' + \cdots + f_n(x)y^{(n)} = s(x)$$

Beispiel für eine inhomogene lineare DG:

$5\sin x \cdot y'' + 3\cos x \cdot y' - 7y = \tan x$

ist. Es besteht also kaum ein Unterschied bis auf die rechte Gleichungsseite, auf der nun eine Funktion s(x) in der unabhängigen Variablen x steht. Diese Funktion s(x) wird als **Störfunktion** bezeichnet. (Die Bezeichnung „Störfunktion" oder auch „Störglied" für s(x) rührt nicht etwa daher, dass wir bei der Lösung der DG durch s(x) „gestört" werden, sondern dass das System, das durch die DG beschrieben wird, nun durch eine Fremdeinwirkung in seiner Eigendynamik **gestört** wird.)

Beispiel:

Die **inhomogene** lineare **DG**:

$18\dddot{x} - 11\ddot{x} + 8\dot{x} - x = e^t$ nennt man **vollständig**.

Die **Störfunktion** lautet $s(t) = e^t$.

Die **verkürzte DG** lautet dann:

$18\dddot{x} - 11\ddot{x} + 8\dot{x} - x = 0$

Wenn man der inhomogenen DG die Störfunktion wegnimmt, so erhält man die ihr zugeordnete homogene DG.

Um dieses Verhältnis beider DGen deutlich zu machen, spricht man auch von **verkürzter** und **vollständiger DG**. (Die **verkürzte** DG erhält man, indem man die inhomogene DG um die Störfunktion **verkürzt**, die **vollständige** DG entsteht, indem man die homogene DG um die Störfunktion **vervollständigt**.)

1) Superposition: [lat.] Überlagerung; superponieren: über[einander]lagern. (Duden)

Nun haben beide DGen je ein allgemeines Integral.

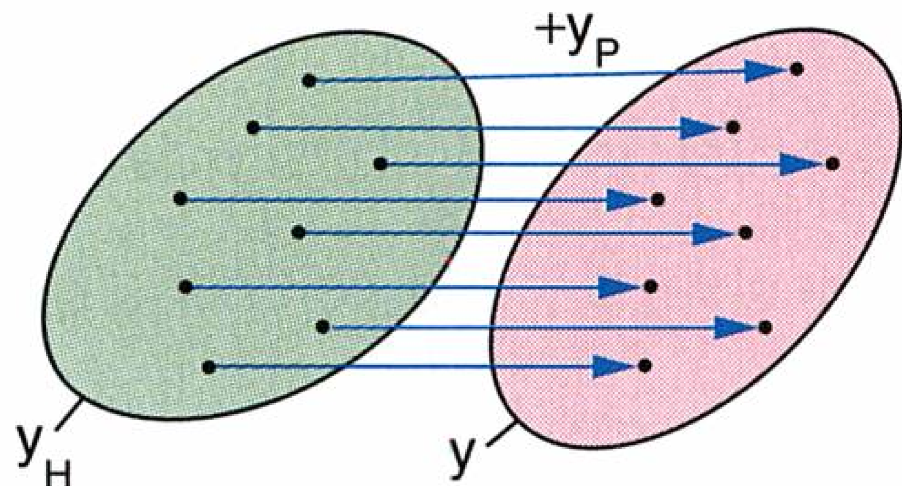
Wir bezeichnen das allgemeine Integral der vollständigen DG mit y, und das der verkürzten (homogenen) DG mit y_H. Ein (beliebiges) partikuläres Integral der vollständigen DG bezeichenen wir mit y_P.

Mit diesen Vorbereitungen können wir das für uns wichtige **Superpositionsgesetz** für lineare DGen formulieren. Dieses besagt, dass die Lösungsmengen beider DGen (also die allgemeinen Integrale der vollständigen und verkürzten DG) in einer besonderen Beziehung zueinander stehen (vgl. Außenspalte).

Superpositionsgesetz für lineare DGen:

Um das allgemeine Integral y der **vollständigen** DG zu erhalten, genügt es, zum allgemeinen Integral y_H der **verkürzten** DG **ein partikuläres** Integral y_P der **vollständigen** DG zu addieren: $y = y_H + y_P$

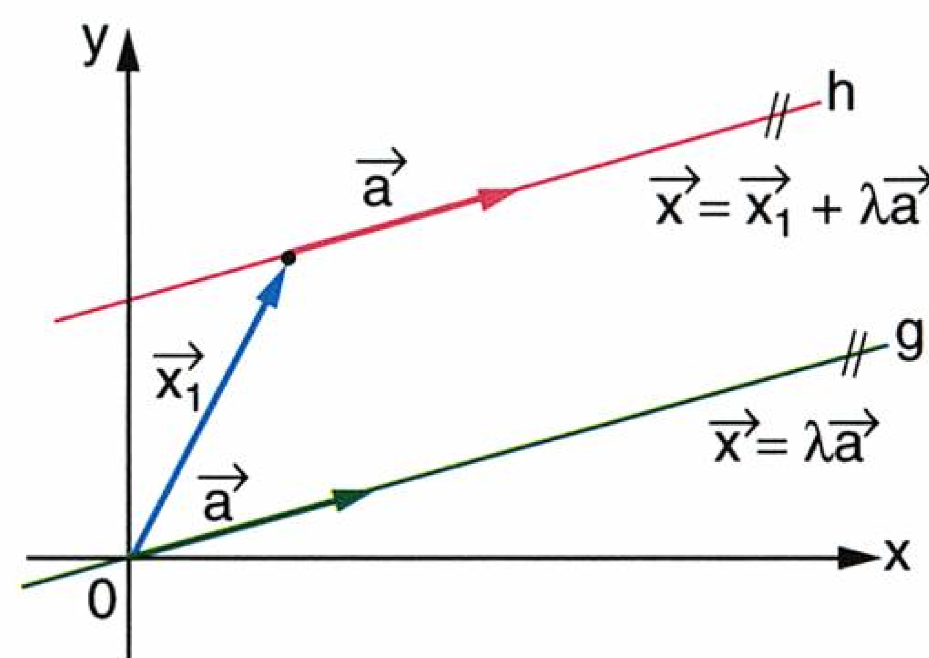
Das Gesetz riecht ein wenig nach Willkür, denn immerhin erlaubt es uns, um die allgemeine Lösung einer DG zu erhalten, **irgendein beliebiges partikuläres Integral** zu verwenden.



Nun ist dies aber nicht so willkürlich wie es scheint. Wir haben solche Verhältnisse, wo ebenfalls Linearität im Spiel war, bereits einmal kennengelernt: bei der Vektordarstellung von Geraden.

Die folgende Überlegung ist **kein mathematischer Beweis**, sondern soll nur der Verständlichkeit halber angeführt werden (vgl. Aufgabe **435.**):

Um eine Gerade g in der xy-Ebene darzustellen, die durch den Koordinatenursprung geht, war lediglich ein Richtungsvektor $\vec{a}$ nötig. Dieser wurde mit einem Faktor λ versehen. Wenn dieser Faktor (das ist ein freier Parameter) verschiedene Werte annimmt, so werden damit sukzessive alle Punkte $\vec{x}$ der Geraden g durchlaufen: $\vec{x} = \lambda\vec{a}$. Diese Gerade g entspricht dem y_H, jeder Punkt auf g entspricht einer partikulären Lösung. Betrachten wir nun eine zu g parallele Gerade h. Dann können wir eine Vektordarstellung von h einfach dadurch erhalten, indem wir zur Vektordarstellung von g **irgendeinen beliebigen Ortsvektor** $\vec{x}_1$ von h addieren: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{a}$. Auf die Wahl des Ortsvektors $\vec{x}_1$ kommt es dabei überhaupt nicht an! Dieser Geraden h entspricht nun y, der Ortsvektor $\vec{x}_1$ entspricht dem y_P. Auf Grund der Linearität herrschen hier analoge Gesetzmäßigkeiten!



Vektordarstellung paralleler Geraden (Wiederholung):

$\vec{x} = \lambda\vec{a}$ ..... g

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{a}$ ..... h$\|$g

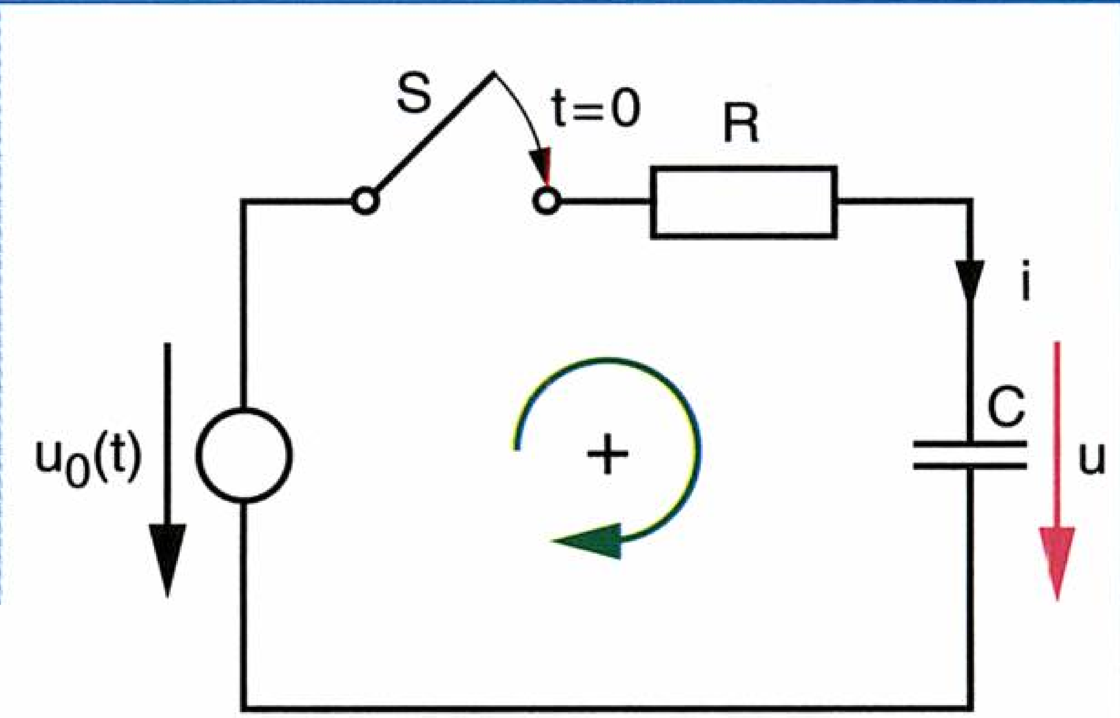
Mit dieser Vorbereitung können wir nun endlich die DG für das RC-Glied lösen.

Superpositionsgesetz für lineare DGen:

y_H	.....	allgemeines Integral der homogenen DG
y_P	.....	partikuläres Integral der inhomogenen DG
$y = y_H + y_P$	.....	allgemeines Integral der inhomogenen DG

Beispiel:

Statt der Gleichspannungsquelle U_0 wird nun an dem RC-Glied (Kondensator zu Beginn ungeladen) eine linear anwachsende Spannung $u_0(t) = U_0 \cdot \frac{t}{T}$ angelegt. Wie lautet die Funktion für den Spannungsverlauf u(t) am Kondensator?



Lösung:

Auf Grund analoger elektrotechnischer Überlegungen wie in den vorangegangenen Situationen nimmt nun die zugehörige DG die Gestalt $u + \dot{u}RC = U_0\frac{t}{T}$ an. Nach dem Superpositionsgesetz lautet das allgemeine Integral: $u = u_H + u_P$.

Allgemeines Integral u_H der verkürzten DG $u+\dot{u}RC=0$:

$$u_H = Ae^{\frac{-t}{RC}}$$

Partikuläres Integral u_P der vollständigen DG $u+\dot{u}RC=U_0\frac{t}{T}$:

Um nun ein partikuläres Integral u_P der vollständigen DG zu erhalten, überlegen wir: Welche (möglichst einfache) Funktion $u_P(t)$ erfüllt die DG $u+\dot{u}RC=U_0\frac{t}{T}$? Gute Chancen haben wir, wenn wir u als unbestimmte **lineare Funktion** ansetzen, also die Funktion u der Bauart der Störfunktion $s(t)=U_0\frac{t}{T}$ angleichen:
$u_P=at+b$

Die Ableitung $\dot{u}_p$ liefert dann nur mehr einen Beitrag mit niedrigerem Grad: $\dot{u}_P=a$

Beides wird in die vollständige DG eingesetzt:

$$u_P+\dot{u}_PRC=U_0\frac{t}{T}$$

$$at+b+aRC=U_0\frac{t}{T}$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich aber nicht um eine Bestimmungsgleichung für ein konkretes t, sondern um eine sogenannte Identitätsgleichung für alle t! Daher sollten wir besser schreiben:

$$at+b+aRC\equiv U_0\frac{t}{T}.$$

Damit diese Identität auch tatsächlich erfüllt wird, müssen die Koeffizienten der Potenzen t^0 und t^1 miteinander verglichen werden:

$$at\equiv U_0\frac{t}{T} \qquad b+aRC=0$$

$$a=\frac{U_0}{T} \qquad b=\frac{-U_0RC}{T}$$

$$\Rightarrow u_P=at+b=\frac{U_0}{T}\cdot t-\frac{U_0RC}{T}=U_0\cdot\frac{t-RC}{T}$$

Damit haben wir ein partikuläres Integral der vollständigen DG gefunden. Das allgemeine Integral lautet auf Grund des Superpositionsgesetzes:

$$u=u_H+u_P=Ae^{\frac{-t}{RC}}+U_0\cdot\frac{t-RC}{T}$$

Anfangswertproblem:

$u(0)=0$

$$0=A-U_0\cdot\frac{RC}{T}$$

$$A=U_0\cdot\frac{RC}{T}$$

$$u=U_0\cdot\frac{RC}{T}e^{\frac{-t}{RC}}+U_0\cdot\frac{t-RC}{T}=\frac{U_0}{T}\left[t+RC\left(e^{\frac{-t}{RC}}-1\right)\right]$$

Ansatzregel:
Wenn die Störfunktion s(x) einer linearen DG mit **konstanten Koeffizienten** ein Polynom vom Grad p ist, dann gibt es auch ein partikuläres Integral, das ein Polynom vom Grad p ist (Beweis vgl. Aufgabe **436**.).

Das vorige Beispiel hat gezeigt, wie man auf sehr einfache Weise ein partikuläres Integral der vollständigen DG erhalten kann, wenn die Störfunktion von einfacher Bauart ist.

Wir können diesen Trick sogar auf Störfunktionen erweitern, die Polynome sind. In diesem Fall genügt es, für die gesuchte Lösungsfunktion y_P ebenfalls ein gleichgradiges Polynom anzusetzen und mit Hilfe der ursprünglichen DG einen Koeffizientenvergleich durchzuführen. Das folgende nicht-technische Beispiel soll diese Methode demonstrieren!

Beispiel:
Es ist das allgemeine Integral der DG $y - y' = x^3 - 3x^2 + x - 2$ zu finden.

Lösung:

Allgemeines Integral y_H der verkürzten DG $y - y' = 0$:
Entweder findet man die Lösung y_H mittels eines geeigneten Ansatzes oder mit Hilfe der Variablentrennung und anschließender Integration. Beide Methoden liefern: $y_H = Ae^x$

Partikuläres Integral y_P der vollständigen DG $y' - y = x^3 - 3x^2 + x - 2$:
Die Störfunktion $s(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$ ist vom Grad 3. Wir setzen daher ebenfalls ein allgemeines Polynom dritten Grads für die partikuläre Lösung y_P an:

$y_P = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y_P' = 3ax^2 + 2bx + c$

Sowohl y_P als auch y_P' setzen wir in die vollständige DG ein

$$y_P - y_P' = x^3 - 3x^2 + x - 2$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - (3ax^2 + 2bx + c) = x^3 - 3x^2 + x - 2$$

$$ax^3 + x^2(b - 3a) + x(c - 2b) + (d - c) = x^3 - 3x^2 + x - 2$$

Koeffizientenvergleich der Potenzen x^3, x^2, x^1 und x^0:

$ax^3 \equiv x^3$	$x^2(b - 3a) \equiv -3x^2$	$x(c - 2b) \equiv x$	$d - c = -2$	
$a = 1$	$b - 3a = -3$	$c - 2b = 1$	$d = -1$	$\Rightarrow$ $y_P = x^3 + x - 1$
	$b = 0$	$c = 1$		

Allgemeines Integral y der vollständigen DG: $y = y_H + y_P = Ae^x + x^3 + x - 1$

Achtung: Das partikuläre Integral y_P einer vollständigen DG, das wir für die Anwendung des Superpositionsgesetzes benötigen, kann beliebig gewählt werden. Dieses Integral y_P ist aber wohl zu unterscheiden von jenem partikulären Integral der vollständigen DG, das wir durch Lösen eines allfälligen Anfangswert- oder Randwertproblems erhalten!

AUFGABEN

433. Es sind die Probleme aufzuzeigen, die sich beim Versuch ergeben, die DG $u + \dot{u}RC = U_0 \frac{t}{T}$ mit Hilfe der Variablentrennung zu lösen.

434. Es ist das allgemeine Integral der DG $y' - y = x$ zu finden.

435. Das Superpositionsgesetz gilt für lineare DGen beliebiger Ordnung: Sei y_H das allgemeine Integral der linearen homogenen DG $\sum_{i=0}^{n} f_i(x)y^{(i)} = 0$ und y_P ein beliebiges partikuläres Integral der linearen inhomogenen DG $\sum_{i=0}^{n} f_i(x)y^{(i)} = s(x)$. Es ist zu zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen $y = y_H + y_P$ das allgemeine Integral der inhomogenen DG ist.

436. Es ist zu beweisen: Wenn die Störfunktion $s(x)$ einer linearen DG $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = s(x)$ **mit konstanten Koeffizienten** ein Polynom vom Grad p ist, dann gibt es auch ein partikuläres Integral, das ein Polynom vom Grad p ist.

4.3 Variation der Konstanten

Wie gelangen wir aber zu einem partikulären Integral der vollständigen DG, wenn die Störfunktion s(x) komplizierter als ein Polynom gebaut ist?

Hat die DG nämlich **variable Koeffizienten**, dann muss man schon einen genialen Einfall haben, um ein partikuläres Integral zu finden, wie im folgenden Beispiel.

Beispiel:

Es ist ein partikuläres Integral der inhomogenen DG $xy' + y = x^2$ zu finden.

Lösung:

Mathematisch geschulte Augen „sehen", dass $y = \frac{x^2}{3}$ eine einfach gebaute partikuläre Lösung der DG darstellt.

Probe:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{3} \\ y' &= \frac{2x}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} T_L &= x \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3} = x^2 \\ T_R &= x^2 \end{aligned}$$

Was aber, wenn man die Lösung nicht „sieht"? Für solche Situationen gibt es eine einfache Methode: die sogenannte **Variation der Konstanten** von Joseph Louis DE LAGRANGE.

Variation der Konstanten (für lineare DG 1. Ordnung):

1. y_H der verkürzten DG $y' + y \cdot p(x) = 0$ bestimmen. Freier Parameter C.
2. C in y_H durch Funktion C(x) ersetzen. Ergibt Ansatz für y_P.
3. Ansatz für y_P in vollständige DG $y' + y \cdot p(x) = q(x)$ einsetzen. Das ergibt eine DG für C(x).
4. DG für C(x) lösen
5. Lösung C(x) in y_P einsetzen

Die Idee ist ganz einfach:

Unser eigentliches Ziel ist es, ein partikuläres Integral y_P der inhomogenen (vollständigen) DG $y' + y \cdot p(x) = q(x)$ zu finden.

(Die Funktionen p(x) und q(x) sind die variablen Koeffizienten.)

Dazu ziehen wir das allgemeine Integral y_H der verkürzten DG $y' + y \cdot p(x) = 0$ heran.

Ist die DG von **erster Ordnung**, so besitzt y_H genau **einen freien Parameter** – sagen wir C (eine DG **n-ter Ordnung** hätte dementsprechend ein y_H mit **n freien Parametern**).

Wir ersetzen in y_H den Parameter C durch eine zunächst noch unbestimmte Funktion C(x).

Wir lassen also die Konstante C variieren (daher stammt der Name dieser Methode). Damit haben wir einen Ansatz für ein partikuläres Integral y_P der inhomogenen DG.

Wir müssen nun diesen Ansatz für y_P (mit der Funktion C(x) „darinnen") in die vollständige DG einsetzen. Dadurch erhalten wir eine DG für die Funktion C(x). Wir lösen sie und vervollständigen unseren Ansatz für y_P. Ein partikuläres Integral der inhomogenen DG ist gefunden.

Mit dieser Methode können wir das vorige Beispiel elegant lösen. Ein genialer Einfall ist jetzt nicht mehr nötig, den hatte schon LAGRANGE vor uns.

Beispiel:
Es ist ein partikuläres Integral der inhomogenen DG $xy' + y = x^2$ durch Variation der Konstanten zu finden.

Lösung:

(1) Allgemeines Integral y_H der verkürzten DG $xy' + y = 0$ bestimmen:
Diese lineare DG ist von erster Ordnung. Wir dürfen daher die Methode „Trennung der Variablen" anwenden:

$$xy' + y = 0$$
$$x \cdot \frac{dy}{dx} = -y$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x}$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \quad \Big| \int$$
$$y_H = \frac{C}{x}$$

(2) Um ein y_P zu finden, variieren wir die Konstante C in y_H, d. h. wir wandeln C in eine Funktion C(x) um:

$$y_P = \frac{C(x)}{x}$$

Das ist aber erst der Ansatz für y_P, denn die Funktion C(x) ist zunächst noch unbestimmt.

(3) Unser nächstes Ziel ist es, die Funktion C(x) zu bestimmen. Dazu setzen wir y_P und seine Ableitung y_P' in die vollständige DG ein:

$$xy_P' + y_P = x^2$$
$$x\left(\frac{C'x - C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} = x^2$$
$$C' = x^2$$

(4) Diese DG lösen wir durch unbestimmte Integration:

$$C = \int C'dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + (k)$$

Wir haben im Ergebnis dieser unbestimmten Integration die sonst erforderliche Integrationskonstante k in Klammern hinzu gesetzt, da wir sie eigentlich auch weglassen dürfen. Ihre (formal korrekte) Mitnahme würde aber weder am partikulären Integral y_P noch am allgemeinen Integral y der DG irgend etwas ändern (vgl. Aufgabe **441.**).

(5) Mit der nun bestimmten Funktion C(x) wird der Ansatz für y_P vervollständigt:

$$y_P = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3}{3x} = \frac{x^2}{3}$$

Damit ist ein partikuläres Integral y_P der DG gefunden. (Dass y_P tatsächlich die DG erfüllt, wurde bereits im vorigen Beispiel gezeigt.)

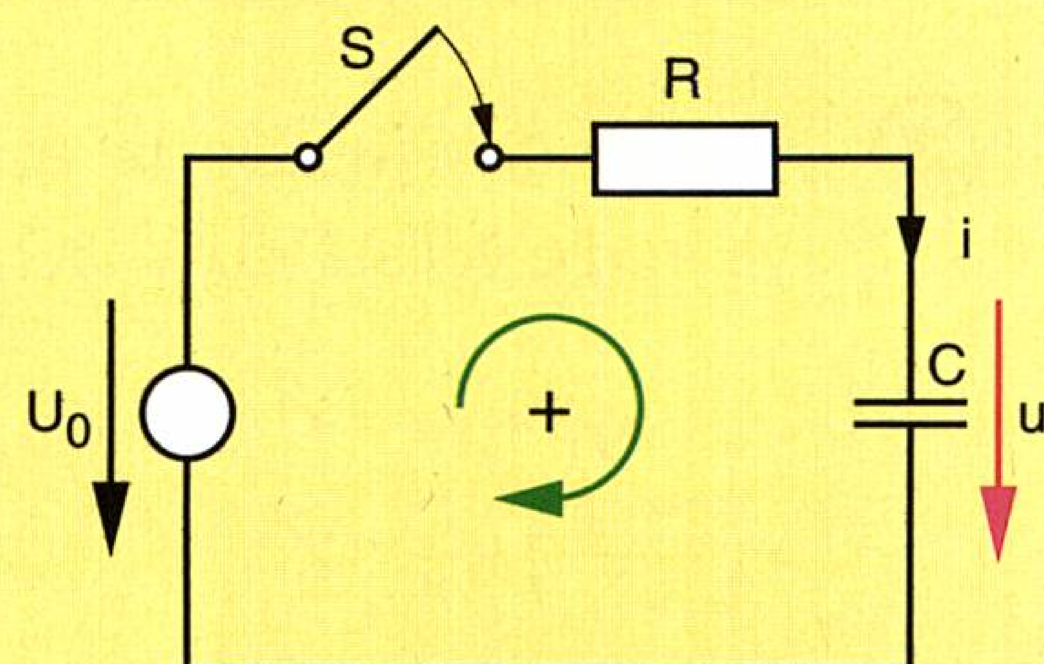
Bei der Variation der Konstanten kann man sich vorstellen, dass man mit diesem Trick die gefundene Lösung der homogenen DG heranzieht und sie ein wenig variiert. Und mit dieser Variation sucht man den etwas weiter umliegenden Funktionenraum ab in der (berechtigten) Hoffnung, dabei ein partikuläres Integral der inhomogenen DG aufzustöbern. Das Geniale an der Methode ist, dass sie den Funktionenraum mit großem Formenreichtum so zielgenau einschränkt, dass wir tatsächlich fündig werden.


Joseph Louis DE LAGRANGE
(1756–1813)

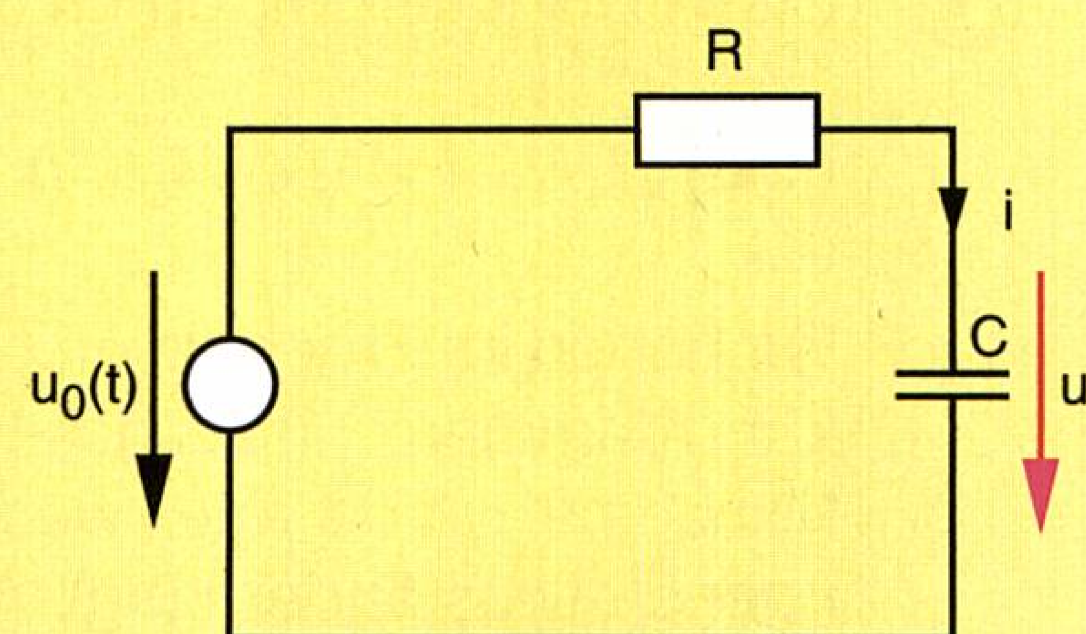
Jetzt wird so mancher fragen: Wie kommt man bloß auf so eine Idee? Nun, diese Frage können vielleicht wissenschaftsgeschichtliche Forschungen und Biografien beantworten. Ganz erklären kann man es wohl nicht. Warum fallen manchen Menschen geniale Gedanken ein? Auch die Mathematik lebt vom Einfallsreichtum. Die Methode der „Variation der Konstanten" zeigt so ganz nebenbei, dass Mathematik ohne Phantasie sicher nicht möglich wäre. Sie wurde und wird nicht von Leuten gemacht, die lediglich kühle und emotionslose Kalkulierer sind wie etwa der Vulkanier „Spock" aus der SF-Kultserie „Raumschiff Enterprise". Richtigkeit und logische Haltbarkeit sind zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Denn so einfach sich die Idee der „Variation der Konstanten" auch anhört, und so einfach die Überprüfung ihrer Richtigkeit auch sein mag (vgl. Aufgabe **442.**): Es bedarf in erster Linie sehr viel Phantasie, Kreativität und Ideenreichtum, damit einem so etwas überhaupt einfällt! Erst wenn einem etwas eingefallen ist, kann man über dessen logischen Gehalt und Richtigkeit urteilen. LAGRANGE war so ein kreativer Geist. Er beschäftigte sich hauptsächlich mit Zahlentheorie und Algebra und begründete die sogenannte **Variationsrechnung**.

AUFGABEN

437. Die Gleichung $u + \dot{u}RC = U_0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf des Spannungsabfalls u(t) am Kondensator während seiner Aufladung. Diese DG ist **ohne Substitution** zu lösen.



438. Statt der Gleichspannungsquelle U_0 wird nun an dem RC-Glied (Kondensator zu Beginn ungeladen) eine linear anwachsende Spannung $u_0(t) = U_0 \cdot \frac{t}{T}$ angelegt. Wie lautet die Funktion für den Spannungsverlauf u(t) am Kondensator? Die Lösung soll unter Zuhilfenahme der Variation der Konstanten erfolgen.



439. Statt der Gleichspannungsquelle U_0 wird nun an dem RC-Glied (Kondensator zu Beginn ungeladen) eine Wechselspannung $u_0(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$ angelegt. Wie lautet die Funktion für den Spannungsverlauf u(t) am Kondensator?

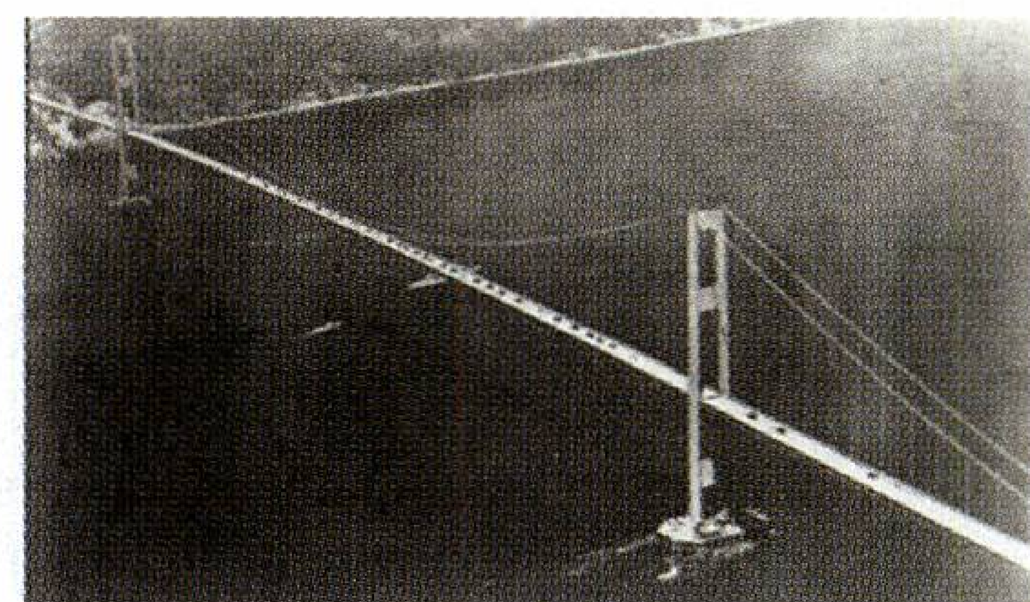
440. Lösen Sie die folgenden DGen:

a) $y' + x^2 y = x^2$ **b)** $y' + y \tan x = \sin 2x$ **c)** $y'' \cos x + y' \sin x = \sin x$
Anleitung: Substitution z=y'

441. Um ein partikuläres Integral der DG $xy' + y = x^2$ zu finden, wurde auf der Seite 175 die Methode der Variation der Konstanten angewendet. Im Schritt (4) dieses Verfahrens war eine DG für die Funktion C(x) zu lösen. Warum ist es vertretbar, die im Zuge der Integration dieser DG entstehende Integrationskonstante k wegzulassen bzw. Null zu setzen?
Anleitung: Zeigen Sie anhand der DG $xy' + y = x^2$, dass die (formal korrekte) Mitnahme der Integrationskonstanten k nichts an der Lösung der DG ändert.

442. Beweisen Sie die Richtigkeit der Variation der Konstanten für lineare inhomogene DGen mit variablen Koeffizienten.

5. Schwingungen



Sie gaben ihr den Spitznamen „Galoppierende Gertie". Vom ersten Tag an war sie eine Sensation. Nicht nur, weil sie in ihrem Baujahr 1940 die drittlängste Hängebrücke der Welt war. Die Leute kamen vor allem deshalb von weit her, um einmal den Nervenkitzel zu erleben, mit dem Auto über eine Stahlbrücke zu fahren, deren Fahrbahnen sich bei Windgang wellenförmig wie ein Pferderücken bewegten – eben „galoppierten". Ihr richtiger Name war „Tacoma-Narrows-Bridge" und sie verlief über die Bucht von Puget in der Nähe von Tacoma im US-Bundesstaat Washington. Man hatte die 854 Meter lange Brücke natürlich nicht zum Zweck der Massenbelustigung errichtet. Aber den Erbauern wurde dadurch deutlich vor Augen geführt, dass ein auf Stabilität ausgerichtetes Bauwerk trotzdem im Stande ist, unvorhergesehene Bewegungen auszuführen.



Die Tacoma-Narrows-Bridge war wohl nur ein äußerst beeindruckendes Beispiel für unerwünschte Schwingungen. Jedoch gibt es zahlreiche Beispiele dafür, wo Schwingungen erwünscht und ausgenützt werden. Wir werden noch darauf zurückkommen.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem mathematischen Aspekt von schwingungsfähigen Systemen beschäftigen. Ein **einfaches Federpendel** wird uns dabei als physikalisches Beispiel begleiten. Es steht stellvertretend für viele spontan schwingungsfähige Systeme. Die zugehörige DG ist von der Bauart:

$$\underbrace{\overset{\text{konstante Koeffizienten}}{\overset{\downarrow}{a}\,\underset{\underset{\text{2.Ordnung}}{\uparrow}}{y''} + \overset{\downarrow}{b}\,y' + \overset{\downarrow}{c}\,y}}_{\text{linear}} = \underbrace{s(x)}_{\text{inhomogen}}$$

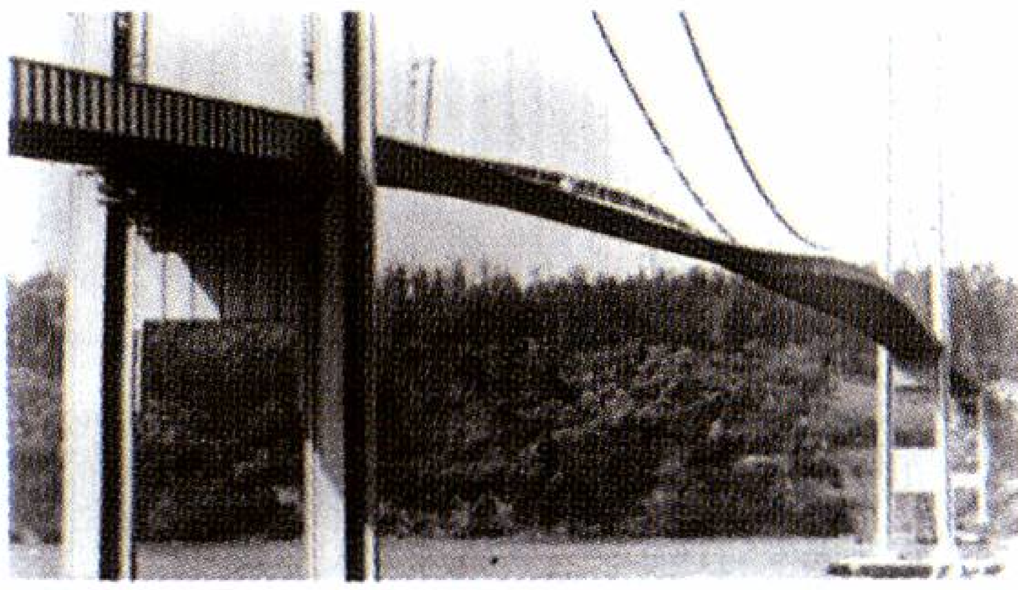
Wie man leicht erkennen kann, handelt es sich dabei um eine **lineare, inhomogene DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Bei ihrer Behandlung werden wir häufig auf die Erkenntnisse der vorangegangenen Abschnitte zurückgreifen.

5.1 Freie Schwingung

Beim Betrachten diverser Video-Sequenzen der schwingenden Tacoma-Bridge[2] fällt auf, dass die Fahrbahnen nicht nur „rollen", sondern auch Schwingungen quer zur Längsachse ausführen. Untersuchungen haben ergeben, dass man sich die Schwingungen der Tacoma-Bridge so vorstellen kann: Jeder Brückenrand schwingt wie eine stehende Gitarrensaite, die in der Mitte einen Knotenpunkt aufweist. Beide Brückränder schwingen jedoch nicht synchron, sondern um eine halbe

[1]) Schwingungen (allgemein):
http://www.walter-fendt.de/ph14d/

[2]) Video-Sequenzen der schwingenden Tacoma-Narrows-Bridge:
http://www.civeng.carleton.ca/Exhibits/Tacoma_Narrows/
http://www.enm.bris.ac.uk/research/nonlinear/tacoma/tacoma.html
http://www.enm.bris.ac.uk/anm/tacoma/tacoma.html
http://www.stkate.edu/physics/phys111/curric/tacomabr.html

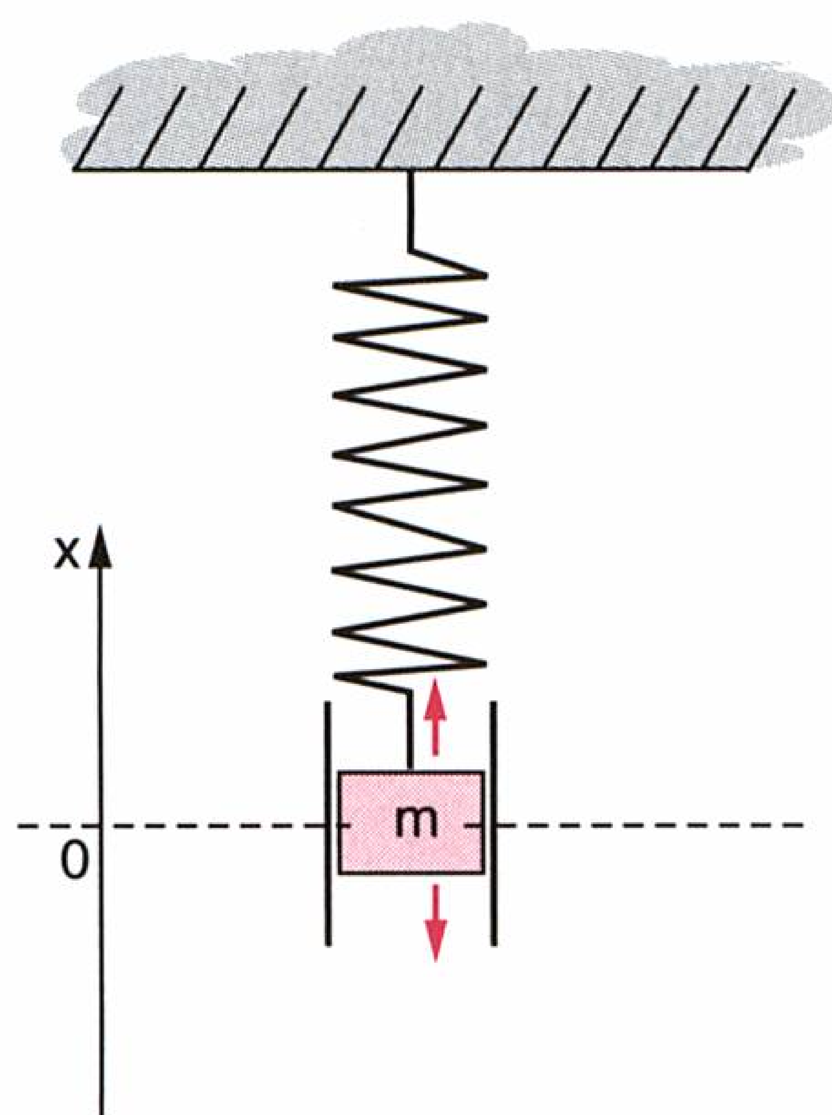


Schwingungsperiode phasenverschoben zueinander. Liegt also ein Fahrbahnteil momentan unten, liegt sein Gegenüber gerade oben, und umgekehrt. Diese Schwingung physikalisch zu analysieren und mathematisch zu beschreiben, würde unser momentanes Knowhow übersteigen. Was aber dieses Phänomen deutlich zeigt, ist die immense Bedeutung von Schwingungen im Bereich der Technik. Aber nicht nur in der Bautechnik, sondern auch in der Mechanik, der Akustik, der Elektrotechnik und der Nachrichtentechnik sind schwingungsfähige System wichtig.

Um uns dem Phänomen der Schwingung aber trotzdem annähern zu können, lassen wir all die Kompliziertheiten der schwingenden Brücke beiseite und konzentrieren uns auf das Wesentliche. Zu diesem Zweck werden wir ein Federpendel betrachten, das so einfach wie nur möglich gebaut ist.

Aufstellen der DG:

Es ist nun die DG eines Federpendels (vgl. nebenstehende Abbildung) aufzustellen.



Wir stellen uns dabei ein Objekt der Masse m vor, das am unteren Ende einer fest montierten Schraubenfeder hängt. Von jenem Punkt aus, wo sich das Objekt in Ruhe befindet, werden wir alle Auslenkungen x messen. Wir vereinbaren, Auslenkungen **nach oben** mit einem **positiven** und Auslenkungen **nach unten** mit einem **negativen** Vorzeichen zu versehen.

Auf das Objekt wirken zwei unterschiedliche Kräfte:

Federkraft

Das Objekt befindet sich in Gleichgewichtslage ($x = 0$). Wird es aus dieser gebracht ($x \neq 0$), so wird die Feder dabei gespannt oder gestaucht. Dadurch entsteht eine in die **Gegenrichtung** wirkende elastische Reaktionskraft $F_K = -kx$ (daher das negative Vorzeichen), wobei k die Federkonstante ist. Dieses sogenannte HOOKEsche Gesetz ist jedoch nur in einem kleinen Bereich der Auslenkung x linear. Bei größeren Auslenkungen würde die Beziehung nichtlinear werden. Wir wollen aber für unsere weiteren Überlegungen Linearität annehmen.

Reibungskraft

Erst wenn das Objekt sich in Bewegung setzt, tritt eine weitere Kraft in Aktion: die Luftströmung bremst den Bewegungsablauf ab. Der Bewegung wird also eine dynamische Bremskraft $F_R = -rv$ in Folge der Luftreibung **entgegenwirken** (daher das negative Vorzeichen). Auch hier herrscht ein linearer Zusammenhang – aber diesmal zwischen Kraft F_R und Geschwindigkeit v, solange die Luftströmung (oder die Strömung der Flüssigkeit) laminar ist. Entstehen jedoch um das bewegte Objekt Strömungswirbeln, ist die dynamische Reibungskraft bereits proportional zum Quadrat der Momentangeschwindigkeit ($F_R \sim v^2$). Wir werden derartige Turbulenzen in unserem Schwingungsmodell verhindern, indem wir das Objekt in einem entsprechenden Führungszylinder einschließen.

Die Resultierende F beider Kräfte wirkt nun auf das Objekt der Masse m ein und beschleunigt es nach der Gleichung $F = ma$:

$$F = F_K + F_R$$

$$ma = -rv - kx$$

$$ma + rv + kx = 0$$

Geschwindigkeit v und Beschleunigung a ersetzen wir nun wieder durch $\dot{x}$ und $\ddot{x}$: $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0$
Damit haben wir die DG für die Momentanauslenkung x(t) des Federpendels gefunden. Sie ist eine **lineare homogene DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Uns interessieren jedoch nur positive Werte für die Systemkonstanten m, r und k.

Lösen der DG

Wie lösen wir nun diese homogene DG? In den vorigen Abschnitten wurde erwähnt, dass man – um die Lösung abzuschätzen – bei bestimmten DGen ein Richtungsfeld anfertigen kann. Jedoch war dies leider nur bei DGen erster Ordnung möglich. Bei DGen höherer Ordnung versagt diese grafische Methode (vgl. Aufgabe **393.**). Von da her können wir also keinen Hinweis auf die Lösungsfunktionen erwarten.
Aber welche rechnerischen Methoden können wir anwenden? Da die DG von zweiter Ordnung ist, ist es auch nicht möglich, die Variablen x und y zu trennen, wie das bei vergleichbaren DGen erster Ordnung stets funktioniert (vgl. Aufgabe **443.**).
Wir haben aber bei den linearen DGen **erster Ordnung** die DG $y'=ky$ bzw. $ay'+by=0$ kennengelernt. Damals haben wir erkannt, dass ihre Lösung aus Exponentialfunktionen bestehen muss, da sonst keine andere uns bekannte Funktion die Eigenschaft hat, ein Vielfaches ihrer eigenen Ableitung zu sein. Bei unserer linearen DG **zweiter Ordnung** haben wir nun eine ähnliche Situation. Wir suchen eine Funktion, die in Linearkombination mit ihrer ersten und zweiten Ableitung identisch Null ergibt. Wenn wir alle uns bekannten Funktionen auf diese Eigenschaft überprüfen, bleibt dafür wiederum nur die Familie der Exponentialfunktionen übrig (vgl. Aufgabe **444.**). Wir versuchen es also mit dem Ansatz $x=e^{\lambda t}$.
Dann bilden wir die erste und zweite Ableitung

$\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{x}=\lambda^2 e^{\lambda t}$

setzen in die DG ein

$$m\lambda^2 e^{\lambda t}+r\lambda e^{\lambda t}+ke^{\lambda t}=0 \qquad \Big|:e^{\lambda t},\ e^{\lambda t}\neq 0$$

und erhalten die sogenannte **charakteristische Gleichung**:

$$\boxed{m\lambda^2+r\lambda+k=0}$$

Bei der charakteristischen Gleichung handelt es sich um eine quadratische Bestimmungsgleichung für den Parameter λ. Wir lösen die Gleichung mit der uns bekannten Formel:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-r\pm\sqrt{r^2-4mk}}{2m}, \quad D=r^2-4mk$$

Von der Behandlung quadratischer Gleichungen wissen wir, dass die Größe der Diskriminante $D=r^2-4\,mk$ drei unterscheidbare Fälle erlaubt, je nachdem, ob D größer, kleiner oder gleich 0 ist (vgl. Außenspalte)

Quadratische Gleichung (Wiederholung):

$ay^2+by+c=0$

$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \quad D=b^2-4ac$

1. Fall: $D>0$

Die Gleichung hat zwei reelle Lösungen:

$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

2. Fall: $D=0$

Die Gleichung hat eine relle Doppellösung:

$y_{1,2}=\frac{-b}{2a}$

3. Fall: $D<0$

Die Gleichung hat zwei konjugiert komplexe Lösungen:

$y_{1,2}=\frac{-b\pm}{2a}\pm j\frac{\sqrt{-D}}{2a}$

1. Fall: $\boxed{D=r^2-4mk>0 \Leftrightarrow r^2>4mk}$

Aperiodischer Kriechvorgang

Wir erhalten **zwei reelle Lösungen** für λ: $\lambda_{1,2}=\frac{-r\pm\sqrt{r^2-4mk}}{2m}$

Nun sind aber λ_1 und λ_2 nicht etwa bereits unsere freien Parameter, die unser allgemeines Integral erzeugen. Sie sind **Konstante**, da sie sich nach der obigen Formel aus m, r und k errechnen. Und diese drei Größen sind ebenfalls nicht beliebig variierbar, sondern fix vorgegebene Systemkonstante. Daher liefern die beiden Konstanten λ_1 und λ_2 auch jeweils nur ein partikuläres Integral der homogenen DG. Sie lauten: $x_1=e^{\lambda_1 t}$, $x_2=e^{\lambda_2 t}$

Wie aber lautet nun das allgemeine Integral? Überlegen wir: Was erwarten wir von unserem allgemeinen Integral? Unsere DG ist doch von **zweiter Ordnung**. Folglich muss auch das zugehörige allgemeine Integral **zwei freie Parameter** enthalten.

Aber woher bekommen wir diese? Bei den bisherigen DGen hatten wir es jedesmal mit einem tatsächlichen Integrationsvorgang zu tun, bei dem die erforderlichen freien Parameter als Integrations„konstante" entstanden sind. Bei unserer DG haben wir jedoch kein einziges unbestimmtes Integral gebildet. Auf **Integrationsparameter** dürfen wir also nicht hoffen. Stattdessen können wir weitere partikuläre Integrale bilden, indem wir x_1 bzw. x_2 mit Vielfachen multiplizieren: $A_1 e^{\lambda_1 t}$ und $A_2 e^{\lambda_2 t}$

Auf diese Weise können wir beliebig viele partikuläre Integrale bilden, denn wenn $e^{\lambda t}$ die DG erfüllt, dann gilt das auch für $Ae^{\lambda t}$ (vgl. Aufgabe **445.**). Wenn nun aber beide Lösungen $A_1 e^{\lambda_1 t}$ und $A_2 e^{\lambda_2 t}$ die DG erfüllen, dann erfüllt auch deren Summe die DG. Der Grund, warum gerade die **Linearkombination** die Gesamtlösung ergibt, liegt eben in der **Linearität** der DG (vgl. Aufgabe **446.**): $x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

Dieses allgemeine Integral verfügt nun tatsächlich über die zwei freien Parameter A_1 und A_2. Man kann leicht zeigen, dass jede derartige Lösungsfunktion im Unendlichen verschwindet (vgl. Aufgabe **447.**).

Beispiel:

Von einem Federpendel ist folgendes bekannt: $m = 1$ kg; $r = 5$ Ns/m; $k = 4$ N/m
Das Objekt erhält in einer Höhe von $x_0 = -0{,}2$ m einen Aufwärtsstoß, sodass seine Bewegung mit 1,4 m/s startet. Die Eigenschaften der sich einstellenden Lösungskurve sind zu diskutieren, um ein aussagekräftiges Schaubild zu erstellen.

Lösung:

Die DG lautet: $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$
Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$
Lösungen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$; $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -4$;
Allgemeines Integral der DG: $x(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$

Anfangswertproblem:

$x(0) = -0{,}2$, $\dot{x}(0) = 1{,}4$

1. Ableitung: $\dot{x}(t) = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t}$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}2 &= A_1 + A_2 \\ 1{,}4 &= -A_1 - 4A_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow A_1 = 0{,}2;\ A_2 = -0{,}4$$

Somit lautet das partikuläre Integral der DG: $x(t) = 0{,}2e^{-t} - 0{,}4e^{-4t}$

Kurvendiskussion:

1. und 2. Ableitung:

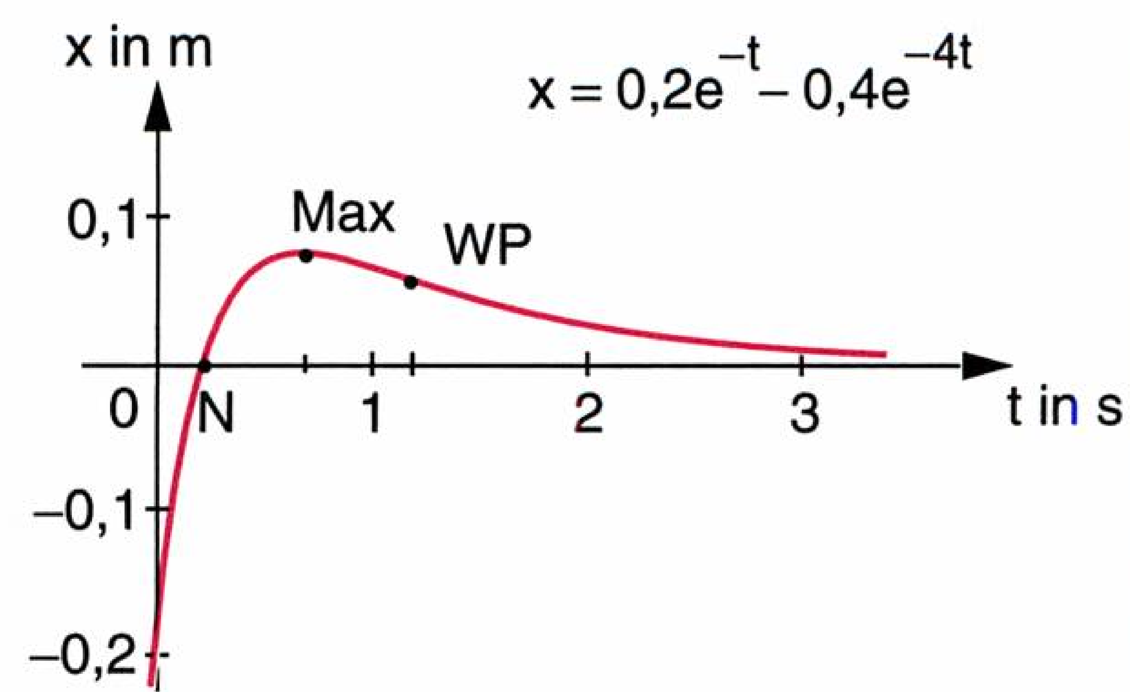
$\dot{x}(t) = -0{,}2e^{-t} + 1{,}6e^{-4t}$

$\ddot{x}(t) = 0{,}2e^{-t} - 6{,}4e^{-4t}$

	t in s	x in m	$\dot{x}$ in m/s	$\ddot{x}$ in m/s²
Anfangswert	0	–0,2	1,4	–6,2
Nullstelle	0,231	0	0,476	–2,381
Maximum	0,693	0,075	0	–0,3
Wendepunkt	1,155	0,059	–0,047	0

Mit diesen Formeln werden nun die Nullstelle, der Extremwert und der Wendepunkt ermittelt und an diesen Stellen die Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung errechnet.

Die Ergebnisse werden in einer Übersichtstabelle zusammengefasst.



Mit diesen Bestimmungsstücken lässt sich die Elongation des Objektes grafisch darstellen.

Für $t \to \infty$ gilt: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, d. h. die **aperiodische Kriechbewegung** klingt nach genügend langer Zeit ab.

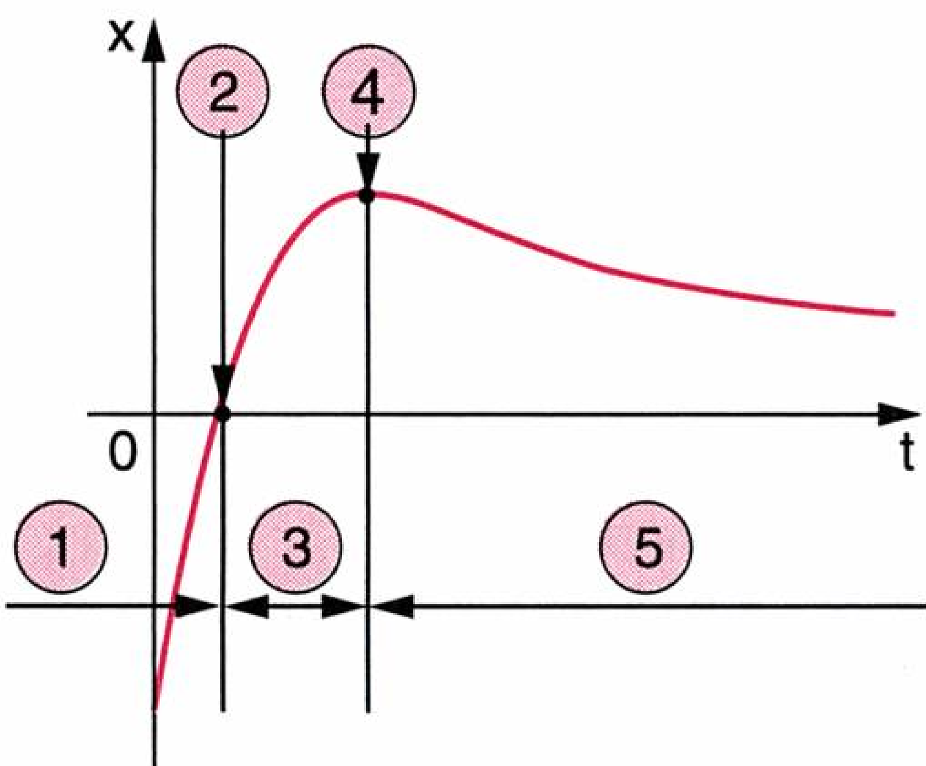
Anfangswertproblem:

Welche mögliche Anfangswert-Situationen sind prinzipiell zum Zeitpunkt $t = 0$ möglich? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir das im vorigen Beispiel angefertigte Schaubild.

Darin sind fünf verschiedene Phasen erkennbar. Wir müssen nun gedanklich lediglich die x-Achse sukzessive nach rechts verschieben, um die verschiedenen Lösungsfunktionen zu erhalten, die sich auf Grund der jeweiligen Anfangswerte einstellen können:

Phase

1	$x_0 < 0$	$\dot{x} > 0$	$Sgn(x_0) \neq Sgn(\dot{x}_0)$ [1]
2	$x_0 = 0$	$\dot{x} > 0$	
3	$x_0 > 0$	$\dot{x} > 0$	$Sgn(x_0) = Sgn(\dot{x}_0)$
4	$x_0 > 0$	$\dot{x}_0 = 0$	
5	$x_0 > 0$	$\dot{x}_0 < 0$	$Sgn(x_0) \neq Sgn(\dot{x}_0)$



2. Fall: $D = r^2 - 4mk = 0 \Leftrightarrow r^2 = 4mk$

Aperiodischer Grenzfall

Wir erhalten genau **eine reelle Lösung** $\lambda_{1,2} = \lambda = \frac{-r}{2m}$ der charakteristischen Gleichung. Man könnte jetzt auf die Idee kommen, wie im 1. Fall das allgemeine Integral einfach so anzuschreiben:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t} = A e^{\lambda t}$$

Auf diese Weise würde uns aber ein freier Parameter verloren gehen. Es lässt sich aber zeigen, dass in diesem speziellen Fall (wo also die Bedingungen $r^2 = 4mk$ und $\lambda = \frac{-r}{2m}$ gelten) nicht nur $e^{\lambda t}$ sondern auch $te^{\lambda t}$ ein partikuläres Integral der DG ist (vgl. Aufgabe **448.**).

Das allgemeine Integral lässt sich dann wieder durch eine Linearkombination dieser beiden darstellen (vgl. Aufgabe **449.**): $x = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}$

[1]) Die **Signum-Funktion** Sgn(x) bildet das Vorzeichen ihres Arguments x ab:

$$Sgn(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Beispiel:

Wir ändern an unserem Federpendel nur den Dämpfungswert, den wir auf r = 4 Ns/m senken. Welche Auswirkung hat dies?

Lösung:

Die DG lautet nun: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

Doppellösung der charakteristischen Gleichung: $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2$

Allgemeines Integral der DG: $x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$

Anfangswertproblem:

$x(0) = -0{,}2; \dot{x}(0) = 1{,}4$

1. Ableitung: $\dot{x}(t) = (A_2 - 2A_1 - 2A_2 t)\,e^{-2t}$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}2 &= A_1 \\ 1{,}4 &= A_2 - 2A_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow A_1 = -0{,}2;\ A_2 = 1$$

Somit lautet das partikuläre Integral der DG: $x(t) = (t - 0{,}2)e^{-2t}$

Kurvendiskussion:

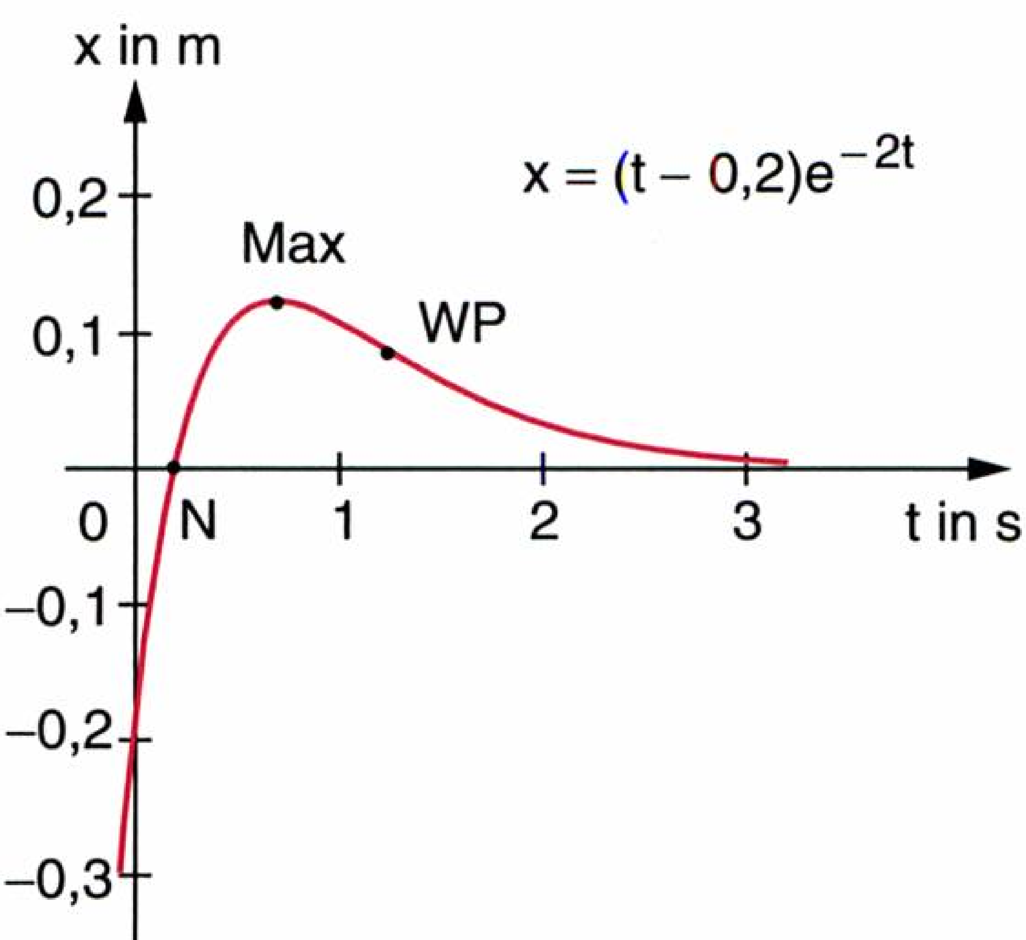
1. und 2. Ableitung:

$\dot{x}(t) = (1{,}4 - 2t)\,e^{-2t}$

$\ddot{x}(t) = (4t - 4{,}8)\,e^{-2t}$

	t in s	x in m	$\dot{x}$ in m/s	$\ddot{x}$ in m/s²
Anfangswert	0	–0,2	1,4	–4,8
Nullstelle	0,2	0	0,670	–2,681
Maximum	0,7	0,123	0	–0,493
Wendepunkt	1,2	0,091	–0,091	0

Mit diesen Formeln werden erneut Nullstelle, Extremwert und Wendepunkt ermittelt und an diesen Stellen die Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung errechnet. Die Ergebnisse werden in einer Übersichtstabelle zusammengefasst. Mit diesen Bestimmungsstücken lässt sich die Elongation des Objektes grafisch darstellen. An diesem Grenzfall lässt sich im Vergleich zum aperiodischen Kriechfall feststellen, dass die Bremsung (in Folge geringerer Dämpfung) von Anfang an bereits schwächer ausfällt. Die Nullstelle wird daher sowohl früher als auch mit höherer Geschwindigkeit durchschritten. Dadurch liegt auch die maximale Elongation, die das Objekt anschließend erreicht, höher als beim aperiodischen Kriechfall. Ebenso fällt die größte Sinkgeschwindigkeit (also jene Geschwindigkeit, mit der das Objekt den Wendepunkt passiert) stärker aus. All dies reicht aber noch nicht aus, um einen zweiten Nulldurchgang zu erzwingen. Auch hier gilt für $t \to \infty$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, d. h. die (gerade noch) **aperiodische Bewegung** klingt nach genügend langer Zeit ab.



Das Schaubild des vorigen Beispiels zeigt, dass die fünf verschiedenen Typen von Anfangswertproblemen jenen des 1. Falles entsprechen.

Gedämpfte Schwingung

3. Fall: $D = r^2 - 4mk < 0 \Leftrightarrow r^2 < 4mk$

Die charakteristische Gleichung hat **zwei konjugiert komplexe Lösungen**:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}$$

Da aber $r^2 < 4mk$ ist, können wir folgendermaßen umformen und etwas vereinfachen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm j\sqrt{4mk-r^2}}{2m} = \frac{-r}{2m} \pm j\frac{\sqrt{4mk-r^2}}{2m} = -\underbrace{\frac{r}{2m}}_{\delta} \pm j\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \underbrace{\left(\frac{r}{2m}\right)^2}_{\delta}}}_{\omega}$$ [1)]

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega, \quad \delta = \frac{r}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}$$

Da wir wieder über zwei verschiedene Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung verfügen, können wir das allgemeine Integral (wie im 1. Fall) als Linearkombination zweier partikulärer Integrale darstellen:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(-\delta+j\omega)t} + A_2 e^{(-\delta-j\omega)t} =$$
$$= A_1 e^{-\delta t} \cdot e^{j\omega t} + A_2 e^{-\delta t} \cdot e^{-j\omega t} = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}\right)$$

Wir verwenden nun die EULERsche Formel:

EULERsche Formel (Wiederholung):
$e^{\pm j\beta} = \cos\beta \pm j\sin\beta$

$$x = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}\right) = e^{-\delta t}\left[A_1(\cos\omega t + j\sin\omega t) + A_2(\cos\omega t - j\sin\omega t)\right] =$$
$$= e^{-\delta t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega t + j(A_1 - A_2)\sin\omega t\right]$$

Wenn wir unseren beiden Parametern A_1 und A_2 ausschließlich reelle Zahlen zuweisen, ergeben sich dadurch komplexe Lösungsfunktionen x(t). Für unser Beispiel des Federpendels interessieren uns aber nur reelle Lösungen der DG. Daher ersetzen wir die beiden Parameter A_1 und A_2 so, dass die beiden Terme $A_1 + A_2$ und $j(A_1 - A_2)$ reell werden:

$$x = e^{-\delta t}\left[\underbrace{(A_1 + A_2)}_{B_1}\cos\omega t + \underbrace{j(A_1 - A_2)}_{B_2}\sin\omega t\right] = e^{-\delta t}\left[B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t\right]$$

Nur wenn die neuen Parameter B_1 und B_2 reell sind, sind auch die Lösungen x(t) der DG reell. Dies gelingt genau dann, wenn die beiden ursprünglichen Parameter A_1 und A_2 **konjugiert komplexe** Werte annehmen (vgl. Aufgabe **452.**). Diese Vorgangsweise ist aus zwei Gründen erlaubt:

(1) Da die gesamte Lösungsmenge der DG aus komplexwertigen Funktionen besteht, müssen auch für die beiden Parameter A_1 und A_2 die komplexen Zahlen als Grundmenge zugelassen werden. Daraus wählt man die **konjugiert** komplexen Zahlen aus.

(2) Die Anzahl der freien Parameter bei der Substitution ist gleich geblieben.

Nun wissen wir, dass die Summe zweier harmonischer Funktionen, die sich nur in der Phasenlage, aber nicht in ihrer Periode unterscheiden, wiederum eine harmonische Funktion (gleicher Frequenz) ergibt. Wir wechseln noch einmal zu zwei neuen (reellen) Parametern A und φ (vgl. Aufgabe **453.**) derart, damit wir anschließend den ersten Summensatz für den Sinus anwenden können:

$$\mathbf{x} = e^{-\delta t}(\underbrace{B_1}_{A\sin\varphi}\cos\omega t + \underbrace{B_2}_{A\cos\varphi}\sin\omega t) = Ae^{-\delta t}[\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi] =$$
$$= \mathbf{Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)}$$

[1)] In der Elektrotechnik ist es üblich, j als Zeichen für die imaginäre Einheit heranzuziehen, da mit i zeitlich sich ändernde Ströme bezeichnet werden. Beim Federpendel handelt es sich zwar lediglich um eine Aufgabe aus dem Bereich der Mechanik, jedoch wird diese Konvention trotzdem übernommen, da die vorgestellte Rechenmethode vor allem in elektrotechnischen Aufgabenstellungen angewendet wird.

Das ist nun endgültig das (reelle) allgemeine Integral der DG. Die Funktionenschar besteht aus harmonischen Schwingungen, deren Amplituden exponentiell abklingen. Man spricht dabei auch von **gedämpfter Schwingung.**

Beispiel:

Wir senken erneut den Dämpfungswert auf r = 1 Ns/m. Was bewirkt dies?

Lösung:

Die DG lautet nun: $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$

Konjugiert komplexe Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{15}}{2}; \quad \lambda_1 = \frac{-1+j\sqrt{15}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{-1-j\sqrt{15}}{2};$$

Allgemeines Integral der DG: $x(t) = e^{-\delta t}(B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t)$

Anfangswertproblem:

$x(0) = -0{,}2; \dot{x}(0) = 1{,}4$

1. Ableitung: $\dot{x}(t) = e^{-\delta t}(-\delta B_1 \cos \omega t - \delta B_2 \sin \omega t - \omega B_1 \sin \omega t + \omega B_2 \cos \omega t) =$

$= e^{-\delta t}[(\omega B_2 - \delta B_1)\cos \omega t - (\omega B_1 + \delta B_2)\sin \omega t]$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}2 &= B_1 \\ 1{,}4 &= \omega B_2 - \delta B_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow B_1 = -0{,}2; B_2 = \frac{1{,}4 - 0{,}2\delta}{\omega} = \frac{1{,}4 - 0{,}2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{2{,}6}{\sqrt{15}}$$

Somit lautet das partikuläre Integral der DG: $x(t) = e^{\frac{-t}{2}}\left(-0{,}2\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + \frac{2{,}6}{\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$

Kurvendiskussion:

1. und 2. Ableitung:

$\dot{x}(t) = e^{\frac{-t}{2}}\left(1{,}4\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + \frac{0{,}2}{\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$

$\ddot{x}(t) = -e^{\frac{-t}{2}}\left(0{,}6\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + \frac{10{,}6}{\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$

	t in s	x in m	$\dot{x}$ in m/s	$\ddot{x}$ in m/s²
Anfangswert	0	−0,2	1,4	−0,6
Nullstellen	0,15	0	1,259	−1,259
	1,772	0	−0,559	0,559
Extrema	−0,792	−1,008	0	4,031
	0,830	0,448	0	−1,791
Wendepunkte	−0,111	−0,359	1,434	0
	1,5109	0,159	−0,637	0

Mit diesen Formeln werden nun die jeweils ersten beiden Nullstellen, Extrema und Wendepunkte ermittelt und an diesen Stellen die Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen errechnet. Die Ergebnisse werden in einer Übersichtstabelle zusammengefasst.

Mit diesen Bestimmungsstücken lässt sich die Elongation des Objektes grafisch darstellen. Im Vergleich zu den beiden bisherigen Fällen ist die Bremsung (in Folge der geringeren Dämpfung) von Anfang an noch schwächer. Die erste Nullstelle wird daher sowohl früher als auch mit höherer Geschwindigkeit durchschritten. Dadurch liegt auch das erste Maximum, welches das Objekt anschließend erreicht, höher als bei den aperiodischen Bewegungen. Ebenso fällt die größte Sinkgeschwindigkeit (also jene Geschwindigkeit, mit der das Objekt den Wendepunkt passiert) stärker aus.

Dies bewirkt nun endlich einen zweiten Nulldurchgang, dem schließlich weitere folgen.

Auch hier gilt für $t \to \infty$: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, d. h. das System vollführt eine freie (unerzwungene), aber **gedämpfte Eigenschwingung**.

Die Abklingung der harmonischen Schwingung wird durch den Faktor $Ae^{\frac{-t}{2}} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}\,e^{\frac{-t}{2}} = \dots = 0{,}4\sqrt{\frac{46}{15}}e^{\frac{-t}{2}}$ in der Funktionsgleichung für x(t) erzwungen.

Die einhüllenden Kurven der Schwingung werden demnach durch die Funktionsgleichungen $x(t) = \pm Ae^{\frac{-t}{2}}$ beschrieben.

Die drei vorangegangenen Beispiele haben sich von ihrer Ausgangssituation nur in der Größe der Reibungszahl r unterschieden.

Ausgehend vom abklingenden Kriechvorgang (1. Fall) gelangten wir durch Senkung der Reibung zur gerade noch aperiodischen Bewegung (2. Fall) und schließlich zur gedämpften Schwingung (3. Fall).

Was geschieht, wenn die Reibung r nun noch weiter gesenkt wird?

Wir können diese Frage anhand der DG oder anhand der Lösungsfunktion beantworten:

Gedämpfte Schwingung ($r > 0$)	Ungedämpfte Schwingung ($r = 0$)
$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$	$m\ddot{x} + kx = 0$
$x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ $\delta = \frac{r}{2m}$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$	$x = A\sin(\omega t + \varphi)$ $\delta = 0$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$
x, A, 0, −A, t; $x = +Ae^{-\delta t}$; $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$; $x = -Ae^{-\delta t}$	x, A, 0, −A, t; $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

Aus der vorigen Übersichtstabelle kann man erkennen, dass bei (nur theoretisch möglichem) Wegfall der Reibung r die gedämpfte Schwingung in eine ungedämpfte übergeht.

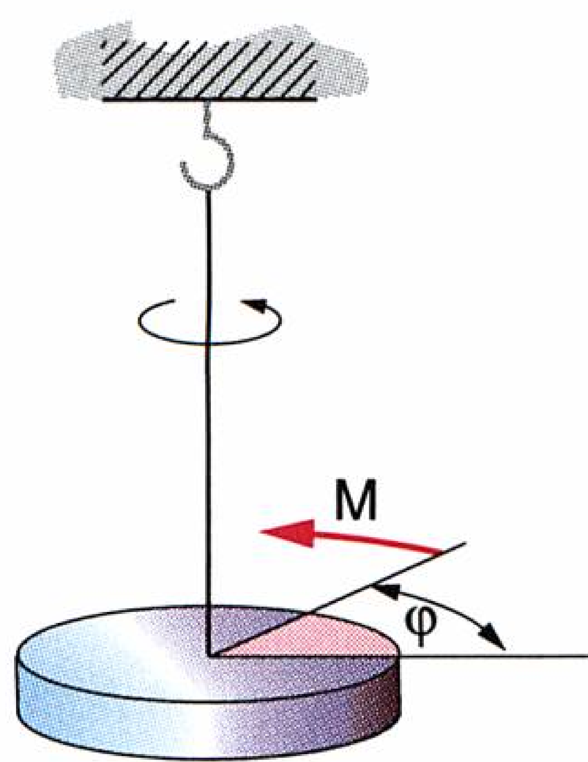
Das System schwingt dann ungebremst mit einer Eigenfrequenz ω_0.

Sobald man eine Dämpfung wieder zulässt, sinkt dabei auch die Eigenfrequenz ω.

Treibt man die Dämpfung weiter in die Höhe, sinkt die Eigenfrequenz bis sie im aperiodischen Grenzfall Null wird: das System schwingt ab nun nicht mehr. Ab nun kann das System höchstens einen einzigen Nulldurchgang vollführen.

Unsere bisher ausführlich diskutierte DG hat viele technische und physikalische Anwendungsmöglichkeiten, von denen nur einige hier genannt werden:

Torsionspendel (Drehschwinger)



Ein Objekt der Masse m wird über eine Schneckenfeder auf einer Drehachse (oder auf einer elastisch verformbaren Drillachse) aufgehängt.

Auf Grund der strengen physikalischen Analogie zwischen einer Translation (Verschiebung) und einer Rotation, erhält man für diesen Drehschwinger eine völlig gleiche DG:

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D\varphi = 0$$

Der Weg x der Translation beim Federpendel geht dann über in einen Drehwinkel φ beim Torsionspendel.

Aus Geschwindigkeit $\dot{x}$ und Beschleunigung $\ddot{x}$ werden Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$.

Dem Kraftgesetz $F = ma = m\ddot{x}$ entspricht $M = J\ddot{\varphi}$, der Reibungskraft $F_R = r\dot{x}$ entspricht ein Dämpfungsmoment $M_R = \rho\dot{\varphi}$ und der linearen Rückstellkraft $F_k = kx$ der Feder entspricht ein Direktionsmoment (rücktreibendes Drehmoment) $M_D = D\varphi$.

Torsionspendel schwingen so wie Federpendel auch im gravitationsfreien Raum.

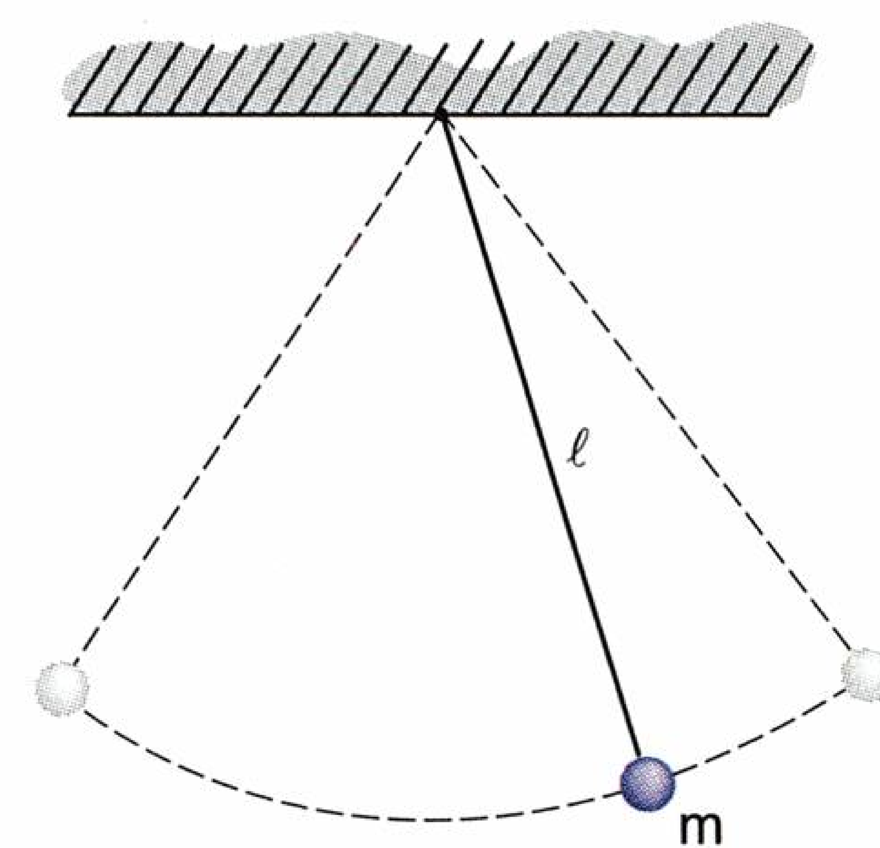
Drehschwinger werden dazu verwendet, um Trägheitsmomente J von kompliziert gestalteten Objekten, die sich nur sehr schwer berechnen lassen, experimentell zu bestimmen.

Dabei wird die sich einstellende Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$ der nahezu dämpfungsfreien Drehschwingung des jeweiligen Objektes dazu benützt, um auf dessen Trägheitsmoment bezüglich der Drillachse zu schließen (vgl. Aufgabe **471.**).

Weitere technische Anwendungen von Torsionspendeln finden sich in vielen Zeigerinstrumenten (z. B. Drehspulgalvanometer u. a.), wo der Zeiger drehbar gelagert ist und die jeweils zu messende physikalische Größe eine Winkelauslenkung φ bewirkt.

Da die Auslenkung des Zeigers rasch zu erfolgen hat, ist hier eine entsprechende Dämpfung ρ sehr wichtig.

Nach Abschluss der Messung stellt die Feder den Zeiger wieder in die Ausgangslage zurück.



Fadenpendel

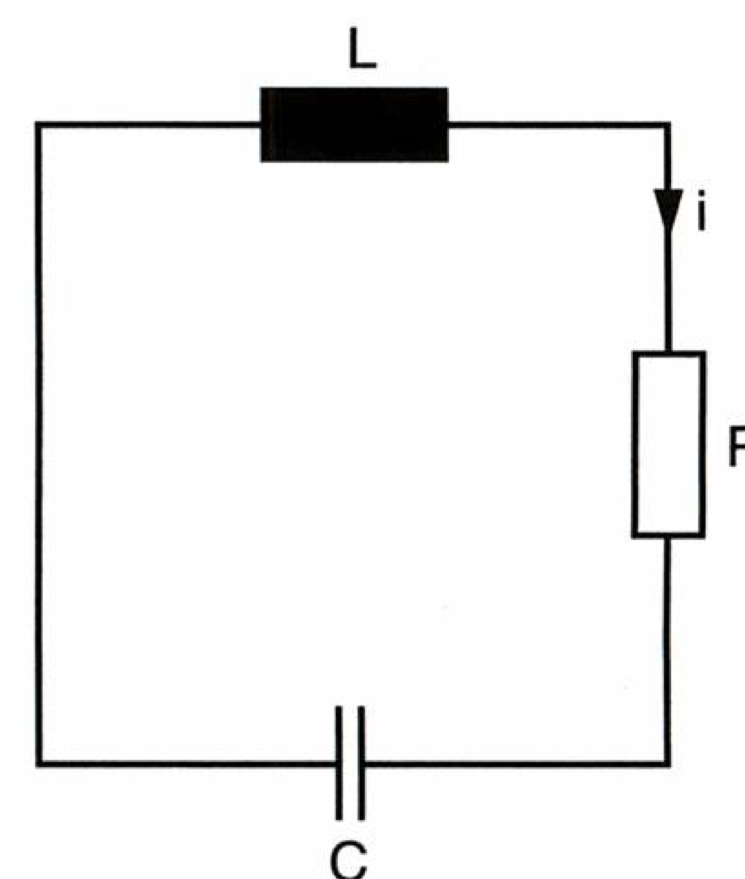
An einem massenlosen gespannten Faden der Länge ℓ hängt ein Objekt der Masse m und vollführt Pendelbewegungen. Die Rückholkraft wird hier nicht von einer Feder sondern von der Gravitation besorgt: während nämlich das Federpendel auch im gravitationsfreien Feld schwingt, ist dies beim Fadenpendel nicht möglich.

Für nur kleine Auslenkungswinkel φ ist

$$\ell\ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + g\varphi = 0$$

eine brauchbare Näherung für die DG des Fadenpendels (vgl. Aufgabe **473.**).

Da man beim Fadenpendel die Reibung nahezu vernachlässigen kann, ist die sich einstellende Periodendauer T der ungedämpften Schwingung mit $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ sehr gut angenähert (vgl. Aufgabe **474.**). Dieser Zusammenhang wird beispielsweise genutzt, um die örtlich variierende Gravitationskonstante g experimentell zu bestimmen.



Elektrischer Schwingkreis

Eine weitere interessante Analogie zum Federpendel bilden sämtliche elektrischen Schwingkreise.

Beim **Serienschwingkreis** genügt der Gesamtstrom i(t) der analogen DG (vgl. Aufgabe **475.**):

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

Wie sich leicht zeigen lässt, ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 **verlustfreier Schwingkreise** stets: $\omega_0 = \frac{1}{LC}$. Daraus lässt sich die sogenannte THOMSONsche Formel für die zugehörige Periodendauer T eines ungedämpften Schwingkreises herleiten: $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (vgl. Aufgabe **476.**).

Alle hier erwähnten schwingungsfähigen Systeme führen direkt oder als Näherung zu der von uns bereits ausführlich behandelten DG. Ihre Lösungen erfolgen daher jedesmal analog zu dieser.

AUFGABEN

443. Zeigen Sie, dass die Methode der Variablentrennung bei der Lösung der DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ versagt.

444. Zeigen Sie, dass außer den Exponentialfunktionen keine der elementaren Funktionen die DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ erfüllt.

445. Man zeige: wenn $e^{\lambda t}$ die DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ erfüllt, dann gilt das auch für $Ae^{\lambda t}$.

446. Man zeige: wenn $A_1e^{\lambda_1 t}$ und $A_2e^{\lambda_2 t}$ jeweils die DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ erfüllen, dann erfüllt auch deren Summe die DG.

447. Zeigen Sie, dass die Lösungsfunktion $x = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_{1,2} < 0$ im Unendlichen verschwindet.

448. Zeigen Sie, dass im aperiodischen Grenzfall $te^{\lambda t}$ ein partikuläres Integral der DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ ist.

449. Man zeige: wenn im aperiodischen Grenzfall sowohl $e^{\lambda t}$ als auch $t\,e^{\lambda t}$ Lösungen der DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ sind, so gilt dies auch für deren Linearkombinationen $x = (A_1 + A_2t)e^{\lambda t}$.

450. Zeigen Sie, dass die Lösungsfunktion $x = (A_1 + A_2t)e^{\lambda t}$ mit $\lambda < 0$ im Unendlichen verschwindet.

451. Zeigen Sie, dass die Lösungsfunktion $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ mit $\delta > 0$ im Unendlichen verschwindet.

452. Es ist zu zeigen: Die Bewegungsgleichung $x = e^{-\delta t}[\underbrace{(A_1 + A_2)}_{B_1}\cos\omega t + \underbrace{j(A_1 - A_2)}_{B_2}\sin\omega t]$ der DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ im Schwingungsfall ist genau dann reell, wenn auch die Parameter B_1 und B_2 reell sind. Dies gelingt genau dann, wenn die beiden ursprünglichen Parameter A_1 und A_2 **konjugiert komplexe** Werte annehmen.

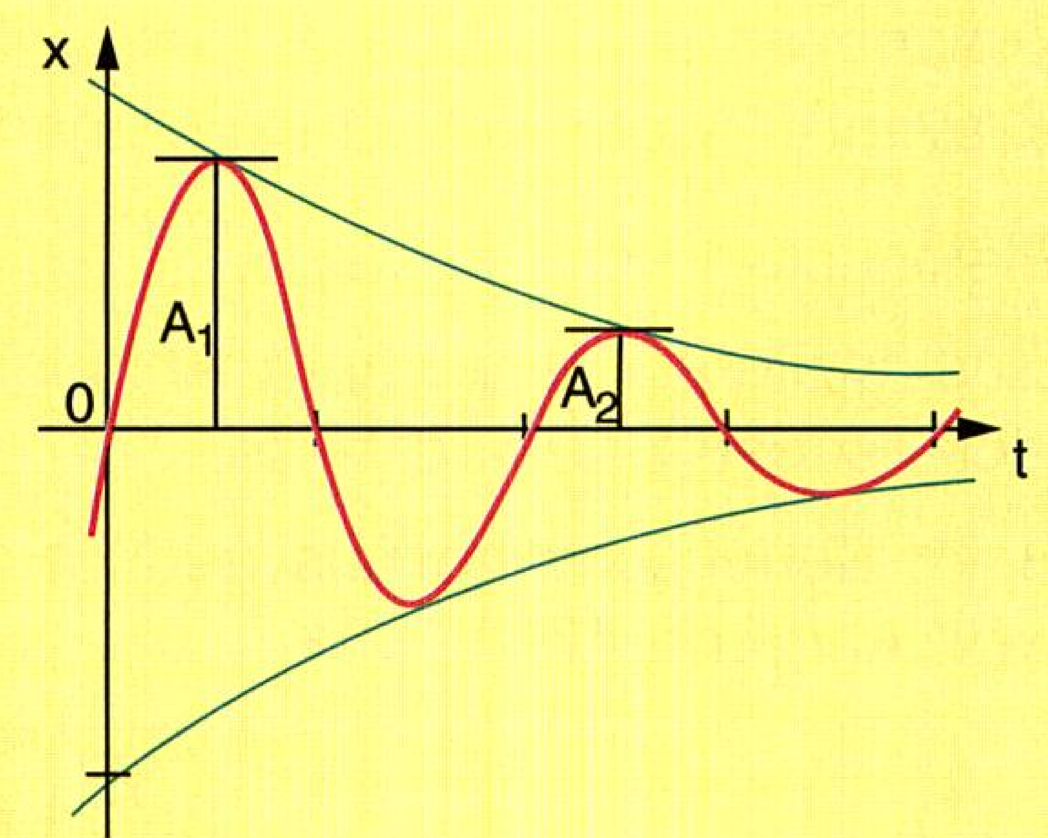
453. Bestimmen Sie die Parameter A und φ für die Bewegungsgleichung

$x = e^{-\delta t}(\underbrace{B_1}_{A\sin\varphi}\cos\omega t + \underbrace{B_2}_{A\cos\varphi}\sin\omega t)$ der DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ im Schwingungsfall.

454. Zeigen Sie, dass $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ die DG $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ im Schwingungsfall erfüllt.

455. Der Quotient $Q = \frac{A_{n+1}}{A_n}$ zweier aufeinanderfolgender Amplituden A_n und A_{n+1} der gedämpften Schwingung heißt **Dämpfungsverhältnis**.

Zeigen Sie, dass das Dämpfungsverhältnis über alle Schwingungen konstant ist.



456. Die DG $m\ddot{x} + kx = 0$ ist zu lösen.

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden DGen.

457. a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ **b)** $y'' - 7y' + 6y = 0$

458. a) $y'' - 4y' = 0$ **b)** $y'' + y' - 2y = 0$

459. a) $y'' - 6y' + 8y = 0$ **b)** $y'' - 4y' + 3y = 0$

460. a) $y'' - 16y = 0$ **b)** $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

461. a) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ **b)** $y'' - 10y' + 25y = 0$

462. a) $y'' - 8y' + 16y = 0$ **b)** $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$

463. a) $\ddot{x} + 16x = 0$ **b)** $2\ddot{x} + 3x = 0$

464. a) $\ddot{x} + x = 0$ **b)** $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$

465. a) $2\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x = 0$ **b)** $3y'' - 4y' + 2y = 0$

Man bestimme jeweils jene partikulären Lösungen der folgenden DGen, die sich auf Grund der Randbedingungen ergeben.

466. a) $y'' + 4y' - 5y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$ **b)** $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 2$

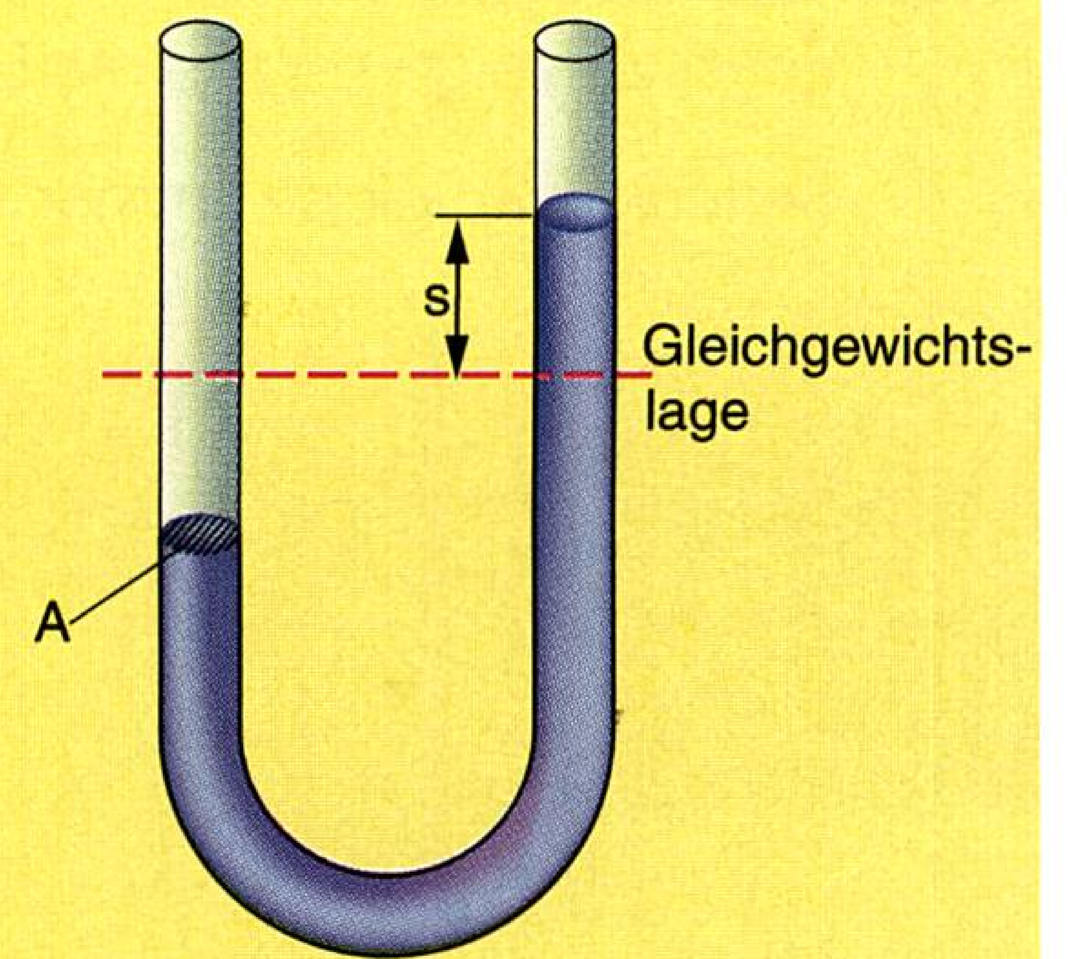
467. a) $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 4$ **b)** $\ddot{x} + x = 0 \quad x(\pi) = 1 \quad \dot{x}(\pi) = 1$

468. a) $\ddot{s} - 2\dot{s} - 3s = 0 \quad s(0) = 1 \quad \dot{s}(0) = 2$ **b)** $\ddot{s} + 9s = 0 \quad s(0) = 0 \quad \dot{s}(0) = 3$

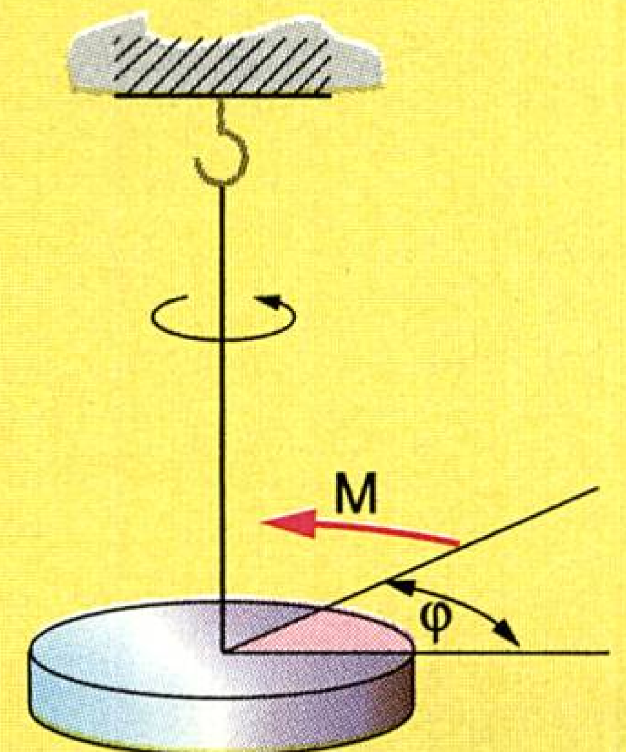
469. Die nebenstehende Abbildung zeigt ein mit einer Flüssigkeit (Dichte ρ) gefülltes U-Rohr, das den Rohrquerschnitt A aufweist. Die Flüssigkeitssäule beginnt mit einer Auslenkung x_0 des Flüssigkeitsspiegels aus der Gleichgewichtslage $(x = 0)$ zu schwingen. Die Reibung ist zu vernachlässigen.

a) Es ist die zugehörige DG zu bestimmen.

b) Stellen Sie eine Formel für die Schwingungsdauer T auf.



470. Leiten Sie die DG der **Drehschwingung** her.
Anleitung: vgl. Seite **186**.

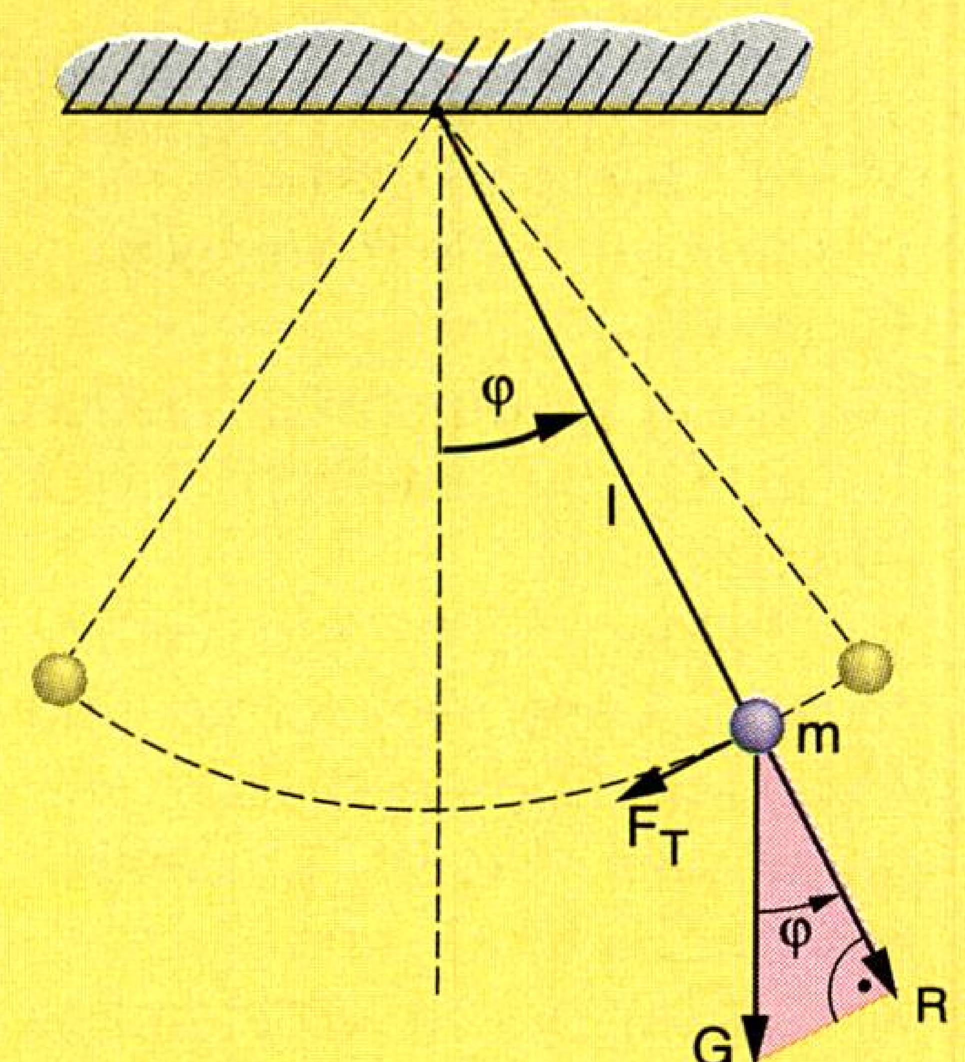


471. Zeigen Sie, dass für die sich einstellende Periodendauer T eines nahezu dämpfungsfrei schwingenden Torsionspendels mit der DG $J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D\varphi = 0$ gilt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$.

472. Das Drehsystem eines ballistischen Galvanometers hat eine Eigenschwingungsdauer von $T = 8\,\text{s}$ und ein Trägheitsmoment $J = 10^{-4}\,\text{kgm}^2$. Es schwingt praktisch dämpfungsfrei mit einer Amplitude $\alpha = 2\pi/3$ rad und wird vom Augenblick eines Nulldurchgangs an mit $\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ Nms/rad gedämpft. Wie weit schwingt das System anschließend noch aus? Der Vorgang ist unter Einbeziehung einer halben Periode der ungedämpften Schwingung maßstäblich zu skizzieren.

473. a) Es ist die DG eines Fadenpendels herzuleiten. Die Dämpfung ist dabei zu vernachlässigen.

b) Zeigen Sie, dass für kleine Auslenkungswinkel φ die DG linearisiert werden kann.



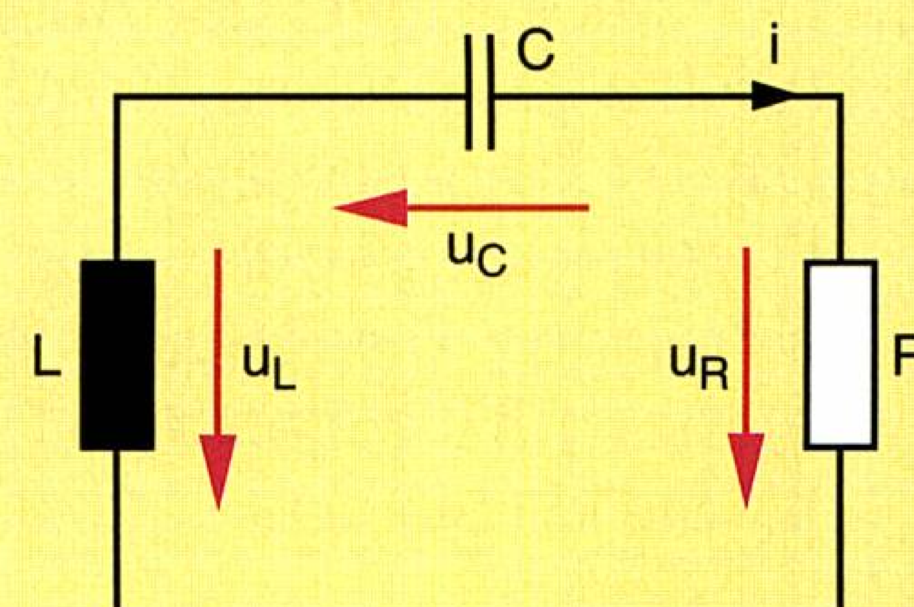
474. Man bestimme aus der linearisierten DG des ungebremst schwingenden Fadenpendels die Periodendauer T.

475. Serienschwingkreis

a) Es ist die DG des zeitlichen Stromverlaufs i(t) aufzustellen.

b) Wie lautet das allgemeine Integral, wenn R = 0 ist?

476. THOMSONsche Formel
Es ist zu zeigen, dass die Eigenkreisfrequenz ω_0 beim verlustfreien Serienschwingkreis immer $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ beträgt.



5.2 Erzwungene Schwingung

Unser Federpendel hat bislang ausschließlich **freie**, nämlich **unerzwungene** Kriechbewegungen oder Schwingungen vollführt. Diese Bewegungen entstehen durch einmalige Energiezufuhr von außen. Diese Einwirkungen sind bei mechanischen Pendeln Auslenkungen aus der Ruhelage (potentielle Energie) oder Stöße (kinetische Energie). Nach dem Einwirken dieser einmaligen Störungen wird das Pendel sich selbst überlassen. Bei elektrischen Schwingkreisen werden diese Einwirkungen durch einmalige Spannungs- oder Stromstöße bewirkt. Nach diesen einmaligen Störungen folgen keine weiteren.

Bei der Tacoma-Narrows-Bridge waren es Kraftstöße, die sie zum Schwingen anregten. Diese Kraftstöße wurden durch Windböen hervorgerufen. Jedoch waren die Windströmungen nicht einmalig, die nach dem Auslösen der Schwingung etwa nachgelassen hätten, sondern wirkten weiterhin auf die Brücke ein. Genaue Untersuchungen haben ergeben, dass bei der Tacoma-Bridge ein merkwürdiges physikalisches Phänomen vorlag: nämlich das sogenannte „Sackflugflattern", das man an Windsäcken auf Autobahnen beobachten kann. Rhythmisch sich ablösende Strömungswirbeln bewirken dabei eine periodische Kraft, die Windsäcke zum Flattern bringt und die Fahrbahnen der Tacoma-Bridge in Schwingungen versetzte.

Wir werden nun wiederum unser einfaches Federpendel heranziehen, um die Auswirkungen von zusätzlichen Kräften zu untersuchen, die auf das System **dauerhaft** einwirken. Auf das System wirken jetzt nicht nur Feder- und Reibungskraft, sondern auch eine äußere Kraft $F_S = s(t)$:

$$F = F_K + F_R + F_S$$
$$ma = -rv - kx + F_S$$
$$ma + rv + kx = F_S$$

Dadurch verwandelt sich unsere homogene DG in eine **inhomogene lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = s(t)$$

Der Störfunktion s(t) entspricht also die zeitlich veränderliche Kraft F_S, die unserem Federpendel von außen aufgeprägt wird. Da diese DG linear ist, dürfen wir für die allgemeine Lösung x(t) das **Superpositionsgesetz** anwenden: $x = x_H + x_P$. Mit dem Auffinden des allgemeinen Integrals x_H der verkürzten DG haben wir uns im vorigen Abschnitt ausführlich beschäftigt, sodass wir uns in diesem Abschnitt auf die Beschaffung eines partikulären Integrals x_P der vollständigen DG beschränken können. Dies ist fast immer möglich mit Hilfe der **Variation der Konstanten**. Das nächste Beispiel führt diese Methode exemplarisch vor.

Variation der Konstanten (für lineare DGen 2. Ordnung):

1. y_H der verkürzten DG $y'' + y' \cdot p(x) + y \cdot q(x) = 0$ bestimmen, Freie Parameter C_1 und C_2.
2. C_1, C_2 in y_H durch Funktionen $C_1(x)$, $C_2(x)$ ersetzen. Ergibt Ansatz für y_P.
3. y_P' bilden und so vereinfachen, dass die Terme, die $C_1(x)$ und $C_2(x)$ enthalten, verschwinden. Ergibt 1. Bestimmungs-DG für C_1 und C_2.
4. Ansatz für y_P in vollständige DG $y'' + y' \cdot p(x) + y \cdot q(x) = s(x)$ einsetzen. Das ergibt die 2. Bestimmungs-DG für C_1 und C_2.
5. DG-System für $C_1(x)$ und $C_2(x)$ lösen.
6. Lösung $C_1(x)$ und $C_2(x)$ in y_P einsetzen.

Da jedoch in diesem folgenden Beispiel der Koeffizient der ersten Ableitung negativ ist, kann es sich dabei nicht um die DG eines Federpendels o. Ä. handeln, denn das würde ja eine negative Reibungskonstante voraussetzen, was physikalisch offenbar unsinnig ist. Daher suchen wir jetzt nicht eine Funktion x(t), sondern eine Funktion y(x):

Beispiel:
Die DG $y'' - 5y' + 6y = x^2$ ist allgemein zu lösen.

Lösung:

(1) Die charakteristische Gleichung der homogenen DG $y'' - 5y' + 6y = 0$ liefert die beiden Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ (die Tatsache, dass diese beiden Lösungen positiv sind, zeigt, dass es sich bei der gegebenen DG nicht um das mathematische Modell eines Pendels handeln kann).
Allgemeines Integral der homogenen DG: $y_H = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

(2) Wir machen für y_P einen Ansatz, indem wir beide Konstanten C_1 und C_2 variieren: $y_P = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{3x}$

(3) Wir haben es also mit **zwei** noch unbekannten Funktionen zu tun, die wir bestimmen müssen. Um **beiden** Funktionen auf die Schliche zu kommen, benötigen wir bekanntlich **zwei** Bestimmungsgleichungen. Die erste derartige Gleichung erhalten wir, wenn wir den Ansatz für y_P samt seinen beiden Ableitungen in unsere inhomogene DG einsetzen. Dazu müssen wir zunächst einmal die erste Ableitung von y_P bilden:
$y'_P = C'_1e^{2x} + 2C_1e^{2x} + C'_2e^{3x} + 3C_2e^{3x}$
Da es sonst keine weiteren Bedingung gibt, die C_1 und C_2 erfüllen müssten, können wir die zweite noch fehlende Bestimmungsgleichung frei wählen. Wir konstruieren sie so, dass im Term für y'_P die ersten Ableitungen C'_1 und C'_2 verschwinden, also:
$C'_1e^{2x} + C'_2e^{3x} = 0$
Damit haben wir zweierlei erreicht: Wir haben erstens eine zweite Bestimmungsgleichung für C_1 und C_2 gefunden und wir haben zweitens den Term für y'_P **wesentlich** vereinfacht. Denn damit wird der Term für y''_P nicht aus acht sondern nur aus vier Glieder bestehen:
$y'_P = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}$
$y''_P = 2C'_1e^{2x} + 4C_1e^{2x} + 3C'_2e^{3x} + 9C_2e^{3x}$

(4) Wir setzen nun in die inhomogene DG ein und ordnen die Terme entsprechend:

$$y''_P - 5y'_P + 6y_P = x^2$$
$$2C'_1e^{2x} + 4C_1e^{2x} + 3C'_2e^{3x} + 9C_2e^{3x} - 5\left(2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}\right) + 6\left(C_1e^{2x} + C_2e^{3x}\right) = x^2$$
$$2C'_1e^{2x} + C_1e^{2x}(4 - 5\cdot 2 + 6) + 3C'_2e^{3x} + C_2e^{3x}(9 - 5\cdot 3 + 6) = x^2$$
$$2C'_1e^{2x} + 3C'_2e^{3x} = x^2$$

(5) Unser Gleichungssystem für die Funktionen $C_1(x)$ und $C_2(x)$ lautet nun:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & C'_1e^{2x} + C'_2e^{3x} = 0 \\ (2) & 2C'_1e^{2x} + 3C'_2e^{3x} = x^2\end{array}\right\}$$

Wir formen die erste Gleichung um und setzen in die zweite Gleichung ein:

(1) $C'_2e^{3x} = -C'_1e^{2x}$

(2) $2C'_1e^{2x} - 3C'_1e^{2x} = x^2$

$$C'_1e^{2x} = -x^2$$
$$C'_1 = -x^2e^{-2x}$$

Damit haben wir eine sehr einfache DG für $C_1(x)$ erhalten, die wir durch unbestimmte Integration lösen.

Dabei müssen wir zweimal partiell integrieren:

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = -\int x^2 e^{-2x} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = e^{-2x}dx \\ du = 2x dx & v = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \right| = -\left(\frac{-x^2}{2} e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^{-2x}dx \\ du = dx & v = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} e^{-2x} - \left(\frac{-x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \right) = \frac{x^2}{2} e^{-2x} + \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{-2x}$$

Damit haben wir die Funktion $C_1(x)$ bestimmt. Bei der unbestimmten Integration dürfen wir übrigens die Integrationskonstante(n) weglassen, da wir uns mit nur einem partikulären Integral y_P begnügen. Für die Funktion $C_2(x)$ setzen wir Gleichung (2) in (1) ein:

$$C_2' e^{3x} = -C_1' e^{2x}$$

$$C_2' e^{3x} = x^2 e^{-2x} e^{2x}$$

$$C_2' = x^2 e^{-3x}$$

Damit erhalten wir erneut eine einfache DG für die Funktion $C_2(x)$, die wir durch unbestimmte Integration (zweimaliges partielles Integrieren) lösen (vgl. Aufgabe **480.**):

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = \int x^2 e^{-3x}\,dx = \ldots = \frac{-1}{3}\left(x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) e^{-3x}$$

(6) Mit den beiden Funktionen $C_1(x)$ und $C_2(x)$ können wir nun y_P bestimmen:

$$y_P = C_1(x) e^{2x} + C_2(x) e^{3x} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{-2x} e^{2x} - \frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) e^{-3x} e^{3x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) =$$

$$= \frac{x^2}{6} + \frac{5x}{18} + \frac{19}{108}$$

Nach dem Superpositionsprinzip lautet die allgemeine Lösung somit:

$$\mathbf{y = y_H + y_P = A_1 e^{2x} + A_2 e^{3x} + \frac{x^2}{6} + \frac{5x}{18} + \frac{19}{108}}$$

Dabei sind nun A_1 und A_2 natürlich echte Integrationsparameter. Probe vgl. Aufgabe **482.**

Je nachdem, welche Art von Störfunktion vorliegt, können wir also entsprechende Ansätze verwenden:

Ansatzregel:
Ist die Störfunktion s(x) ein Polynom (eine Exponentialfunktion, eine harmonische Funktion) dann lässt sich ein partikuläres Integral y_P ebenso als Polynom (Exponentialfunktion, harmonische Funktion) ansetzen.

Die Variation der Konstanten ist zwar meist erfolgreich, jedoch ist sie – wie das vorige Beispiel gezeigt hat – meist etwas langwierig. Das Beispiel hat aber auch ergeben, dass das partikuläre Integral y_P prinzipiell von der gleichen Bauart ist wie die Störfunktion. Beides sind quadratische Polynome. Dieser angenehme Zusammenhang gilt nicht nur in diesem einen speziellen Fall, sondern lässt sich verallgemeinern (was man durch allgemeine Anwendung der Variation der Konstanten zeigen kann). Dies kann man ausnützen, um auf wesentlich einfachere Weise zum jeweiligen partikulären Integral der vollständigen DG zu gelangen.

Im Einzelnen lauten die Ansatzregeln folgendermaßen:

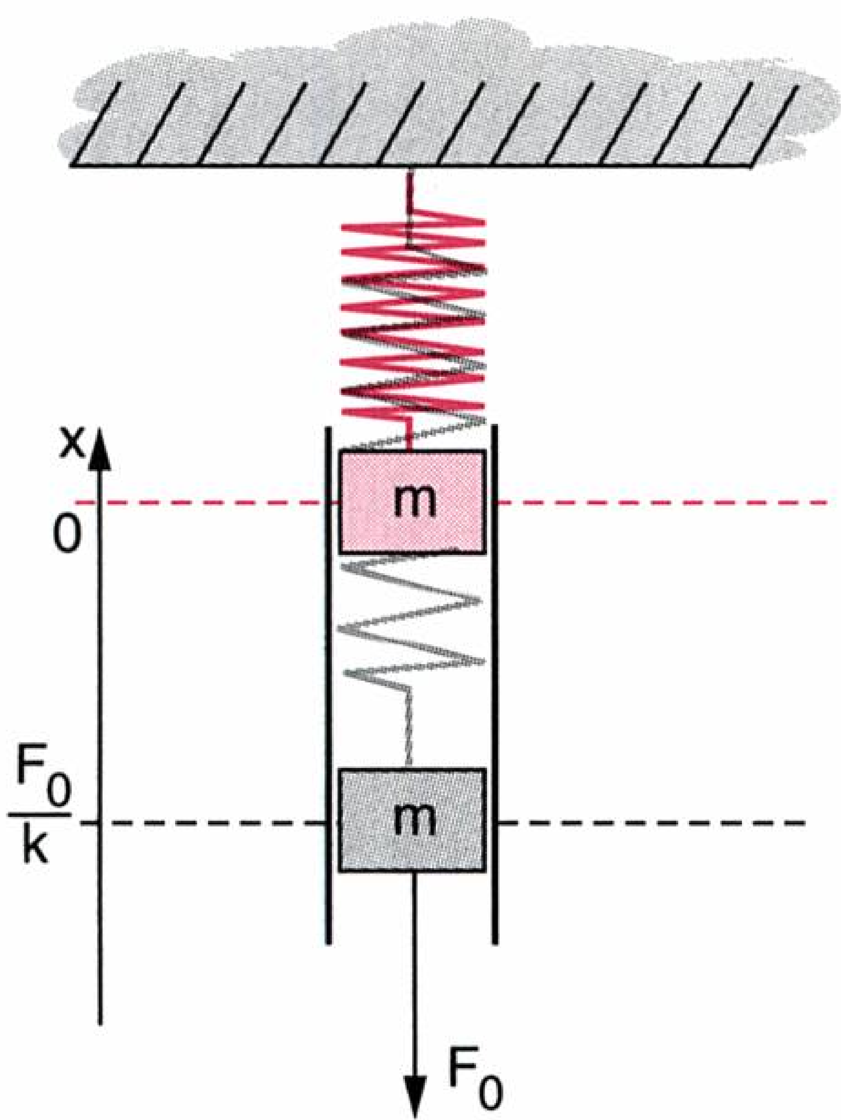
Polynomförmige Störfunktionen

Wie bereits erwähnt, vollführt ein Federpendel im Unterschied zum Fadenpendel seine Bewegungen auch im schwerelosen Raum. Genau genommen haben wir beim Aufstellen der homogenen DG diese Schwerelosigkeit angenommen, also die Gravitationskraft ignoriert.

Welche Auswirkungen eine konstante Kraft F_0 (wie etwa die Gravitationskraft $G = mg$) auf die Objektbewegungen $x(t)$ hat, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel:

Es ist das allgemeine Integral der DG $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=F_0$ zu bestimmen.



Lösung:

Auf Grund des Superpositionsgesetzes genügt es, ein partikuläres Integral der vollständigen DG zu finden. Wir werden uns die Sache so einfach wie nur möglich machen: Unter allen möglichen Polynomen für x_P ist jenes das einfachste, das nur aus einer Konstanten besteht. Dadurch verschwinden nämlich die Ableitungen $\dot{x}_P$ und $\ddot{x}_P$. Wir setzen also an:

$$x_P = C \Rightarrow \dot{x}_P = \ddot{x}_P \equiv 0$$

$$m\cdot 0 + r\cdot 0 + kC \equiv F_0$$

$$C = \frac{F_0}{k}$$

$$x_P = \frac{F_0}{k} \Rightarrow x = x_H + x_P = x_H + \frac{F_0}{k}$$

Egal, welcher Bewegungs-Fall durch die Systemkonstanten m, r und k der verkürzten DG auch verwirklicht ist, das Objekt wird bei seiner jeweiligen Bewegung nur vertikal um den Betrag $\frac{F_0}{k}$ verschoben:

Aperiodischer Kriechvorgang	Aperiodischer Grenzfall	Gedämpfte Schwingung
$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{F_0}{k}$	$x = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t} + \frac{F_0}{k}$	$x = Ae^{\delta t}\sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{k}$
x, 0, t, $\frac{F_0}{k}$, $\frac{F_0}{k}$	x, 0, t, $\frac{F_0}{k}$, $\frac{F_0}{k}$	x, 0, t, $\frac{F_0}{k}$, $\frac{F_0}{k}$

In Übereinstimmung mit unserer Vereinbarung auf Seite **178**, **nach oben** gerichtete Auslenkungen x des Federpendels **positiv** zu zählen, müssen folglich den **nach unten** gerichteten Kräften F_0 (also beispielsweise der Gewichtskraft) **negative** Zahlenwerte zugeordnet werden. Daher verschieben sich die Lösungskurven **nach unten**.

Wenn die Störfunktion ein Polynom ist, werden wir für das partikuläre Integral also einen Polynom-Ansatz versuchen:

- Ist die Störfunktion $s(x)$ der DG $ay'' + by' + cy = s(x)$ ein Polynom vom Grad n, so gibt es ein partikuläres Integral y_P, welches ein Polynom n-ten Grads ist.
- Ist der Koeffizient $c = 0$, ist ein Polynom $(n + 1)$-ten Grads zu verwenden.
- Ist zusätzlich der Koeffizient $b = 0$, dann genügt es, die DG zwei Mal zu integrieren (vgl. Aufgabe **483.**).

Auch für die anderen uns bekannten elementaren Funktionen gibt es bereits entsprechende einfache Ansätze:

Exponentielle Störfunktionen

Bei der Lösung der homogenen DG war der exponentielle Ansatz für das allgemeine Integral erfolgreich. Was geschieht nun, wenn das Störglied der inhomogenen DG selbst eine Exponentialfunktion ist? Auch hier gehen wir ähnlich vor: Wir setzen für y_P eine Exponentialfunktion an. Jedoch sind

beim allgemeinen Ansatz auch hier (wie bei den Polynomen) zwei Sonderfälle zu berücksichtigen:

- Ist die Störfunktion der DG $ay'' + by' + cy = s(x)$ von der Gestalt $s(x) = q \cdot e^{\mu x}$, so gibt es ein partikuläres Integral der Bauart $y_P = A \cdot e^{\mu x}$.
- Ist μ **eine** der beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung, so ändert sich der Ansatz auf $y_P = A \cdot xe^{\mu x}$.
- Sollte μ sogar die **Doppellösung** der charakteristischen Gleichung sein, so ist als partikuläres Integral $y_P = A \cdot x^2 e^{\mu x}$ anzusetzen (vgl Aufgabe **484.**).

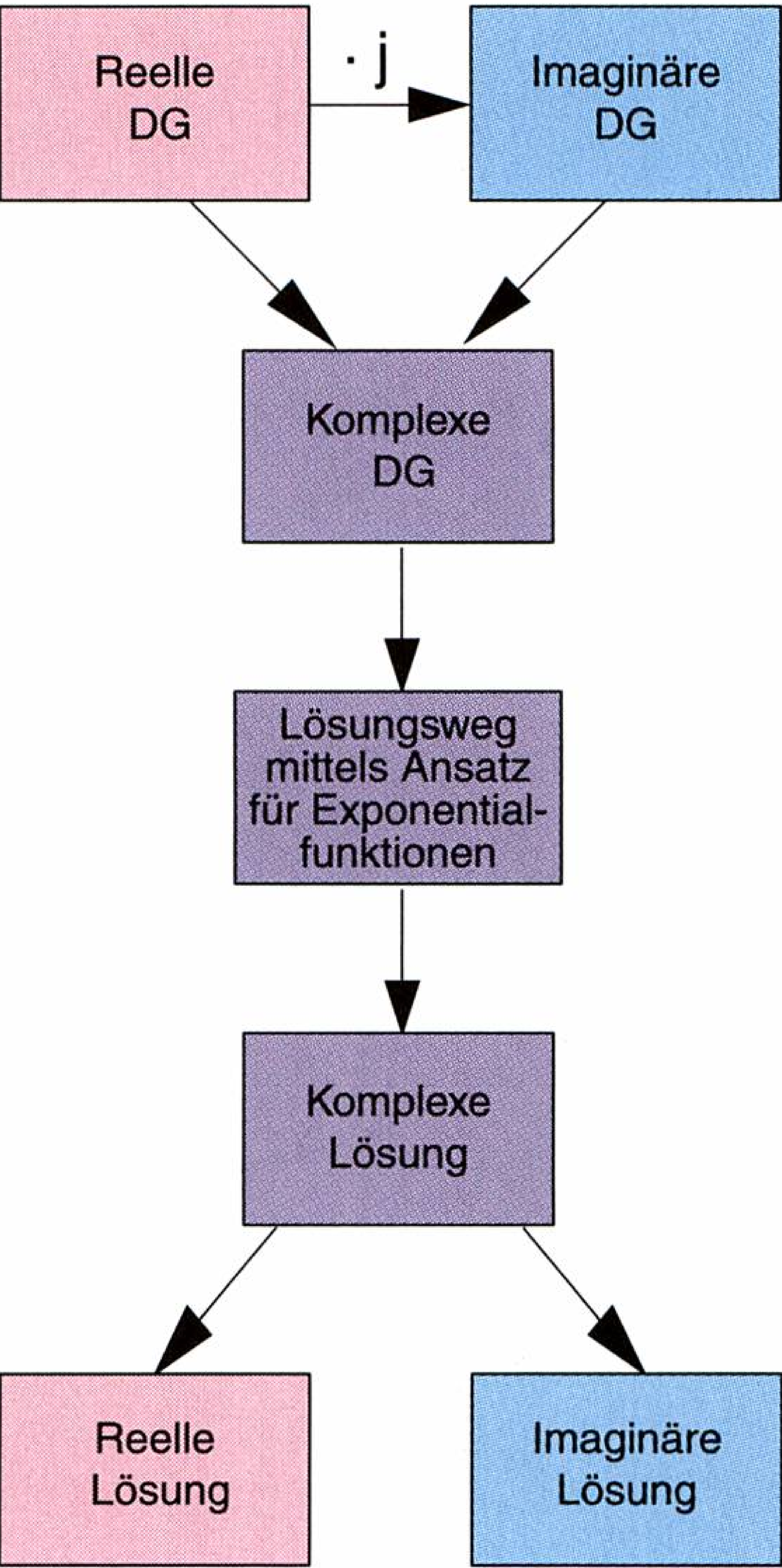
Periodische Funktionen

Bislang haben wir ausschließlich aperiodische Störfunktionen behandelt. Bei den Kräften, welche auf die Tacoma-Bridge einwirkten, handelte es sich jedoch um periodische Störfunktionen. Die „natürlichste" periodische Funktion, die wir kennen, ist die harmonische Funktion, also die Sinus- bzw. Cosinus-Funktion. Ein partikuläres Integral ist nach der folgenden Regel anzusetzen:

- Ist die Störfunktion der DG $ay'' + by' + cy = s(x)$ von der Gestalt $s(x) = d \cdot \sin nx$, so gibt es ein partikuläres Integral der Bauart $y_P = D \cdot \sin nx + E \cdot \cos nx$.
- Sind $\sin nx$ bzw. $\cos nx$ Lösungen der homogenen DG (gilt also $n = \omega$), so ändert sich der Ansatz auf $y_P = x(D \cdot \sin nx + E \cdot \cos nx)$.
- Der Ansatz bleibt für Störfunktionen der Bauaurt $s(x) = d \cdot \cos nx$ unverändert (vgl Aufgabe **485.**).

Anhand all der uns nun vorliegenden Ansatzregeln erkennen wir, wie sehr das partikuläre Integral jeweils mit der Störfunktion „verwandt" ist. Mit der Ansatzregel für harmonische Störfunktionen gelangt man zwar schneller zum Ergebnis als mit der weiter oben gezeigten Variation der Konstanten (vgl. Aufgabe **486.**). Aber wir können unsere Rechnung mit einer etwas anderen Methode noch weiter abkürzen. Diese soll nun wieder anhand unseres Federpendels exemplarisch vorgeführt werden.

Das ist der Plan für unseren Lösungsweg:



Unsere inhomogene DG für das Federpendel lautet also:

(1) $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = a \sin \omega_s t$

Diese DG besagt, dass unserem Federpendel eine sinusförmige Störkraft mit der Kreisfrequenz ω_s von außen aufgezwungen wird. Die allgemeine Lösung der DG verrät uns dann, wie das System mit dieser Fremdeinwirkung umgeht, wie das Federpendel auf diese „Herausforderung" antwortet.

Der eigentliche Clou des Lösungswegs besteht darin, dass wir für die rechte Gleichungsseite die EULERsche Formel – in leicht abgewandelter Form – verwenden:

$$\cos \omega_s t + j \sin \omega_s t = e^{j\omega_s t}$$

Um diese Beziehung anwenden zu können, multiplizieren wir unsere DG zunächst mit der imaginären Einheit „j", was an der Aussagekraft unserer ursprünglichen DG überhaupt nichts ändert, da es sich dabei nur um eine Konstante handelt,

(1) $jm\ddot{x} + jr\dot{x} + jkx = ja \sin \omega_s t$

addieren eine zweite recht ähnliche DG hinzu,

$$\left.\begin{array}{l} jm\ddot{x} + jr\dot{x} + jkx = ja \sin \omega_s t \\ m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = a \cos \omega_s t \end{array}\right\} +$$

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + kz = ae^{j\omega_s t} \qquad \text{mit } z = y + jx$$

sodass aus der harmonischen Störfunktion eine Exponentialfunktion wird.

Nun könnte man fragen, was denn diese zweite DG mit unserem Federpendel zu tun hat. Eigentlich gar nichts. Sie interessiert uns nicht, sie stört uns aber auch nicht. Aber sie vereinfacht immerhin unseren Lösungsweg. Am Ende der Rechnung werden wir sie vergessen und nur den Imaginärteil der erhaltenen Lösung verwenden. Um all jene zu beruhigen, die noch an der Seriosität dieser Vorgangsweise zweifeln, können wir unsere ursprüngliche DG (1) auch folgendermaßen anschreiben:

(1)' $\text{Im}(m\ddot{z}+r\dot{z}+kz)=\text{Im}\left(ae^{j\omega_s t}\right)$

Erstens ist diese DG mit unserer ursprünglichen DG identisch. Zweitens kündigt diese Schreibweise bereits den eigentlichen Schritt vom Reellen ins Komplexe an.

Unsere neue DG $m\ddot{z}+r\dot{z}+kz=ae^{j\omega_s t}$ ist ebenfalls inhomogen, besitzt nun aber eine exponentielle Störfunktion. Den entsprechenden Ansatz für reelle Exponentialfunktionen, den wir vorhin gelernt haben, dürfen wir sinngemäß auch für komplexe Exponentialfunktionen anwenden, um ein partikuläres Integral z_P zu erhalten:

$$z_P = De^{j\omega_s t}$$

Um den noch unbestimmten Parameter D des angesetzten partikulären Integrals zu ermitteln, müssen wir z_P zweimal ableiten und in die DG einsetzen. Bei der Ableitung von z_P behandeln wir die imaginäre Einheit „j“ wie eine ganz normale Konstante.

Die imaginäre Einheit
(Wiederholung):

$$j=\sqrt{-1}$$
$$j^2=-1$$

$$\dot{z}_P = j\omega_s De^{j\omega_s t}$$
$$\ddot{z}_P = j^2\omega_s^2 De^{j\omega_s t} = -\omega_s^2 De^{j\omega_s t}$$

$$m\ddot{z}_P + r\dot{z}_P + kz_P = ae^{j\omega_s t}$$
$$m(-\omega_s^2 De^{j\omega_s t}) + rj\omega_s De^{j\omega_s t} + kDe^{j\omega_s t} = ae^{j\omega_s t} \quad \Big| \div e^{j\omega_s t}$$
$$D(k-m\omega_s^2 + jr\omega_s) = a$$
$$D = \frac{a}{k-m\omega_s^2+jr\omega_s}$$

Wir erinnern uns an die Darstellung komplexer Zahlen und formen den Parameter D entsprechend den Formeln in der Außenspalte um:

Darstellung komplexer Zahlen
(Wiederholung):

$$z = A + jB = Re^{j\psi}$$
$$R = \sqrt{A^2+B^2}$$
$$\tan\psi = \tfrac{B}{A}$$

$$D = \frac{a}{k-m\omega_s^2+jr\omega_s} = \frac{a}{Re^{j\psi}} = \frac{a}{R}\cdot e^{-j\psi}$$

Dabei gilt:

$$R = \left|k-m\omega_s^2+jr\omega_s\right| = \sqrt{\left(k-m\omega_s^2\right)^2 + r^2\omega_s^2} = \sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega_s^2\right)^2 + r^2\omega_s^2}$$

$$\tan\psi = \frac{r\omega_s}{k-m\omega_s^2} = \frac{r\omega_s}{m\left(\omega_0^2-\omega_s^2\right)} \Leftrightarrow \psi = \arctan\left(\frac{r\omega_s}{m\left(\omega_0^2-\omega_s^2\right)}\right)$$

Damit haben wir ein partikuläres Integral z_P gefunden:

$$z_P = De^{j\omega_s t} = \tfrac{a}{R}\cdot e^{-j\psi}\cdot e^{j\omega_s t} = b\cdot e^{j(\omega_s t-\psi)} \text{ mit } b=\tfrac{a}{R}\in\mathbb{R}$$

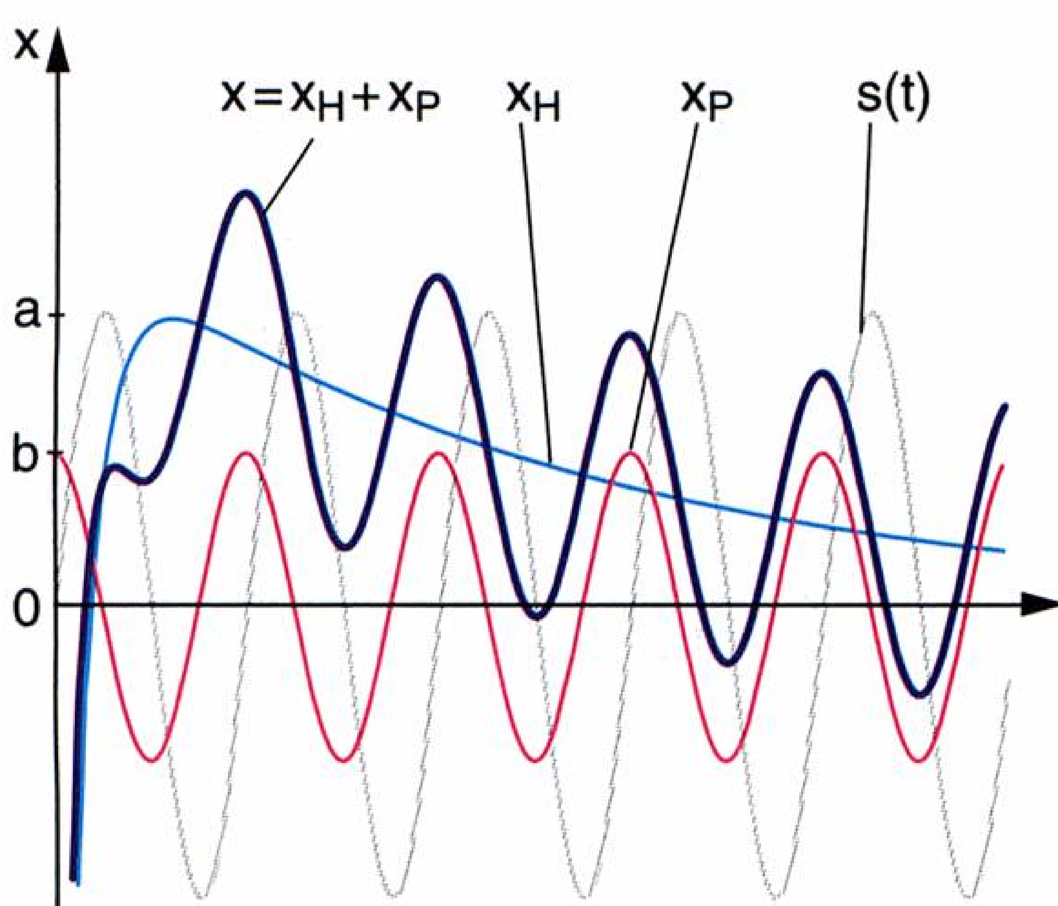
Uns interessiert daran aber nur – wie eingangs erwähnt – sein Imaginärteil x_P:

$$z_P = y_P + jx_P$$
$$\mathbf{x_P} = \text{Im}(z_P) = \text{Im}\left(b\cdot e^{j(\omega_s t-\psi)}\right) = b\cdot\text{Im}\left(e^{j(\omega_s t-\psi)}\right) =$$
$$= b\cdot\text{Im}(\cos(\omega_s t-\psi) + j\sin(\omega_s t-\psi)) = \mathbf{b\cdot\sin(\omega_s t-\psi)}$$

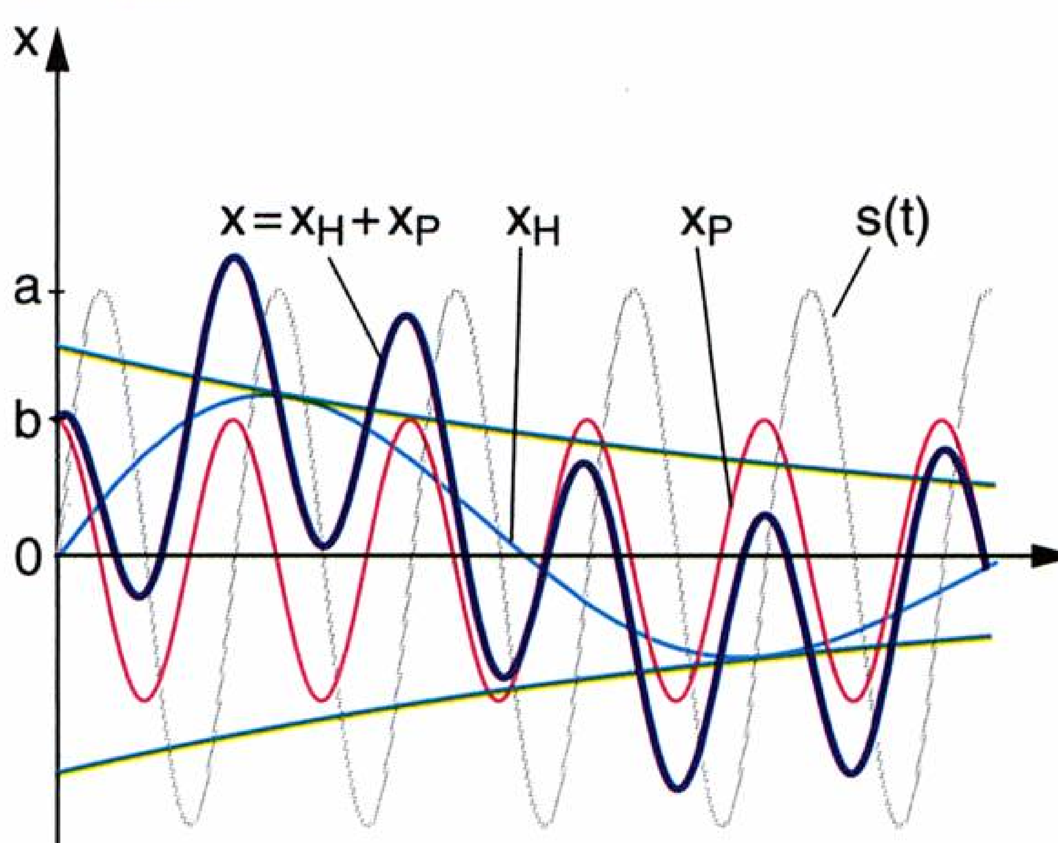
Einschwingvorgang und stationäre Schwingung:

Wird dem Federpendel eine sinusförmige Störkraft s(t) aufgezwungen, so "antwortet" das System daraufhin mit einer phasenverschobenen Schwingung. Die Eigendynamik des Pendels bewirkt, dass der stationären Schwingung x_P zu Beginn ein Einschwingvorgang x_H überlagert ist, der im Lauf der Zeit ($t \to \infty$) verschwindet. Dieser Einschwingvorgang x_H kann bekanntlich ein aperiodischer Kriechvorgang (1. und 2. Fall) oder eine gedämpfte Schwingung (3. Fall) sein:

1. und 2. Fall:



3. Fall:



Diese Funktion beschreibt eine sinusförmige Schwingung mit der Amplitude b. Ihre Kreisfrequenz ω_s ist zwar mit jener der Störfunktion $a \sin \omega_s t$ identisch, sie eilt ihr aber um den Phasenwinkel ψ nach.

Das System antwortet also auf die erzwungene harmonische Schwingung mit einer **gleichfrequenten**, aber **phasenverschobenen Schwingung**. Dieses Ergebnis hätten wir auf Grund unserer Ansatzregel für harmonische Störfunktionen bereits erwarten können.

Nach dem Superpositionsgesetz für lineare DGen gilt für die allgemeine Lösung der inhomogenen DG:

$$x = x_H + x_P = x_H + b \cdot \sin(\omega_s t - \psi)$$

Im vorigen Abschnitt haben wir ausführlich die drei Fälle (aperiodischer Kriechvorgang, aperiodischer Grenzfall, periodisch gedämpfte Schwingung) unterschieden, welche durch geeignete Wahl der Systemkonstanten m, r und k eintreten können.

So unterschiedlich sie auch waren, hatten sie doch eine gemeinsame Eigenschaft, nämlich:

$$\lim_{t \to \infty} x_H = 0$$

Das bedeutet für das allgemeine Integral $x = x_H + x_P$ der inhomogenen DG, dass der Beitrag von x_H immer kleiner wird. D. h. nach genügend langer Zeit ist also jeglicher **Einschwingvorgang** x_H abgeklungen und es bleibt lediglich die **stationäre** harmonische Schwingung x_P, hervorgerufen durch die dem System aufgezwungene Störfunktion s(t), übrig.

Wie verhält sich nun diese verbleibende stationäre Schwingung $x_P = b \cdot \sin(\omega_s t - \psi)$, wenn wir die Störfunktion $s(t) = a \cdot \sin \omega_s t$ variieren? Was können wir denn an der Störfunktion alles ändern? Sowohl die Amplitude a als auch die Kreisfrequenz ω_s. Durch eine Änderung der Amplitude a verändert sich die Amplitude b der stationären Schwingung x_P lediglich proportional. Die Phasennacheilung ψ ist davon überhaupt nicht betroffen. Der Einfluss des Parameters a ist also kaum interessant.

Wesentlich interessanter ist da schon der Einfluss, den die Kreisfrequenz ω_s der einwirkenden Kraft auf die Amplitude b von x_P und ihren Phasenwinkel ψ ausübt.

Phasengang

Zunächst kann leicht festgestellt werden, dass mit steigendem ω_s die Phasennacheilung $\psi = \arctan\left(\frac{r\omega_s}{m\left(\omega_0^2 - \omega_s^2\right)}\right)$ anwächst. Diese Tatsache ist anschaulich klar, wenn wir uns vor Augen führen, dass eine genügend langsame Schwingung jedem System ausreichend Zeit lässt, einigermaßen synchron mitzulaufen. Bei steigender Frequenz ω_s jedoch bewirkt die Trägheit des Systems eine zunehmende Asynchronität (vgl. Aufgabe **487**.).

Resonanzkurve

Dramatischer jedoch als die Phasennacheilung ist die Auswirkung auf die Amplitude $b = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega_s^2\right)^2 + r^2\omega_s^2}}$.

Wir betrachten nun die Amplitude b der erzwungenen Schwingung als Funktion der Störfrequenz ω_S, also $b = f(\omega_S)$, und ermitteln dann die speziellen Frequenzwerte ω_r, an denen ein **Resonanz**-Maximum b_r auftritt.

Das ist eine einfache Extremwertaufgabe, bei der wir bekanntlich die Variable b einmal nach der Variablen ω_S abzuleiten und die Ableitung Null zu setzen hätten.

Wir können unseren Rechenaufwand aber ein wenig verringern, indem wir überlegen: da b der Kehrwert einer Wurzel ist, wird b somit genau dann maximal, wenn der Nenner von b minimal wird. Und die Wurzel wird wiederum minimal, wenn es auch ihr sogenannter Radikand wird. Es genügt also, den Radikanden b* abzuleiten und anschließend Null zu setzen:

$$b^* = m^2\left(\omega_0^2 - \omega_S^2\right)^2 + r^2\omega_S^2$$

$$\frac{db^*}{d\omega_S} = m^2 \cdot 2\left(\omega_0^2 - \omega_S^2\right)(-2\omega_S) + 2r^2\omega_S \overset{!}{=} 0$$

$$0 = \omega_S\left(2m^2\left(\omega_0^2 - \omega_S^2\right) - r^2\right)$$

Da wir nur von Schwingung sprechen können, wenn die Kreisfrequenz $\omega_S > 0$ ist, können wir unseren Term vereinfachen:

$$2m^2\left(\omega_0^2 - \omega_S^2\right) - r^2 = 0$$

$$\omega_0^2 - \omega_S^2 = \frac{r^2}{2m^2} \qquad \left|\ \frac{r}{2m} = \delta\right.$$

$$\omega_r^2 := \omega_S^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{k}{m} - 2\cdot\frac{r^2}{4m^2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{r^2 < 2mk}$$

ω_r bezeichnet man als die **Resonanzfrequenz**. Falls die Störfunktion das Federpendel mit dieser Kreisfrequenz ω_r periodisch anregt und die Dämpfung r genügend klein ist ($r^2 < 2mk$), kommt es zu einer **Resonanzverstärkung** – das Pendel vollführt maximale Mitschwingungen. Das **Resonanz-Maximum b_r** erhält dann folgenden Wert:

$$b_r = \frac{a}{\sqrt{m^2\underbrace{\left(\omega_0^2-\omega_r^2\right)}_{2\delta^2}{}^2+r^2\omega_r^2}} = \frac{a}{\sqrt{m^2\left(2\delta^2\right)^2+r^2\left(\omega_0^2-2\delta^2\right)}} = \frac{a}{\sqrt{4\underbrace{\delta^2}_{\frac{r^2}{4m^2}}m^2\cdot\delta^2+r^2\left(\omega_0^2-2\delta^2\right)}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{r^2\delta^2+r^2\left(\omega_0^2-2\delta^2\right)}} = \frac{a}{\underbrace{r\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}_{\omega}} = \frac{a}{r\omega}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass es sich bei b_r tatsächlich um ein Maximum handelt (vgl. Aufgabe **488.**).
Im Laufe unserer bisherigen Untersuchungen haben wir damit drei verschiedene Kreisfrequenzen kennengelernt, die man zu unterscheiden hat:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ..... Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

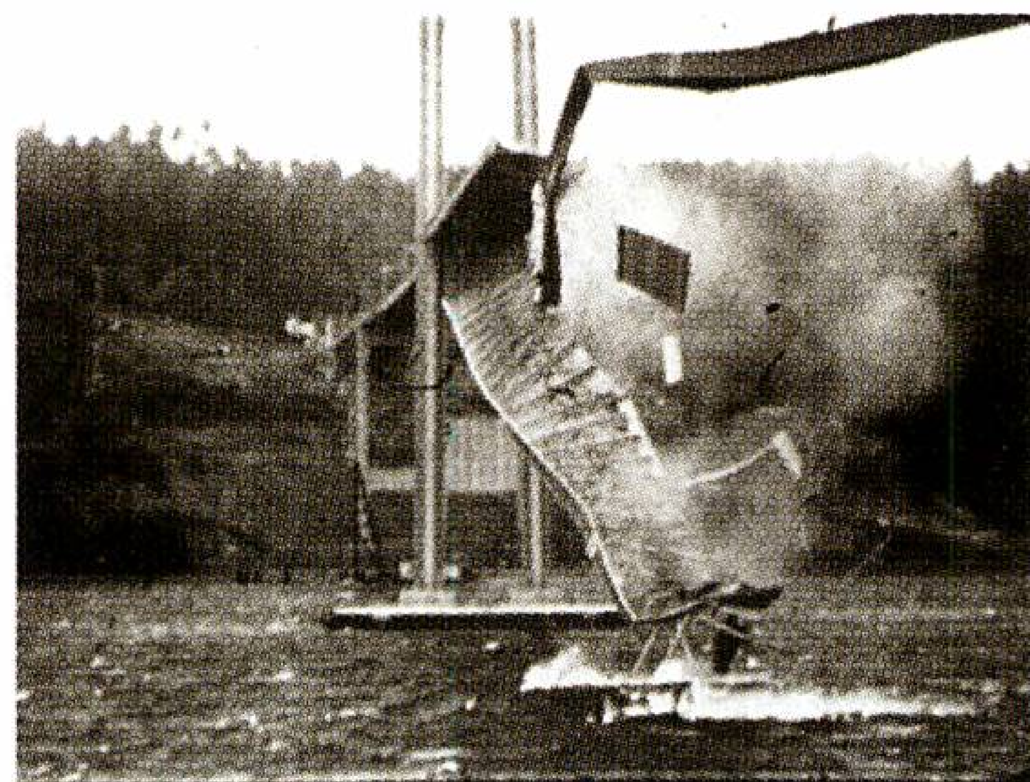
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$ ..... Eigenfrequenz des gedämpften Systems

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega$ ..... Resonanzfrequenz des gedämpften Systems

Resonanz

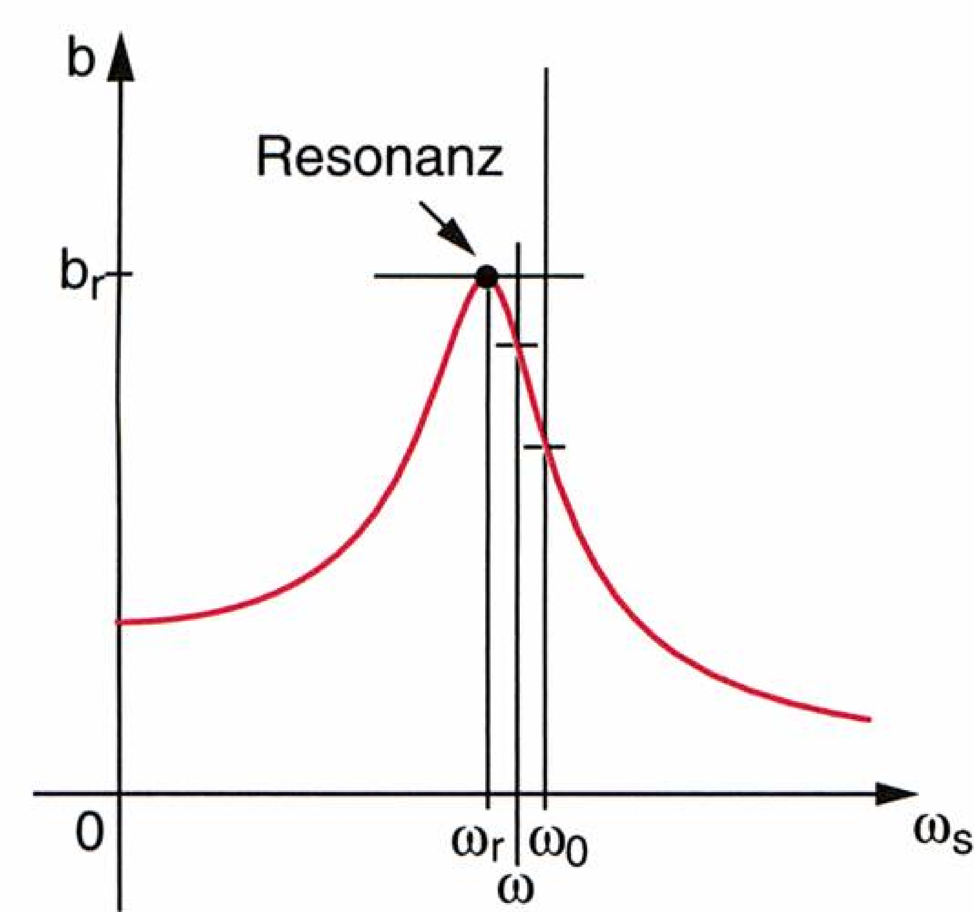
Um diese Auswirkungen zu verstehen, schildern wir, was mit der Tacoma-Narrows-Bridge – vier Monate nach ihrer Erbauung – geschehen ist.

Am 7. November 1940 wehte bereits um 7 Uhr morgens ein Sturm mit einer Windgeschwindigkeit von 55 bis 75 km/h. Der mittlere Brückenbogen der Tacoma Narrows Bridge begann aus diesem Grund bis zu 1,5 m hohe Wellen zu schlagen. Da die Schwingungen – etwa 38 pro Minute – unvermindert anhielten, wurde die Brücke ab 10 Uhr für den Verkehr gesperrt. Eine Verankerung brach, und die Brücke wurde durch Torsionswellen um über 45° nach links und rechts verdreht. Mit jeder Schwingung wurde die Schwingungsamplitude größer und erreichte schließlich einen Wert von etwa 8,5 m. Dies hielt etwa eine halbe Stunde lange an. Auf der Brücke befanden sich noch zwei Autos. Die drei Insassen konnten sich gerade noch rechtzeitig zum Brückenende durchkämpfen, welches sie verletzt, aber dennoch lebend erreichten. Wenige Minuten später, um etwa 10^{30} Uhr stürzte ein mittleres Fahrbahnstück in die Tiefe (vgl. Foto). Die Fahrbahn zerbarst, und ihre Betonbrocken regneten in den Fluss. Die Tragseile rissen und das in der Mitte noch frei pendelnde Teilstück brach heraus. Kurz danach stürzte auch der Rest der Brücke ein.[1)]



---

1) Videosequenzen der berstenden Tacoma-Narrows-Bridge: http://www.pbs.org/wgbh/nova/bridge/meetsusp.html



Wie leicht zu erkennen ist, gilt: $\omega_r < \omega < \omega_0$. Was bedeutet das? Wie wir in der obigen Extremwertaufgabe errechnet haben, gerät unser Pendel bei $\omega_s = \omega_r$ in Resonanz, d. h. die Schwingungsamplitude erreicht dort ihr (lokales) Maximum. Fällt die Erregerfrequenz ω_s mit der etwas größeren Eigenfrequenz ω des gedämpften Pendels zusammen, so ist die Schwingungsamplitude bereits etwas kleiner. Wird das Pendel gar mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems angeregt, ist die Schwingungsamplitude noch etwas kleiner. Dieser Sachverhalt wurde im nebenstehenden Schaubild festgehalten. Es zeigt, dass die landläufige Meinung „Resonanz entsteht immer, wenn die Erregerfrequenz ω_s mit ω_0 zusammenfällt" falsch ist. Sie gilt nur im Spezialfall ungedämpfter Systeme.

In diesem Zusammenhang spielt nämlich die Dämpfung r eine sehr große Rolle. Erinnern wir uns an die Diskussion der freien, ungestörten Einschwingvorgänge des Federpendels. Die Bedingung $r^2 = 4mk$ war dabei das Kriterium, das zwischen aperiodischer ($r^2 > 4mk$) und periodischer Bewegung ($r^2 < 4mk$) des gedämpften, aber freien Systems entschied. Da nun aber $r^2 < 2mk$ die Bedingung für das Auftreten der Resonanz ist, können wir schließen, dass Resonanz nur bei einem schwingungsfähigen System (3. Fall) auftreten kann. Dort aber auch nur, wenn die Dämpfung r eben genügend klein ist.

Wie sich die Schwingungsamplitude $b = f(\omega_s)$ des Federpendels mit der Dämpfung r als Parameter verhält, lässt sich anhand der **Resonanzkurven** darstellen:

Beispiel:

Unserem Federpendel ($m = 1$ kg, $k = 4$ N/m) wird nun eine sinusförmigen Störkraft $s(t) = a \cdot \sin \omega_s t$ aufgeprägt. Die Amplitude a dieser Störkraft betrage konstant 1N. Die Störfrequenz ω_s wird hingegen variiert. Es ist der Verlauf der Amplitude $b = f(\omega_s)$ der resultierenden stationären Schwingung für jeweils drei Dämpfungswerte (1) $r_1 = 1$ Ns/m (2) $r_2 = 0{,}5$ Ns/m (3) $r_3 = 0{,}2$ Ns/m grafisch darzustellen.

Lösung:

Zunächst berechnen wir die Eigenkreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung: $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 4$, $(\omega_0 = 2)$

Die Schwingungsamplitude $b = f(\omega_s)$ enthält dann neben der unabhängigen Variablen ω_s den Parameter r:

$$b = \frac{a}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + r^2\omega_s^2}} = \frac{1}{\sqrt{(4 - \omega_s^2)^2 + r^2\omega_s^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_s^4 - (8 - r^2)\omega_s^2 + 16}}$$

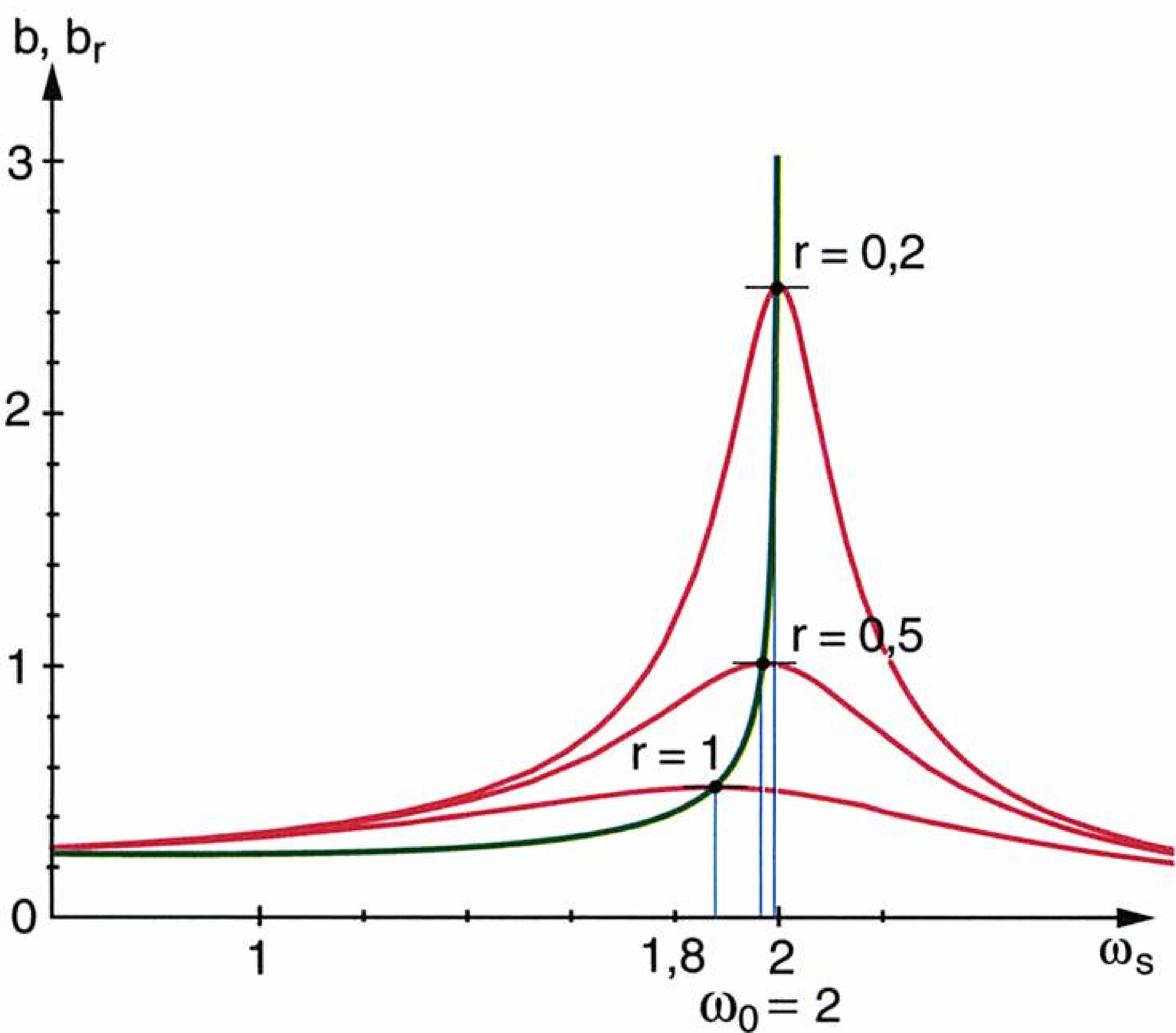
Auf Grund der vorangegangenen Überlegungen können wir die Resonanzfrequenz ω_r in Abhängigkeit des Parameters r sofort angeben: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{4 - \frac{r^2}{2}}$

Ebenso kennen wir das Resonanz-Maximum:

$$b_r = \frac{a}{r\omega} = \frac{a}{r\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{1}{r\sqrt{4 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}} = \frac{2}{r\sqrt{16 - r^2}}$$

Mit Hilfe dieser Formeln fertigen wir eine Tabelle mit den wichtigsten Ergebnissen an:

	r	ω_r	b_r
(1)	1	1,87	0,52
(2)	0,5	1,995	1,02
(3)	0,2	1,999	2,50



Anhand der drei Resonanzkurven erkennt man, dass mit abnehmender Dämpfung r das Resonanz-Maximum steigt und sich gleichzeitig dabei immer näher an $\omega_0 = 2$ heranschiebt.

Die Grenze, ab der im vorigen Beispiel überhaupt Resonanz und somit ein Resonanz-Maximum entstehen kann, liegt bei $r = \sqrt{2}$. Aber erst bei extrem schwacher Dämpfung rücken die drei Frequenzen ω_r, ω, und ω_0 eng aneinander und es tritt die sogenannte **Resonanzkatastrophe**[1] ein. In diesem Fall wächst die Amplitude $b_r = \frac{a}{r\omega}$ zu gewaltiger Größe an. Im allerdings nur theoretisch möglichen Fall, dass die Dämpfung r völlig verschwindet, wird die Schwingungsamplitude sogar unendlich groß (vgl. Aufgabe **489.**).

Eine Resonanzkatastrophe bedeutet in der Praxis meist die Zerstörung des schwingungsfähigen Systems, wie eben zum Beispiel die Tacoma-Brücke. Ein wesentlicher Grund für ihren Einsturz war, dass mögliche Oszillationen im Bereich der Resonanzfrequenz durch kontruktive Maßnahmen kaum abgedämpft waren.

Als die außerordentlichen Schwingungen der Tacoma Narrows Bridge begannen, wurde Professor F. B. Farquharson von der Universität Washington herbeigerufen, welcher die Brücke zuvor eingehend untersucht hatte. Nur diesem Umstand ist es zu verdanken, dass ihr darauffolgender Einsturz auf Fotos und Filmen gründlich dokumentiert werden konnte.

Dieses Dokumentationsmaterial wurde dann zur Grundlage für Studien, welche die Ursache des Brückenunglücks klären konnten. Sie offenbarten den Konstrukteuren ihren gravierenden Planungsfehler: Die Windströmungen hätten bewirkt, dass die Brücke zufälligerweise gerade im Bereich ihrer Resonanzfrequenz periodisch angeregt worden wäre und sich eine Resonanzkatastrophe ereignet hätte. Der Hauptgedanke der Konstrukteure lag ja ursprünglich darin, hauptsächlich eine möglichst lange, schmale und elegant wirkende Hängebrücke zu entwerfen. Es wurden aber keinerlei konstruktive Vorkehrungen getroffen, mögliche Schwingungen im Resonanzbereich abzudämpfen, da man aerodynamische Phänomene bei Brücken bis dahin nicht kannte.

Die Brücke ist einige Jahre später durch eine andere Hängebrücke mit den gleichen Spannweiten ersetzt worden — aus den Fehlern der Vergangenheit hat man allerdings gelernt ...[2]

---

[1]) Resonanz und Resonanzkatastrophe:
http://www.walter-fendt.de/ph14d/

[2]) Bilder und Beschreibungen der Tacoma_Narrows_Bridge:
http://www.bernd-nebel.de/bruecken/4_desaster/tacoma/tacoma.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge
http://bridgepros.com/projects/TacomaNarrows/TacomaNarrows.htm
http://oldsite.vislab.usyd.edu.au/photonics/fibres/fibre/tacoma0.html
http://www.ketchum.org/bridgecollapse.html
http://abel.math.harvard.edu/archive/21b_fall_03/tacoma/

AUFGABEN

477. Die DG $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=0$ war genau genommen auf ein Federpendel im **gravitationsfreien Raum** zugeschnitten. Wie lautet die DG des Federpendels, wenn nun auch die Schwerkraft berücksichtigt werden soll?

478. Lösen Sie die DG $y''+3y'+2y=2x+1$

479. Lösen Sie die DG $3y''+2y'+y=5x+1$

480. Bei der Lösung der DG $y''-5y'+6y=x^2$ mittels Variation der Konstanten musste für die Funktion auf Seite **192** zweimal partiell integriert werden. Lösen Sie die zugehörige DG $C_2{}'=x^2e^{-3x}$.

Lösen Sie die folgenden DGen:

481. **a)** $3y''+2y'-y=3x^2+2x+1$ **b)** $y''-6y'+8y=\frac{e^{3x}}{1+e^x}$ **c)** $y''+4y'+8y=xe^{-2x}$

482. Führen Sie die Probe für die DG $y''-5y'+6y=x^2$ durch (vgl. Seite **192**).

a) Zeigen Sie, dass $y_H=A_1e^{2x}+A_2e^{3x}$ die verkürzte DG erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass $y_P=\frac{x^2}{6}+\frac{5x}{18}+\frac{19}{108}$ die vollständige DG erfüllt.

c) Begründen Sie, warum y_H+y_P die vollständige DG erfüllt.

483. Es ist zu beweisen:

a) Ist die Störfunktion $s(x)$ der DG $ay''+by'+cy=s(x)$ ein Polynom vom Grad n, so gibt es ein partikuläres Integral y_P, welches ein Polynom n-ten Grads ist.

b) Ist der Koeffizient $c=0$, ist ein Polynom $(n+1)$-ten Grads zu verwenden.

c) Ist zusätzlich der Koeffizient $b=0$, dann genügt es, die DG 2-mal zu integrieren.

484. Es ist zu beweisen:

a) Ist die Störfunktion der DG $ay''+by'+cy=s(x)$ von der Gestalt $s(x)=q\cdot e^{\mu x}$, so gibt es ein partikuläres Integral der Bauart $y_P=A\cdot e^{\mu x}$.

b) Ist μ **eine** der beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung, so ändert sich der Ansatz auf $y_P=A\cdot xe^{\mu x}$.

c) Sollte μ sogar die **Doppellösung** der charakteristischen Gleichung sein, so ist als partikuläres Integral $y_P=A\cdot x^2e^{\mu x}$ anzusetzen.

485. Es ist zu beweisen:

a) Ist die Störfunktion der DG $ay''+by'+cy=s(x)$ von der Gestalt $s(x)=d\cdot\sin nx$, so gibt es ein partikuläres Integral der Bauart $y_P=D\cdot\sin nx+E\cdot\cos nx$.

b) Sind sin nx bzw. cos nx Lösungen der homogenen DG (gilt also $n=\omega$), so ändert sich der Ansatz auf $y_P=x(D\cdot\sin nx+E\cdot\cos nx)$.

c) Der Ansatz bleibt für Störfunktionen der Bauart $s(x)=d\cdot\cos nx$ unverändert.

486. Bestimmen Sie zur DG $m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=a\cdot\sin\omega_s t$ ein partikuläres Integral x_P mit Hilfe des Ansatzes: $x_P=b\cdot\sin(\omega_s t-\psi)$. Zeigen Sie, dass die Amplitude b und die Phasennacheilung ψ mit denen auf den Seiten **195** ermittelten Funktionen $b(\omega_s)$ und $\psi(\omega_s)$ übereinstimmen.

487. Die Funktion $\psi=\arctan\left(\frac{r\omega_s}{m(\omega_0{}^2-\omega_s{}^2)}\right)$ für die Phasennacheilung der erzwungenen Schwingung ist zu diskutieren. Damit ist zu zeigen, dass bei steigender Frequenz ω_s die Phasennacheilung zunimmt.

488. Zeigen Sie, dass der Extremwert $b_r=\frac{a}{r\omega}$ bei der Resonanzfrequenz $\omega_s=\omega_r$ tatsächlich ein Maximum ist.

489. Es ist zu zeigen, dass bei Wegfall der Dämpfung r die Schwingungsamplitude im Resonanzfall unendlich groß wird.

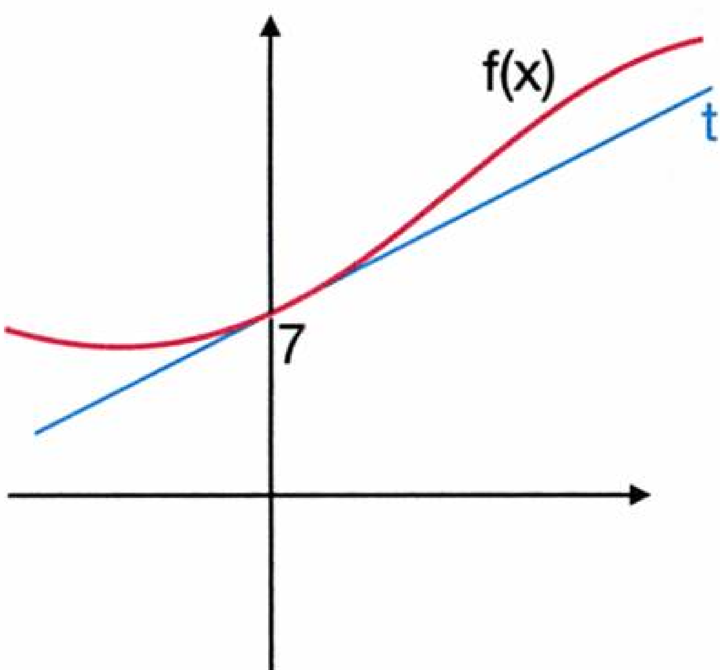
FUNKTIONENREIHEN

1. Potenzreihen

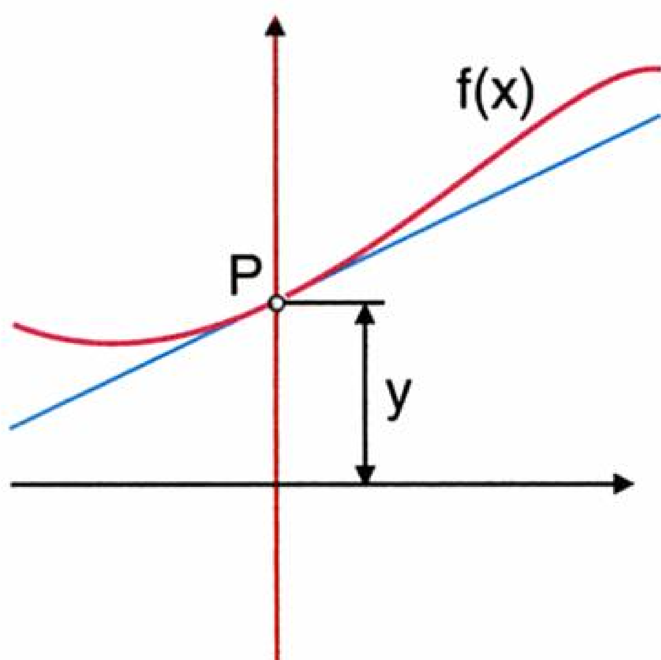
1.1 Lineare und quadratische Näherung

Beispiel:
In nebenstehender Figur ist eine Funktion dargestellt; die Tangente im Punkt $P(0, y_P)$ lautet $y = \frac{1}{2}x + 7$. Wie groß sind Funktionswert y und 1. Ableitung an dieser Stelle?

Lösung:
$y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 7 = 7 \Rightarrow \mathbf{P(0, 7)}$ $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{f'(0) = \frac{1}{2}}$



Es geht nun also darum, Funktionen, die rechentechnisch schwierig handzuhaben sind, an einer Stelle durch eine möglichst einfache Funktion derart zu ersetzen, dass diese Ersatzfunktion in einer nahen Umgebung dieser Stelle der Funktion möglichst „gleich" ist, d. h. die Differenz der Funktionswerte und der Näherungswerte sollen minimal werden (vgl. nebenstehende Figur).
Die Tangente ist, wie wir von früher wissen, meist nur eine sehr schlechte Näherung, weil sie oft schon in geringer Entfernung vom Tangentialpunkt erheblich anders verläuft als die Funktion. Es liegt daher nahe, nach einer besseren Näherung zu suchen. Die Tangente stimmt im Tangentialpunkt mit der Funktion in Funktionswert und erster Ableitung überein. Die sogenannte **quadratische Näherung**[1] stimmt mit der Funktion auch in der zweiten Ableitung (an dieser Stelle) überein. Fassen wir zusammen:



Die quadratische Näherung und die Funktion haben im Punkt, in dem die Parabel ermittelt wurde, den selben Krümmungskreis. Warum das so ist, wird in Aufgabe **495.** gezeigt.

Geg.: $f(x)$, $P(0, y_P)$ (1) Tangente: $y = f(0) + f'(0)x$

Ges.: Näherung in P (2) Schmiegeparabel: $y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$

Zur Herleitung der zweiten Formel vgl. Aufgabe **494**.

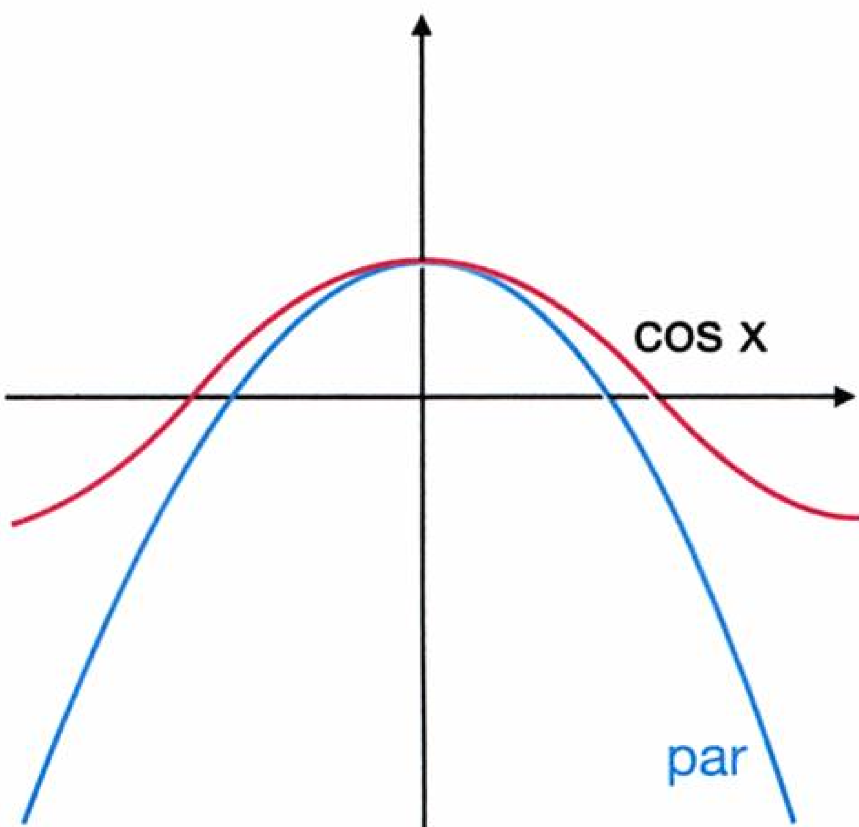
Beispiel:
Im Punkt $P(0, y_P)$ von **a)** $f(x) = \cos x$ **b)** $f(x) = \sin x$ sind die Tangenten und die Schmiegeparabeln zu ermitteln.

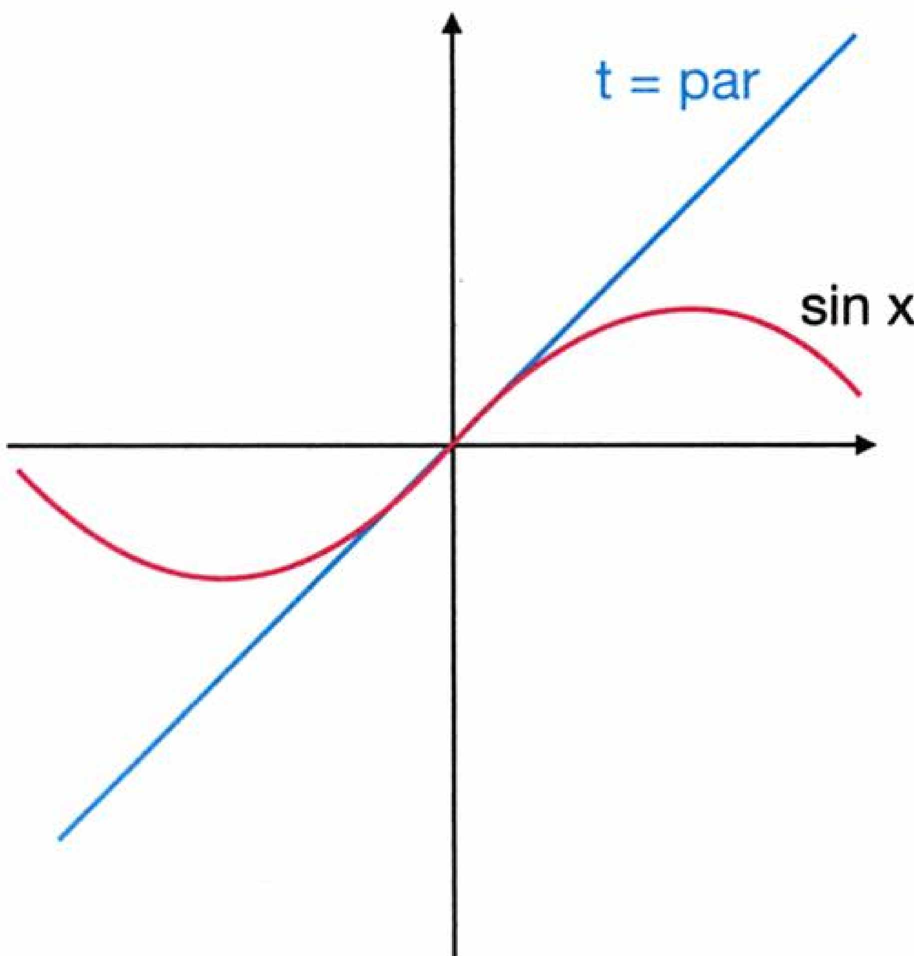
Lösung:

a) $f(x) = \cos x$ $f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$ $f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$ $f''(0) = -1$
$\Rightarrow$ Tangente: $y = f(0) + f'(0)x = x$ $\quad$ $\mathbf{y = 1}$
Parabel: $y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$ $\quad$ $\mathbf{y = 1 - \frac{x^2}{2}}$

b) $f(x) = \sin x$ $f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$ $f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$ $f''(0) = 0$
$\Rightarrow$ Tangente: $y = f(0) + f'(0)x = x$ $\quad$ $\mathbf{y = x}$
Parabel: $y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x$ $\quad$ $\mathbf{y = x}$

Bemerkung: Da die zweite Ableitung an der Stelle x = 0 verschwindet, degeneriert die Schmiegeparabel zur Geraden und ist so mit der Tangente identisch.





[1]) Der Graph der quadratischen Näherung heißt **Schmiegeparabel**.

AUFGABEN

Für folgende Funktionen ist die lineare und die quadratische Näherung im Punkt P (0, y_P) gesucht.

490. a) $y=-\sin x$ **b)** $y=\sin 3x$ **c)** $y=\cos^2 x$ **d)** $y=\tan x$

491. a) $y=\frac{1}{x+1}$ **b)** $y=\frac{1}{x-1}$ **c)** $y=\frac{1}{\cos x}$ **d)** $y=(1+x)^n$

492. a) $y=\ln(x+1)$ **b)** $y=\sqrt{x+1}$ **c)** $y=\sqrt[3]{x+2}$ **d)** $y=e^x$

493. a) $x=e^{-2x}$ **b)** $y=e^x \sin x$ **c)** $y=\sinh x$ **d)** $y=\cosh\frac{x}{3}$

494. Es ist die Formel für die quadratische Näherung $y=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$ der Funktion f (x) im Punkt P(0, y_P) herzuleiten.

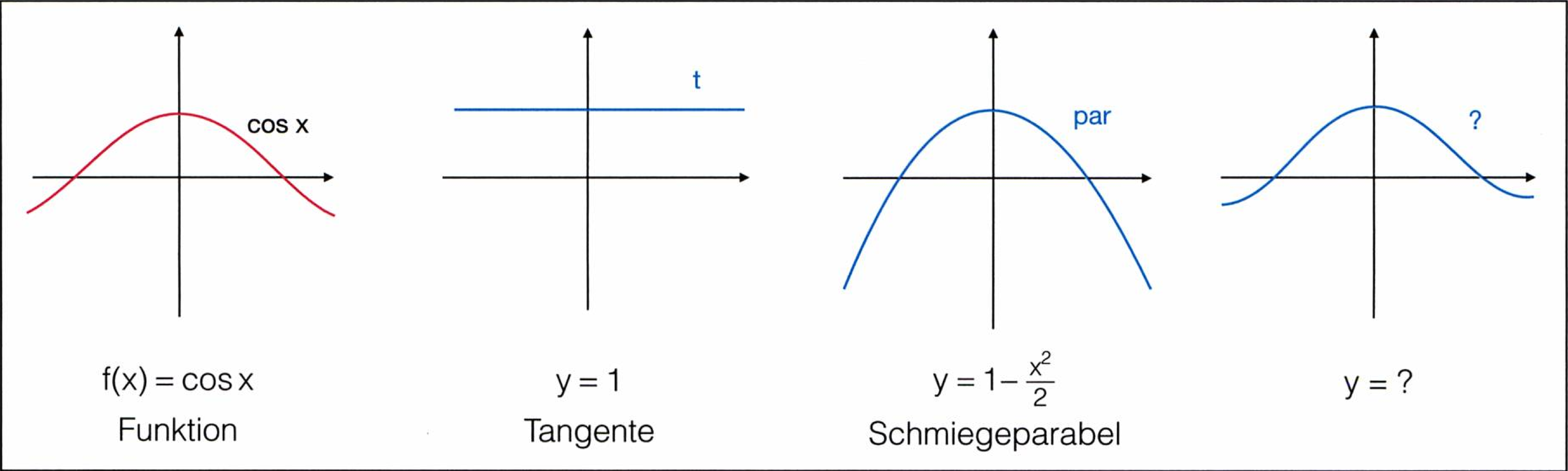
Anleitung: $y=ax^2+bx+c$, $y(0)=f(0)$, $y'(0)=f'(0)$, $y''(0)=f''(0)$, Lösen des linearen Gleichungssystems ...

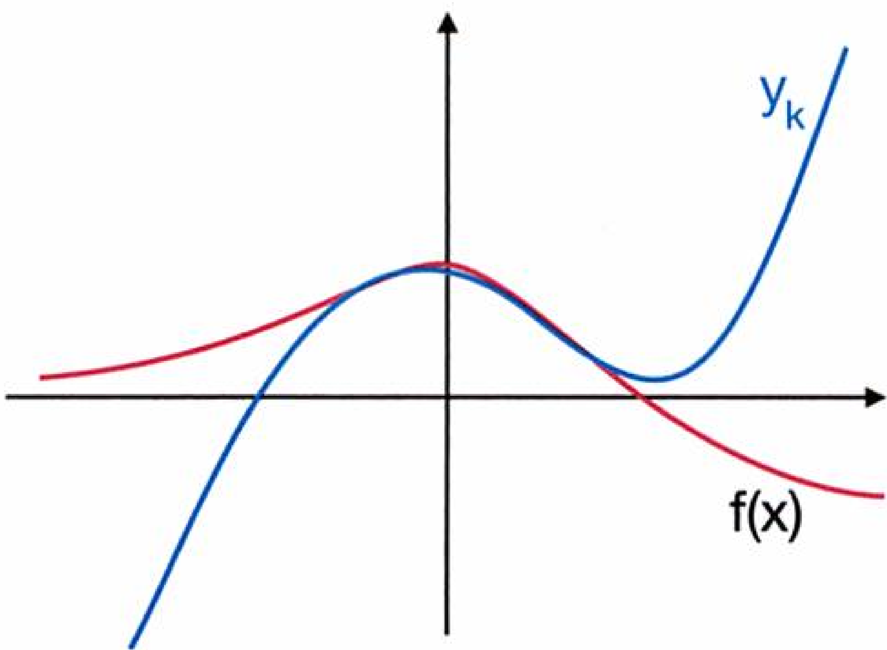
495. Es ist zu zeigen, dass der Krümmungskreis einer Funktion an einer Stelle mit der quadratischen Näherung an dieser Stelle übereinstimmt.

Anleitung: In der Formel für die Krümmung bzw. den Krümmungskreismittelpunkt kommen nur x, y, y' und y'' vor ...

1.2 Verbesserung der Näherungsfunktion

Wenn man sich das Ergebnis vom Beispiel des vorigen Abschnitts vergegenwärtigt (vgl. nachstehende Figuren), könnte man vermuten, dass bei Fortsetzung dieser Methode eine immer bessere Näherung an die Kurve entsteht:





Der Graph der kubischen Näherung heißt **Schmiegeparabel 3. Ordnung**.

Nur was soll „Fortsetzung dieser Methode" bedeuten? Die Einführung der sogenannten **kubischen Näherung** ist eine Fortsetzung in dem Sinn, dass die Ersatz- bzw. Näherungsfunktion wieder ein Polynom ist, jedoch im Gegensatz zur linearen und quadratischen Näherung auch in der dritten Ableitung mit der Funktion übereinstimmt.

Die kubische Näherung wird mit folgender Formel ermittelt (vgl. Aufgabe **496.**)

$$y=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3$$

Im folgenden Beispiel wird für die Exponentialfunktion eine derartige kubische Näherung berechnet.

Beispiel:

Die kubische Näherung der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 0$ ist zu ermitteln.

Lösung:

$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = 1$

$$y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

1

1

AUFGABEN

496. $y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$

Die Formel für die kubische Näherung ist analog zu Aufgabe **494.** herzuleiten.

497. **a)** Lineare, quadratische und kubische Näherung der Funktion $y = \ln(x+1)$ im Punkt P $(0, y_P)$?

b) Für welches Intervall [a, b] sind die Fehler (in Prozent) $\Delta y = \left|\frac{f(x)-y}{f(x)}\right|$ kleiner als 10 %?

Anleitung: Es ist eine Wertetabelle in x-Schritten von 0,1 im Intervall [–1, 1] zu erstellen:

x	f(x)	y_1	Δy_1	y_{qu}	Δy_{qu}	y_k	Δy_k
–1	·	·					
– 0,9	·	·					
⋮							

1.3 Konvergenz

Naheliegend wäre es, die Näherung dadurch weiter zu verbessern, dass man nicht nur Übereinstimmung zwischen Funktion und Näherung in der ersten, zweiten und dritten Ableitung (vgl. Aufgabe **496.**) fordert, sondern auch in der vierten, fünften, sechsten ..., d. h.:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 \ldots$$

$f^{(n)}(0)$ bedeutet die n-te Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle $x = 0$ und **nicht** die n-te Potenz.

Gilt nun tatsächlich $f(x) = y$? Wird die Näherung wirklich „unendlich gut"? Dazu müssen wir uns zuerst fragen, ob diese **unendliche Reihe** überhaupt eine „Summe" hat.

Rein formal ist eine **unendliche Reihe** ein Ausdruck der Form $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots$, wobei die Punkte andeuten sollen, dass der Ausdruck niemals abbricht. Was fangen wir damit an? Wir fragen nach dem Summenwert S, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\} = ?$$

Das Wort Reihe leitet sich von dem althochdeutschen Wort rihan ab, welches „auf einen Faden ziehen" bedeutet. Vom gleichen Wort stammen: Reif, Ritze reißen. Der Begriff **Reihe** als mathematische Struktur findet sich hingegen erst seit dem 18. Jahrhundert im deutschen Sprachgebrauch.

Sicher ist, dass man nicht unendliche viele Zahlen addieren kann. Auch wird man mit formal gebildeten unendlichen Summen nicht wie mit gewöhnlichen Summen rechnen können. Denn betrachten wir etwa die unendliche Reihe 1−1+1−1+1−... so wären — wenn man mit dieser Reihe wie mit einer gewöhnlichen Summe rechnet — folgende Möglichkeiten der Klammersetzung denkbar:

(1) $1-1+1-1+1-\ldots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$
$=0+0+0+\ldots \quad S=0$

(2) $1-1+1-1+1-\ldots=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots$
$=1-0-0-0-\ldots \quad S=1???$

Definition:

Eine **unendiche Reihe**

$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots$ heißt genau dann **konvergent**, wenn ihre **Partialsummenfolge** $\langle s_n\rangle$ konvergiert.

Den Grenzwert S der Partialsummenfolge bezeichnet man als **Summe der Reihe**.

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n$$

Divergiert dagegen die Folge der Partialsummen $\langle s_n\rangle$ der gegebenen Reihe, so heißt diese **divergent**. Sie hat keine Summe.

Bevor wir also versuchen, eine Summenformel herzuleiten bzw. zu untersuchen, ob eine solche überhaupt existiert, müssen wir klären, was wir als **Summe einer unendlichen Reihe** verstehen wollen, d. h. wie sie definiert ist.

Dazu bilden wir aus den Gliedern $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ der Reihe die Folge $\langle s_n\rangle$ ihrer Teilsummen oder Partialsummen:

$s_1=a_1$

$s_2=a_1+a_2$

$s_3=a_1+a_2+a_3$

....

$s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n$

....

Wenn die Partialsummenfolge konvergiert, d. h. einen Grenzwert S hat, sagt mann: Die Reihe konvergiert und hat die Summe S. Der Grenzwert S wird also dieser Reihe als Summenwert zugeschrieben. Durch diese Vorgangsweise können wir alle für **Folgen** bewiesenen Sätze übernehmen. Schließlich haben wir ja die **Konvergenz von Reihen** auf die **Konvergenz von Folgen** zurückgeführt. (Neue Probleme auf bereits gelöste zurückzuführen, ist ein bewährtes Erfolgsrezept in der Mathematik!) Zum besseren Verständnis folgendes Beispiel:

Beispiel:
Es ist die Konvergenz der Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)=1+3+5+7+9+\ldots$ und

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ zu untersuchen und gegebenenfalls die Summe zu ermitteln.

Lösung:

a) $s_1=1$

$s_2=1+3=4$

$s_3=1+3+5=9$

$s_4=1+3+5+7=16$

....

$s_n=1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$

Somit ist die Reihe divergent.

b) Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $b_1=\frac{1}{2}$ und $q=\frac{1}{2}$. Damit finden wir

$$s_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2^n}$$

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

Somit ist die Reihe konvergent und hat die Summe 1. Die Konvergenz dieser Reihe ist natürlich auch wegen $|q|<1$ gegeben.

Um uns zu überzeugen, dass nicht alle unendlichen Reihen so leicht[1] handzuhaben sind, betrachten wir folgende Zusammenstellung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 1+4+\frac{9}{2}+\frac{8}{3}+\ldots$$

Welche von ihnen mag wohl konvergent sein?

Definition:

Eine Reihe, bei der die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, heißt **alternierende Reihe**.

Definition:

Eine konvergente alternierende Reihe, bei der auch die Reihe der Absolutbeträge konvergiert, heißt **absolut konvergent**, andernfalls **bedingt konvergent**. So ist z. B. die Reihe $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+\frac{1}{25}-\ldots$ absolut konvergent, da die Reihe $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{25}-\ldots$ konvergiert, die Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$ jedoch nur bedingt konvergent, da die zugehörige Reihe der Absolutbeträge $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$ keine Summe hat (also divergiert).

Wir sehen schon, dass für die Klärung dieser Frage eine gehörige Portion Gehirnschmalz notwendig sein wird, bedarf es doch eines völlig neuen mathematischen Handwerkszeugs: den sogenannten **Konvergenzbedingungen**. Diese werden es uns ermöglichen, die Frage nach der Konvergenz einer Reihe zu beantworten, obwohl es uns in vielen Fällen nicht möglich ist, die Summen selbst anzugeben. Wer könnte zum Beispiel ahnen, dass die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$ den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ hat?! Wahrlich ein eigenartiges Ergebnis! Dieses herzuleiten bleibt uns verwehrt, nicht jedoch der Nachweis der Konvergenz.

Um aber nicht Gefahr zu laufen, die verschiedenen Konvergenzbestimmungen unendlicher Reihen zu trocken abzuhandeln, wollen wir anhand zweier „Riesenbeispiele" die gängigsten Untersuchungsmethoden vorstellen.

Beispiel:

Folgende unendliche Reihen sind auf ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\ldots$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$[2]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$

Bemerkung: Um die ganze Problematik noch etwas spannender zu machen, erfährt man die Lösung erst nach dem Umblättern.



[1]) D. h. durch Bestimmung des Grenzwerts der Partialsummenfolge.
[2]) Die Reihe heißt **harmonische Reihe**.

Lösung:

Definition:

Folgen, deren Grenzwert 0 ist, für die also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, heißen **Nullfolgen**.

Möglichkeiten der Konvergenzermittlung unendlicher Reihen:

① $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\ldots$ Wir bilden die Partialsummenfolge:

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 2 = 3$
$s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
....

$s_n = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$; eine Formel, die mittels vollständiger Induktion beweisbar ist. Mit der Definition der Summe einer unendlichen Reihe finden wir:

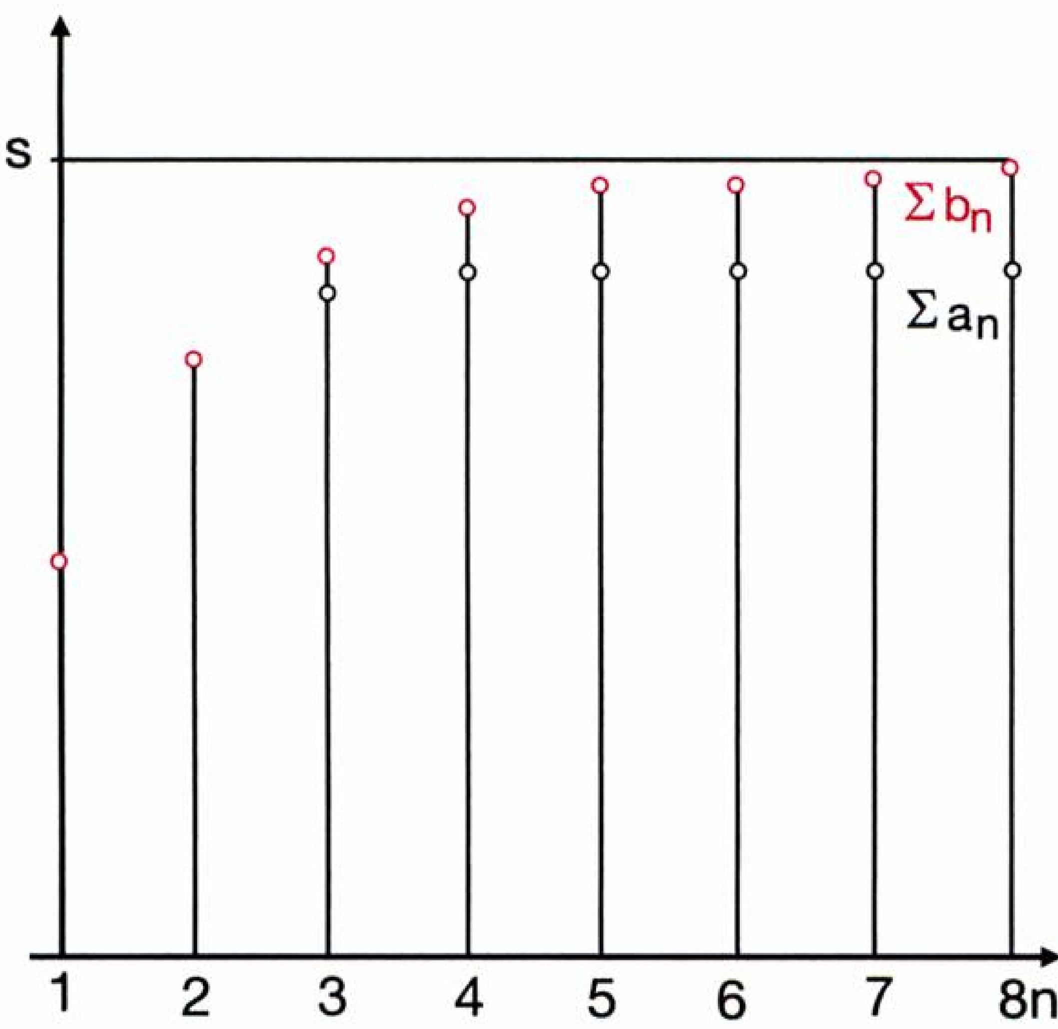
$S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$

Zu diesem Ergebnis hätten wir auch durch folgende, allgemeinere, Überlegung gelangen können: Da schon die Einzelglieder a_n der Reihe eine monoton wachsende Zahlenfolge bilden, wächst die Summe der Glieder erst recht über alle Grenzen. Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist daher **notwendig**[1], dass die Glieder a_n eine monotone Nullfolge (vgl. Außenspalte) bilden: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Diese Bedingung ist **notwendig**, d. h. bei Nichterfüllung können wir auf die Divergenz der Reihe schließen.

Wir überzeugen uns: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\ldots$ ist divergent.



b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ Die notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist erfüllt. Dennoch können wir mit Hilfe eines Tricks beweisen, dass die harmonische Reihe divergent ist. Die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$, die man auch folgendermaßen anschreiben kann: $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$, ist sicher divergent ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$). Wir vergleichen sie mit der harmonischen Reihe:

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$

Die Ausdrücke in den Klammern sind stets größer, als die unserer Vergleichsreihe. Da aber bereits diese divergent ist, ist es die harmonische erst recht! Diese Vergleichsmethode lässt sich verallgemeinern.

② konvergente Majorante

Wenn für eine Reihe $\sum a_n$ mit nicht negativen Gliedern a_n für **fast alle** [2] n $a_n < b_n$ gilt und die Reihe $\sum b_n$ konvergent ist, ist es die Reihe $\sum a_n$ erst recht.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$ Wir vergleichen mit der konvergenten geometrischen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

$a_n < b_n$? $\quad \frac{1}{n!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n! > 2^{n-1}$

1) Bezüglich **notwendiger** und **hinreichender** Bedingungen vgl. Aufgabe **512.**
2) „Fast alle“: Alle, bis auf endlich viele.

Diese Ungleichung stimmt für $n \geqslant 3$ (vgl. Aufgabe **504.**). Da aber die geometrische Reihe konvergiert und die Glieder der zu untersuchenden Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$ ab $n = 3$ stets kleiner als die der Vergleichsreihe sind, konvergiert die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$ erst recht!

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$

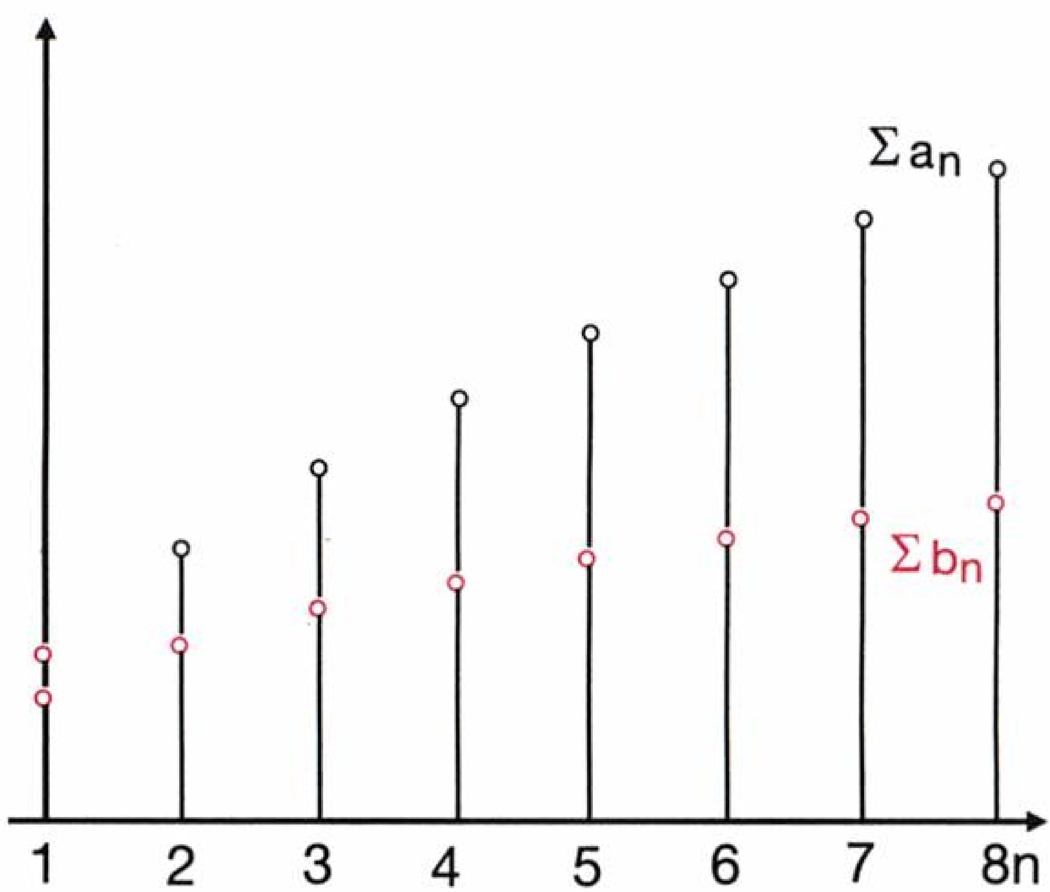
Wir vergleichen mit der divergenten harmonischen Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

$a_n > b_n$?

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$$
$$\ln(n+1) < n$$
$$n+1 < e^n$$

Diese Ungleichung stimmt für $n \in \mathbb{N}^*$ (vgl. Aufgabe **504.**). Da aber die harmonische Reihe divergiert und die Glieder der zu untersuchenden Reihe $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$ stets größer als die der Vergleichsreihe sind, divergiert die Reihe $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$ erst recht!



③ divergente Minorante

Wenn für eine Reihe $\sum a_n$ mit nicht negativen Gliedern a_n für **fast alle** n gilt $a_n > b_n$ und die Reihe $\sum b_n$ divergent ist, ist es die Reihe $\sum a_n$ erst recht.

Das war ein harter Brocken! Um jedoch sicher zu gehen, dass die bisher besprochenen Methoden der Konvergenzbestimmung unendlicher Reihen auch im Gedächtnis haften bleiben, empfiehlt es sich, sie noch einmal mit Bleistift und Papier durchzuarbeiten. „Wozu das alles?", wird sich vielleicht jetzt mancher Leser fragen, „Sind diese Dinge so wichtig?" Diese Frage lässt sich leicht im nächsten Abschnitt beantworten, wo wir zur direkten Anwendung der Konvergenzuntersuchungen gelangen werden. Vorher müssen wir jedoch noch zwei weitere Methoden kennen lernen.



Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) war Philosoph, Naturforscher, Mathematiker, Historiker und sogar Politiker. Er gilt als einer der größten Gelehrten der europäischen Geisteswelt.

Beispiel:

Es ist die Konvergenz der Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}+\ldots$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=1+4+\frac{9}{2}+\frac{8}{3}+\ldots$

zu beweisen.

Lösung:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}+\ldots$ ist eine alternierende Reihe. Für solche existiert eine besonders einfache Konvergenzbedingung: Die Reihe konvergiert, wenn die **Absolutbeträge** der Glieder eine **monotone Nullfolge** bilden, also wenn gilt:

$\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$. Diese Bedingung heißt **LEIBNIZ-Kriterium**.

Für unseren Fall heißt das:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+2)} = 0$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}+\ldots$

④ LEIBNIZ-Kriterium für alternierende Reihen

Wenn für eine alternierende Reihe $\sum a_n$ gilt, $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ und $|a_{n+1}| < |a_n|$ gilt, so konvergiert diese Reihe.

⑤ Quotientenkriterium

Eine Reihe $\sum a_n$ mit nichtnegativen Gliedern a_n konvergiert, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1$ gilt.
Für $c > 1$ divergiert sie, für $c = 1$ liefert das Kriterium keine Entscheidung.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + 4 + \frac{9}{2} + \frac{8}{3} + \ldots$

Die Konvergenz dieser Reihe lässt sich mit Hilfe des sogenannten **Quotientenkriteriums von D'ALEMBERT**[1)] nachweisen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1$$

Wenn also der Grenzwert des Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder kleiner 1 ist, konvergiert die Reihe.

Bei dieser Bedingung ist darauf zu achten, dass die Reihenglieder nicht negativ sein dürfen. Das Kriterium lässt sich somit auf alternierende Reihen nicht anwenden.

Für unseren konkreten Fall ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{(n+1)!n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{(n+1)n!n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + 4 + \frac{9}{2} + \frac{8}{3} + \ldots$

AUFGABEN

498. Für welche Werte von q konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cdot q^{n-1}$.

499. Mit Hilfe der notwendigen Bedingung für die Konvergenz unendlicher Reihen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sind die folgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} = 0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt[r]{n} = 0 + 1 + \sqrt[r]{2} + \sqrt[r]{3} + \ldots \quad r \in \mathbb{N}^*$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln(n+1) = 0 + \ln 2 + \ldots$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots$

500. Die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ ist mit der Vergleichsreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ nachzuweisen.

501. Mit dem Ergebnis aus Aufgabe **500.**, ist die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$ zu untersuchen.

502. Geg.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} \ldots$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Ges.: Werte für k, für die die obige Reihe konvergiert.

503. Bei folgenden Reihen ist durch den Vergleich mit einer konvergenten Majorante die Existenz einer Summe zu beweisen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)n}$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)}$ **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

[1)] **Jean Le Rond D'ALEMBERT** (1717–1783), französischer Philosoph, Mathematiker und Literat.

504. Durch den Vergleich mit der harmonischen Reihe (divergente Minorante) ist die Divergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[k]{2}} + \frac{1}{\sqrt[k]{3}} + \frac{1}{\sqrt[k]{4}} + \ldots$ mit $k \geqslant 2, k \in \mathbb{N}^*$ nachzuweisen.

505. Warum ist die LEIBNIZ-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ nur bedingt konvergent, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$ aber absolut konvergent?

506. Mit Hilfe des LEIBNIZ-Kriteriums sind folgende unendliche Reihen auf Konvergenz zu untersuchen:

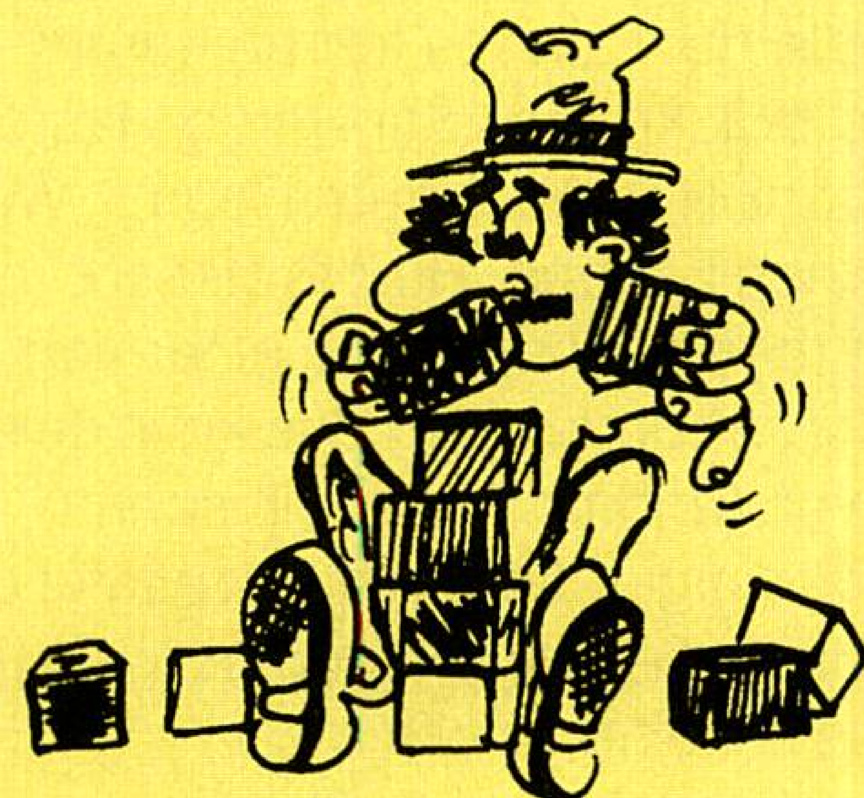
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{n!}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2}$

507. Die Konvergenz folgender Reihen ist, sofern möglich, mit dem Quotientenkriterium nachzuweisen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n!}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3}$

508. Warum kann die Divergenz der harmonischen Reihe nicht mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen werden?

509. Herr Kinderlieb möchte für seinen Sohn Bauklötze kaufen. Er betritt ein Spielwarengeschäft und sagt: „Ich benötigte für meine Sohn einen Satz Bauklötze, deren Volumina stets kleiner werden sollen." „Und in welcher Art sollen sie kleiner werden?", fragt ihn der Verkäufer, der sich etwas gefrozzelt fühlt. „Nun, wenn sie es genau wissen wollen", antwortet Herr Kinderlieb, „so, dass sich das n-te Würfelvolumen zum n+1-ten wie $\frac{1}{n\sqrt[4]{n}} : \frac{1}{(n+1)\sqrt[4]{n+1}}$ verhält. Da könnte ich unendlich viele dieser würfelförmigen Klötze übereinander stellen und würde doch nur einen endlich hohen Turm erhalten!". „Das glaube ich kaum", wendet der verdutzte Verkäufer ein. „Ich schon!", antwortet Herr Kinderlieb. Wer von den beiden hat recht?



510. Durch vollständige Induktion sind folgende Relationen zu beweisen:

a) $\sum_{n=1}^{\ell} n = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\ell} n^2 = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6}$ **c)** $n! > 2^{n-1},\ n > 2$ **d)** $n+1 < e^n,\ n \in \mathbb{N}^*$

511. Das sogenannte **harmonische Mittel** zweier Zahlen a, b ist wie folgt definiert: $x_h = \frac{2ab}{a+b}$. Man zeige, dass ein Glied der harmonischen Reihe stets das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.

512. Gibt es Bedingungen, die **a)** notwendig und hinreichend, **b)** weder notwending noch hinreichend, **c)** notwending, aber nicht hinreichend, **d)** hinreichend, aber nicht notwendig für die Konvergenz unendlicher Reihen sind? Welchen Informationsgehalt hat eine erfüllte notwendige Bedingung, die nicht hinreichend ist bzw. eine nicht erfüllte hinreichende, die aber nicht notwendig ist?

513. Wie muss ein Polynom n-ten Grads formal „aussehen", wenn es mit einer gegebenen Funktion im Punkt $P(0, y_P)$ im Funktionswert und den ersten $n (n \in \mathbb{N})$ Ableitungen übereinstimmen soll? Wovon wird beim Grenzübergang $n \to \infty$ die Konvergenz dieser Reihe abhängen?

Professor Klugbeiß kratzte sich nachdenklich seinen Nasenrücken. *„Woll'n wir sinus auf den Tasten, müssen wir beim Planen hasten!"*, sagte er und es war nicht ganz klar, ob er damit sich oder seine Mitarbeiter zu schnellerer Arbeit anspornen wollte. Die Crew jedenfalls, die unter seiner Leitung an der Entwicklung eines Rechners arbeitete, werkte sich mit hochroten Köpfen durch meterhohe Berge von Papier, auf denen schier endlose Zahlenfolgen, Diagramme und Tabellen ihr stummes Dasein fristeten. *„Ließe sich mein Plan ergänzen, durch eine Reihe von Potenzen, würde sich mein Denken lohnen, für die Winkelfunktionen!"*, meldet sich Klugbeiß unvermittelt aus einer Ecke der Planungs- und Entwicklungsabteilung. Seit seinem letzten großen Erfolg, der in der Erfindung einer kabellosen Kaffeemaschine mit Solarzellen bestanden hatte, sprach er nur mehr in Reimen. Ein Dutzend der besten Köpfe des Landes fuhren herum und drückendes Schweigen lastete in der Folge über dem Raum. „Wie meinen Sie das, Herr Professor Klugbeiß?", formulierte einer von ihnen zu guter Letzt das kollektive Unverständnis. Klugbeiß schritt bedächtig zur großen Wandtafel am Ende der Abteilung und schrieb, leise in seinen weißen Bart murmelnd, folgende Gleichung an:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

„Ihr braucht nicht so seltsam gaffen, diese Reihe wird es schaffen, ist ein Rechner doch banal, kann nur minus, plus und mal — und dividiert", fügte er nach einer kurzen Gedankenpause verärgert über den unvollkommenen Reim noch hinzu. Der Zorn währte jedoch nicht lange, zu groß war die Freude über den gefundenen Zusammenhang.

1.4 TAYLOR-Reihen

In der Außenspalte finden wir die Geschichte von Professor Klugbeiß. Dieser hätte nicht schlecht gestaunt, wenn man ihm Aufzeichnungen über die Reihenentwicklung von Funktionen aus dem Jahren 1715 gezeigt hätte. In diesem Jahr verwendete nämlich bereits **Brook TAYLOR** (1685–1731) die von ihm entwickelte revolutionäre Methode. Um mit Professor Klugbeiß zu sprechen: „Ich gesteh' es unumwunden, ich hab' was Altes neu erfunden!". Werfen wir aber nun einen Blick auf das handschriftlichen Manuskript:

Können wir diese Rechnung mit unserem Wissen nachvollziehen? Mit folgender, historischen Formel macht es keine Schwierigkeiten mehr, in die Fußstapfen TAYLORs zu steigen:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$f^{(n)}(0)$.... n-te Ableitung der Funktion an der Stelle x = 0

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$

TAYLOR-Reihen sind spezielle Potenzreihen. Letztere haben stets folgende Gestalt:

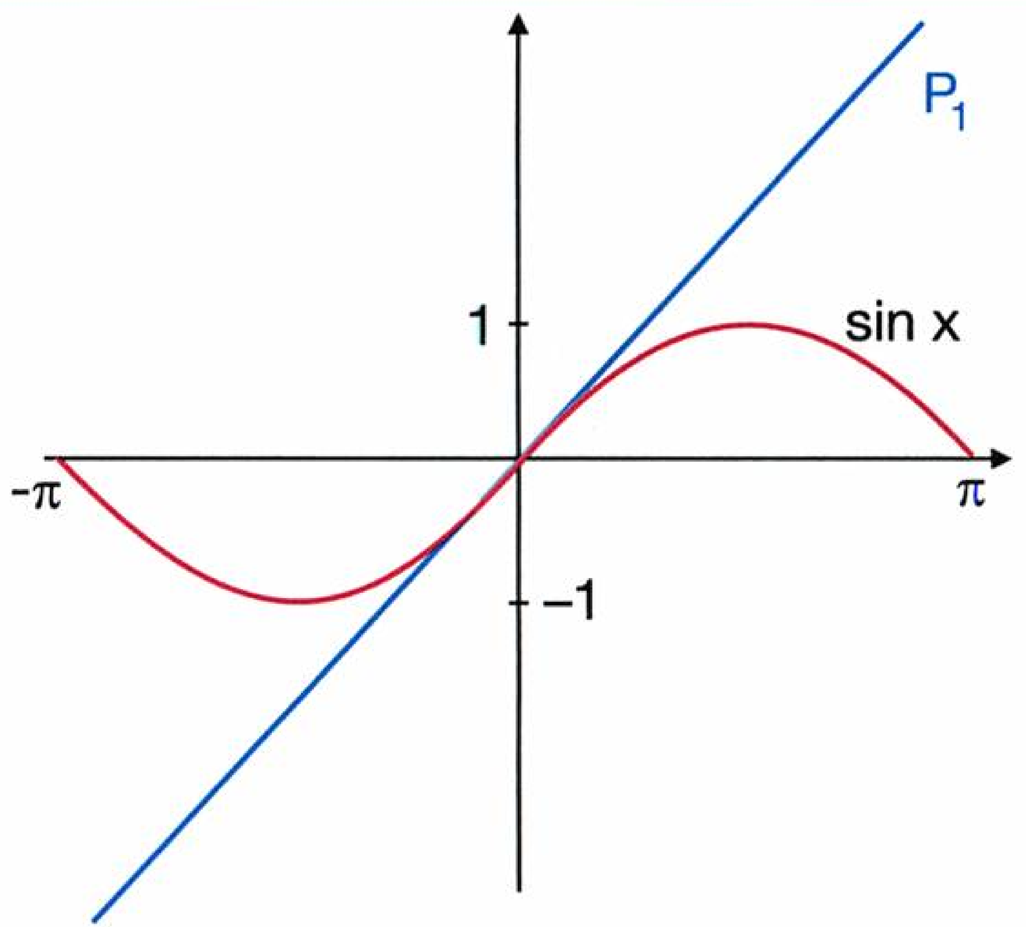
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$

Beispiel:

Die Funktion f (x) = sin x ist an der Stelle x = 0 in eine TAYLOR-Reihe zu entwickeln. Es ist eine Tabelle zu erstellen:

x	sin x	P_1	P_2	P_3	P_4

$x \in [-2\pi, 2\pi]$, Schrittweite $\frac{\pi}{2}$, wobei $P_{1,2,3,4}$ die TAYLOR-Polynome[1] bei Abbruch nach dem 1., 2., 3., bzw. 4. Glied bedeuten. Die Graphen der Funktion und der TAYLOR-Reihen sind zu zeichnen; $I = [-\pi, \pi]$.



Lösung:

$f(x) = \sin x \qquad \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = 1$

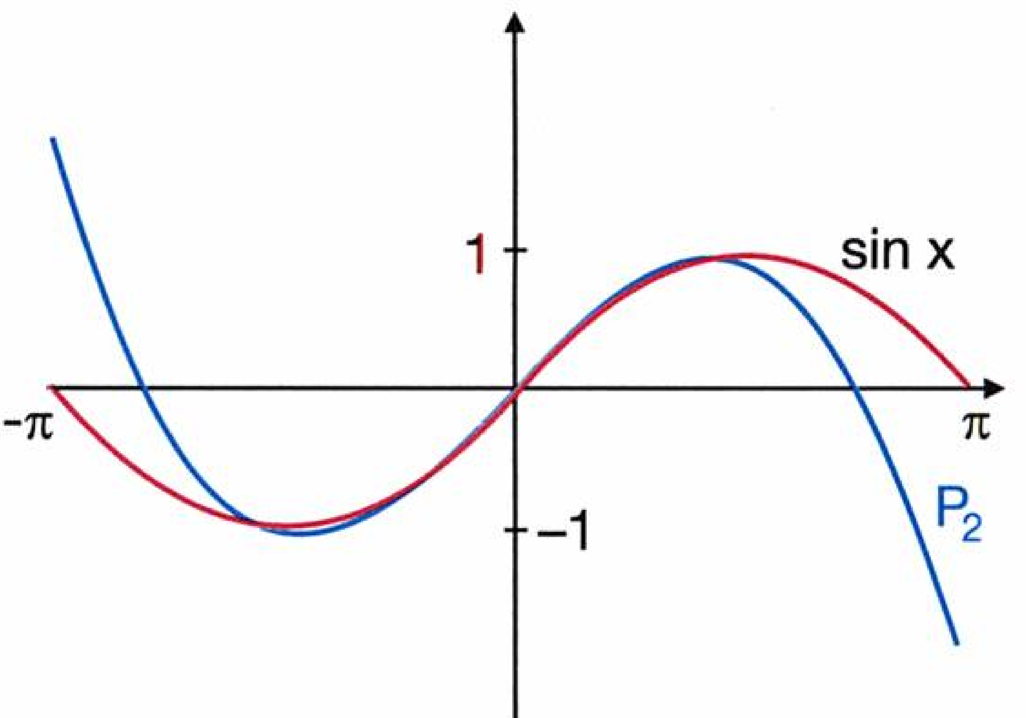
$f''(x) = -\sin x \quad = \sin(x+\pi) \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \quad = \sin(x+2\pi) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

$\vdots \qquad \vdots$

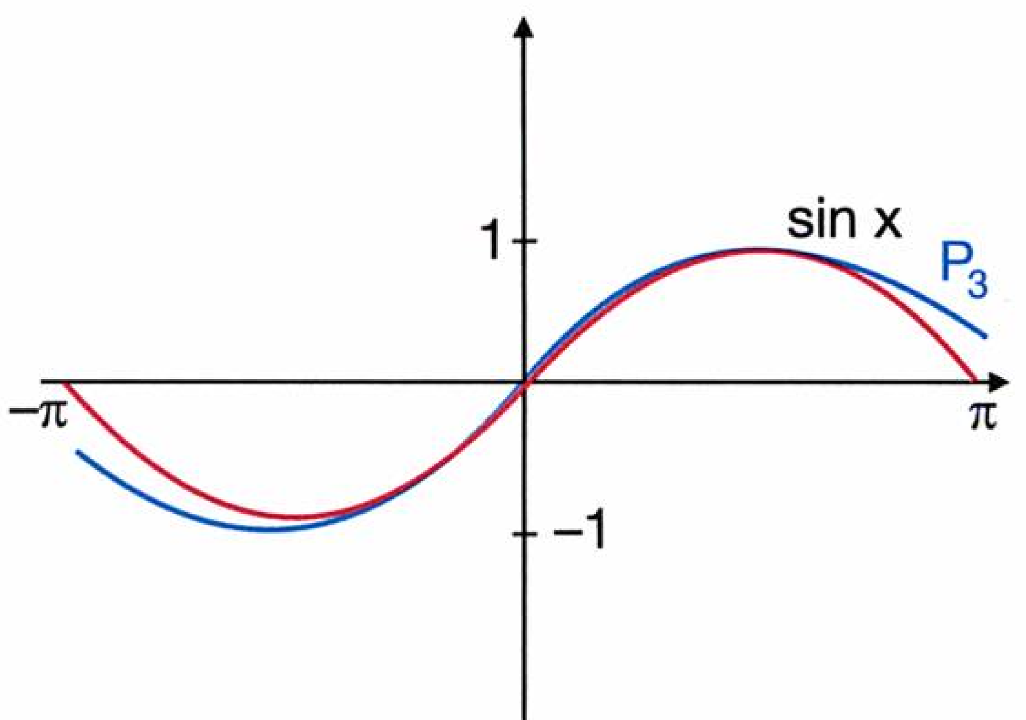
$f^{(n)}(x) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$



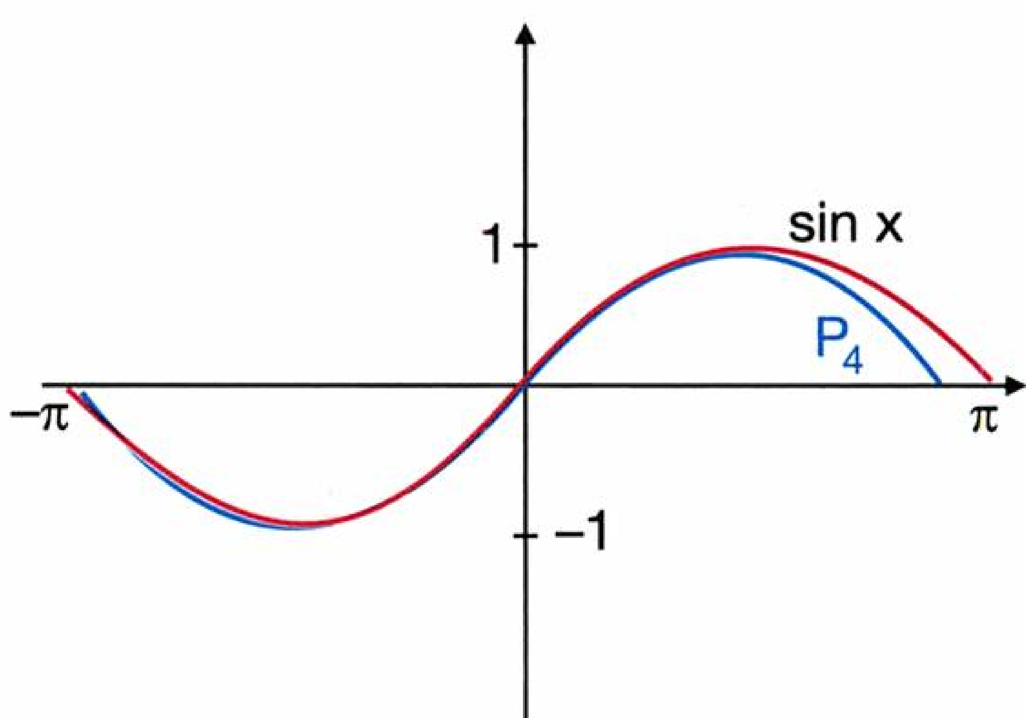
Für gerade n ist $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$, für ungerade abwechselnd ±1.

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$P_1 = x,\ P_2 = x - \frac{x^3}{6!},\ P_3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},\ P_4 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$



x	sin x	P_1	P_2	P_3	P_4
-2π	0	-2π	35,06	−46,55	30,16
$-\frac{3\pi}{2}$	1	$-\frac{3\pi}{2}$	12,73	−6,64	3,60
$-\pi$	0	$-\pi$	2,03	−0,52	0,08
$-\frac{\pi}{2}$	−1	$-\frac{\pi}{2}$	−0,92	−1,00	−1,00
0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	0,92	1,00	1,00
π	0	π	−2,03	0,52	−0,08
$\frac{3\pi}{2}$	−1	$\frac{3\pi}{2}$	−12,73	6,64	−3,60
2π	0	2π	−35,06	46,55	−30,16



[1]) Im Gegensatz zur **unendlichen** TAYLOR-Reihe bezeichnet man die durch Abbruch nach einem bestimmten Glied erhaltenen Polynome als **TAYLOR-Polynome**.

Wichtige Sätze für TAYLOR-Reihen:

In TAYLOR-Reihen gerader Funktionen kommen nur gerade Potenzen von x vor: $x^2, x^4, x^6, x^8, \ldots$; in denen ungerader Funktionen nur ungerade Potenzen von x: $x, x^3, x^5, x^7, \ldots$

Welche Potenzen kommen daher zum Beispiel in der TAYLOR-Reihe von $f(x) = \tan^2 x$ sicher nicht vor?



In obigem Beispiel haben wir bemerkt, dass die Abweichung zwischen der Funktion sin x und selbst dem TAYLOR-Polynom $P_4 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, in vom Ursprung (der Stelle, an der wir entwickelt haben) entfernteren Stellen $(x = 2\pi)$ ganz erheblich ist. Wir wollen uns nun generell die Frage nach der Konvergenz von Potenzreihen stellen. In diesen speziellen Reihen ist ja im Gegensatz zu den bisher besprochenen noch eine Variable, nämlich x, enthalten. In welcher Weise hängt nun die Konvergenz unendlicher Potenzreihen, und damit auch unendlicher TAYLOR-Reihen, von x ab? Glücklicherweise gibt es eine sehr einfache Bedingung, mit der wir bestimmen können, für welche x die Potenzreihe konvergiert:

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$, dann konvergiert die Reihe für alle $x \in]-r, r[$ [1]

r ..... Konvergenzradius

]−r, r[..... Konvergenzintervall

Diese einfache Methode erlaubt es uns zu bestimmen, für welche x die TAYLOR-Reihe nun tatsächlich „verwendbar" ist.

Beispiel:

Geg.: $f(x) = \ln(x+1)$

Ges.: **a)** Definitionsmenge

b) TAYLOR-Reihe an der Stelle x = 0

c) Konvergenzradius und Konvergenzintervall dieser Reihe

d) Graphen der Funktion und der TAYLOR-Polynome bei Abbruch nach dem 1., 2., 3. bzw. 4. Glied im Konvergenzintervall!

Lösung:

a) Der Logarithmus ist nur für Argumente größer 0 definiert, also

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D = \{x \mid x > -1\}$

b) $f(x) = \ln(x+1) \quad \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(x+1)^3} = \quad \Rightarrow f'''(0) = 1\cdot 2$

$f^{(4)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} \quad \Rightarrow f^{(4)}(0) = (-1)\cdot 2\cdot 3$

$f^{(5)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5} \quad \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$

$\vdots \qquad \vdots$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+1)^n} \quad \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n\cdot(n-1)!$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

c) $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow r = 1$

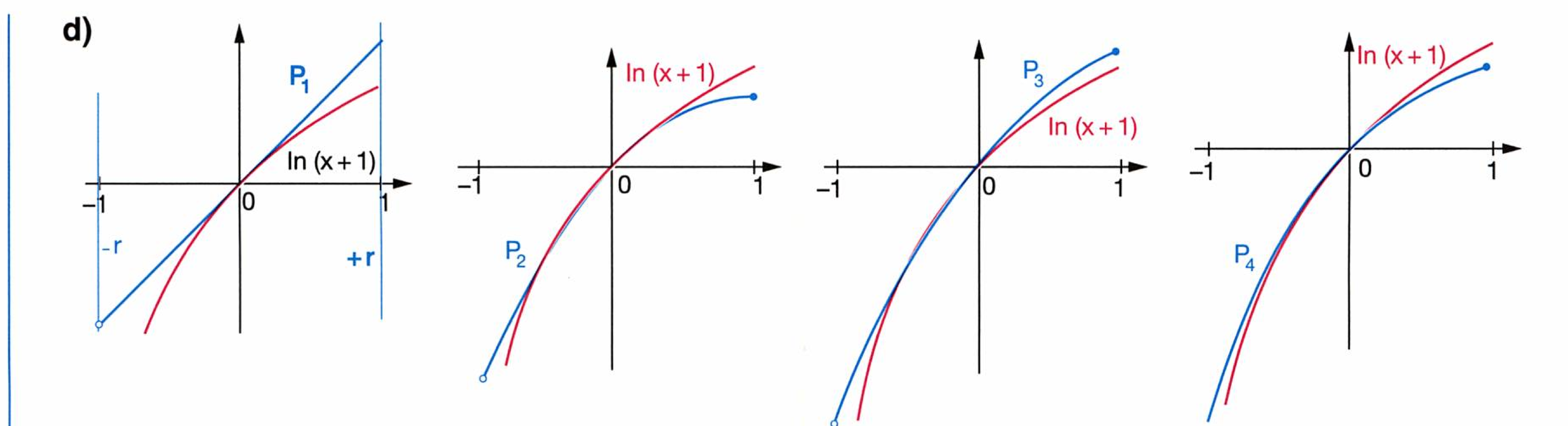
Randstellen: $x = -1 \qquad \{-1\} \notin D$

$x = 1 \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Die (LEIBNIZ-)Reihe ist konvergent.

$\Rightarrow$ Konvergenzintervall: $]-1, 1]$

[1]) Die Randstellen $x = \pm r$ müssen gesondert untersucht werden. In diesen kann die Reihe konvergieren, sie muss aber nicht.



AUFGABEN

Folgende Funktionen sind in TAYLOR-Reihen an der Stelle $x = 0$ zu entwickeln. Das Konvergenzintervall[1] ist zu bestimmen und die ersten vier TAYLOR-Polynome sind zu zeichnen.

514. a) $f(x) = \sin 3x$ **b)** $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ **c)** $f(x) = \cos x$ **d)** $f(x) = 3\cos\frac{x}{4}$

515. a) $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = e^{-x}$ **c)** $f(x) = \sinh 2x$ **d)** $f(x) = \cosh\frac{x}{3}$

516. a) $f(x) = \tan x$ **b)** $f(x) = \ln(1-x)$ **c)** $f(x) = \ln\frac{(1+x)}{(1-x)}$ **d)** $f(x) = \ln(x+1)^n$

517. a)[2] $f(x) = \frac{e^x}{x}$ **b)**[2] $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ **c)**[2] $f(x) = x \cdot \sinh x$ **d)**[2] $f(x) = x^2 \cdot \ln(x+1)$

Die Formel für die Berechnung von **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ ist auch für $n \notin \mathbb{N}^*$ anwendbar. So ist zum Beispiel $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{1}{16}$.

Man berechne folgenden Binomialkoeffizienten:

518. a) $\binom{\frac{1}{2}}{1}$ **b)** $\binom{\frac{1}{2}}{8}$ **c)** $\binom{\frac{1}{3}}{8}$ **d)** $\binom{\frac{1}{6}}{3}$

519. a) $\binom{-\frac{1}{7}}{4}$ **b)** $\binom{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\binom{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}$ **d)** $\binom{-\frac{13}{11}}{10}$

520. Die Funktion $f(x) = (1+x)^q$ mit $q \notin \mathbb{N}$ ist an der Stelle $x = 0$ in eine TAYLOR-Reihe zu entwickeln. Welchen Wert hat der Konvergenzradius r dieser sogenannten **binomischen Reihe**?

Mit Hilfe von Aufgabe **520.** sind folgende Funktionen in eine TAYLOR-Reihe an der Stelle $x = 0$ zu entwickeln.

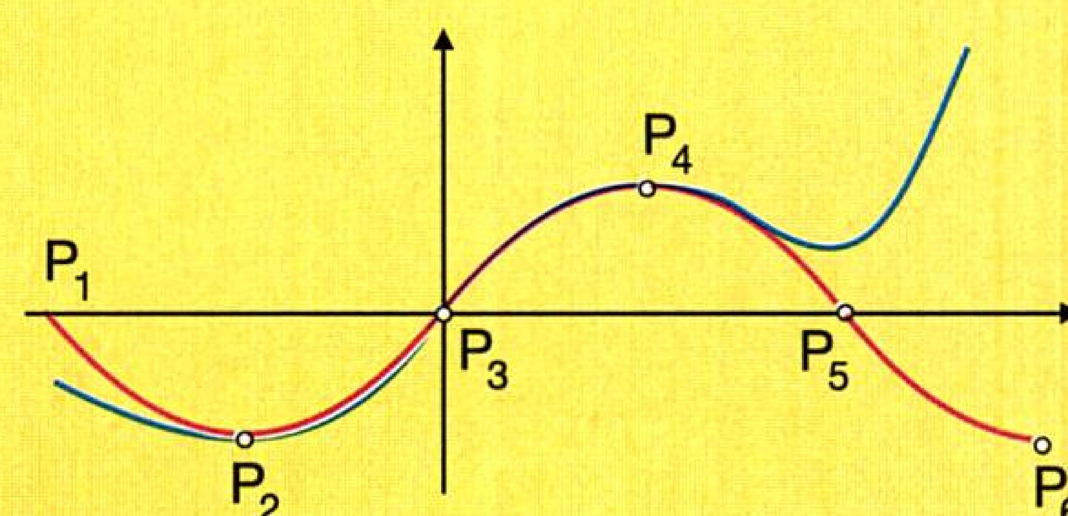
521. a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ **c)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ **d)** $f(x) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x+1}}$

522. a) $f(a) = (1+a)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $f(\mu) = (\mu+1)^{-\frac{1}{4}}$ **c)** $f(\lambda) = \frac{\lambda^3}{\sqrt[4]{1+\lambda}}$ **d)** $f(\rho) = \frac{1}{\rho^2\sqrt{1+\rho}}$

523. Die Funktion f(x) soll diesmal nicht durch eine TAYLOR-Reihe, sondern mit Hilfe der folgenden Stützstellen angenähert werden:

$P_1(-\pi, 0)$, $P_2\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$, $P_3(0, 0)$, $P_4\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $P_5(\pi\ 0)$, $P_6\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

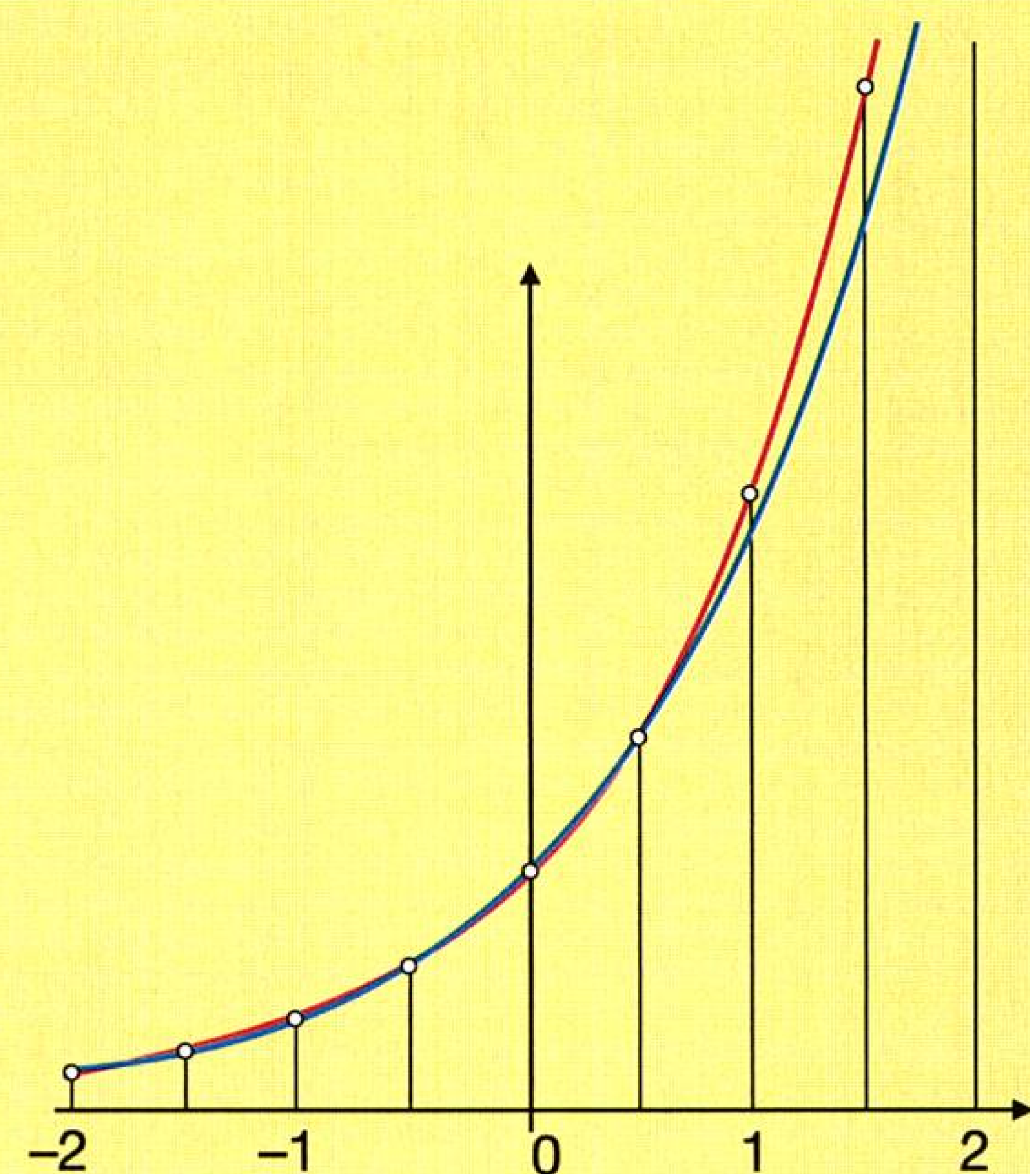
Die sich ergebende Potenzfunktion 5. Grads ist zu zeichnen. Worin liegt der Unterschied zum TAYLOR-Polynom 5. Grads der Funktion $f(x) = \sin x$?



[1]) TAYLOR-Reihen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, nennt man **beständig konvergent**, solche, für die $r = 0$ gilt, **nirgends konvergent**.

[2]) Die Lösung ist mit Hilfe bekannter TAYLOR-Reihen zu ermitteln.

524. Auch rechentechnisch liegen Welten zwischen der Ermittlung eines TAYLOR-Polynoms und der Annäherung einer Funktion durch ein Polynom, welches durch gegebene Stützstellen ermittelt wird. Die Funktion $f(x) = e^x$ soll im $I[-2,\ 2]$ mit Hilfe von 9 Stützstellen durch ein Polynom genähert werden. Die Stützstellen haben voneinander gleichen Abstand.
Das Polynom ist im Intervall $[-3,\ 3]$ zu zeichnen.



525. Gegeben ist die allgemeine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ Unter Verwendung des Quotientenkriteriums ist zu zeigen, dass die Reihe für alle $|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ konvergiert.

526. Man beweise die Divergenz einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ für $|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

527. Ohne Beweis seien folgende Sätze für konvergente Potenzreihen angeführt: Wenn $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dann

ist $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x_1}^{x_2}$

Es darf also gliedweise differenziert und integriert werden. Mit Hilfe dieser Zusammenhänge ist zu ermitteln:

a) $\int_2^5 \frac{x}{\ln x}\,dx$ **b)** $\int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ **c)** $\int_2^4 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ **d)** $\int_2^5 x^2 e^{-x^2}\,dx$

528. Die Funktion $f(x) = \arctan x$ ist an der Stelle $x = 0$ in eine TAYLOR-Reihe zu entwickeln. Konvergenzradius r?

Anleitung: $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$; $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots \Rightarrow \arctan x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)\,dt =$

529. Obwohl es keine Schwierigkeiten macht, den Konvergenzradius einer Potenzreihe zu ermitteln, stellt sich die nicht unerhebliche Frage nach der Größe des Fehlers, der durch Abbruch der Potenzreihe nach einem bestimmten Reihenglied entsteht, weiterhin.

Für alternierende Reihen ist sie leicht zu beantworten: Der Fehler R_{n+1} (dieser heißt auch Restglied) ist an der untersuchten Stelle stets kleiner als $|a_{n+1}|$, wenn man nach dem n-ten Glied a_n abbricht.

Die rechte Spalte ist — entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Spalte — auf einem separaten Blatt zu vervollständigen.

$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + R_{2n+1}$	$\cos x =$
$R_{2n+1} < \left\lvert\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right\rvert$	$R_{2n} <$

529. (Fortsetzung)

Fehler bei Abbruch nach dem 4. Glied an der Stelle x = 1?
n = 4

$R_9 < \left|\frac{(-1)^3}{9!}x^9\right|$

$R_9 < \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} = \mathbf{0{,}00000276}$

Fehler bei Abbruch nach dem 4. Glied an der Stelle x = 1?
n = 4

$R_8 <$

$R_8 <$

Es ist der ermittelte Fehler mit dem Taschenrechner nachzuprüfen.

530. Wie groß ist der Fehler maximal an der Stelle $x = \frac{1}{2}$, wenn man die Reihe $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ nach dem **a)** 1. Glied **b)** 3. Glied **c)** 4. Glied **d)** 5. Glied abbricht. Der Fehler ist absolut, relativ und in Prozent anzugeben.

531. Für welche Werte von x kann man sin x durch x mit einem absoluten Fehler von maximal **a)** 10^{-2} **b)** 10^{-3} **c)** 10^{-4} **d)** 10^{-5} ersetzen?

532. Für nicht alternierende Reihen gibt es eine allgemeinere Restglied-abschätzung, benannt nach dem Mathematiker LAGRANGE.

$$|R_{n+1}| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|,\ 0 < \vartheta < 1$$

Um den Fehler, der bei Abbruch nach dem n-ten Glied entsteht, konkret abzuschätzen, benützt man meist

$$|R_n| < \left|\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \quad \text{(also } \vartheta = 0\text{) oder}$$

$$|R_n| < \left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \quad \text{(also } \vartheta = 1\text{).}$$

Gesucht ist eine Erklärung für diese Abschätzung.



Joseph-Louis DE LAGRANGE (1736–1813) war ein führender französischer Mathematiker seiner Zeit. Er beschäftigte sich unter anderem mit Zahlentheorie.

533. Bis zu welchem Wert von x bleibt der Fehler unter 0,1 %, wenn man $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ durch $1 + \frac{x}{2}$ ersetzt? Die Lösung ist mit einer Tabelle zu ermitteln $(-1 < x < 1)$.

534. Wie groß ist der absolute Fehler maximal, wenn man die Reihenentwicklung für $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$ nach dem 3. Glied abbricht, an den Stellen **a)** $x = 0{,}1$ **b)** $x = \frac{1}{3}$ **c)** $x = \frac{9}{10}$ **d)** $x = \frac{999}{1000}$?
Für ϑ ist 1 anzunehmen.

535. Mit Hilfe der komplexen Potenzreihe für $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ ist die sogenannte **EULER-Formel** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ herzuleiten.

536. Die Integrale $A = \int e^{ax} \cos bx\,dx$ und $B = \int e^{ax} \sin bx\,dx$ sind auf zwei Arten zu berechnen.

Anleitung für die 2. Methode: Man berechne zunächst A + iB und forme hernach die Integranden mit Hilfe der EULER-Formel um ...

2. FOURIER-Reihen

Im Juni 2001 konnte man in einer österreichischen Tageszeitung folgende Schlagzeilung lesen:

Pfingsten 2001: Mehr Unfälle mit Personenschaden als in den Vorjahren

Protokoll Ausfahrt 7103 am 2. 6. 2001

Alarm 17.30, Unfall Triester Straße, Höhe Wiener bergstraße, ein Verletzter.

Ausfahrt Wagen 2, Dr. Skoal, Hr. Binder, Hr. Master.

Erreichen des Unfallortes um 17.43, Patient bewusstlos, keine äußeren Verletzungen. Verdacht auf Herzinfarkt, Herzmassage. Nach Wiedereintritt der Herztätigkeit Überführung des Patienten in den Wagen. Das EKG zeigt typische ST-Strecken-Hebung in I, aVL und V_{3-6}; reziproke ST-Strecken-Senkung in II, III und aVF, **FOURIER-Analyse** zeigt signifikante Oberwellenverteilung. Abnorme Q-Wellen deuten auf zweiten Infarkt. Wegen starker Atemschwierigkeiten wurde mittels Intubation Luftzufuhr geschaffen. Trotz einmaliger intravenöser Gabe von 15 ml trat bei Erreichen des Meidlinger Unfallkrankenhauses um 18.12 der Exitus ein.

Gez.: Dr. Sk



Die Ampel schaltet auf grün. Ich lege den ersten Gang ein und trete das Gaspedal meines Porsches 911 voll durch. Warum hat sie mir das angetan? Warum? Kupplung. Zweiter Gang. Einkuppeln. Wieder voll auf das Gas. Ich muss jetzt nur weg aus der Stadt. Ein Wahnsinn! Sie hat überhaupt keinen Grund. Erst gestern habe ich ihr das heiß ersehnte Rennpferd geschenkt. Und trotzdem . . . Da, Um Gottes Willen! Bremsen. Scharf links vorbei. Ich muss aufpassen, mit zwei dreifachen Whisky's darf ich keiner Funkstreife in die Hände fallen. Gas. Kupplung. Dritter Gang. Die Triesterstraße. Einkuppeln. Zweite Spur. Gas. Ich werde mich am besten mit Rechtsanwalt Bindler in Verbindung setzen, wenn ich in Graz bin. Sie muss wahnsinnig geworden sein — und dann dieser elende Schmarotzer Franz. Aber auch er wird büßen. Alle werden sie büßen. Immer noch zweite Spur. Auskuppeln. Vierter Gang. Einkuppeln. Gas. Alle werden sie bezahlen. So springt man nicht mit einem Georg Schwertbauer um. So nicht. So . . . was? Ist der verrückt. Mein Gott. Bremsen. Das geht sich nicht aus. Das geht sich nie aus. Das Lenkrad. Alles dreht sich so schnell. Ein leichter Schlag auf den Kopf. Ich bin angegurtet. Ein Glück. Unglaublicher Lärm. Das Kreischen von Metall. Ein letzter ohrenbetäubender Krach. Ich stehe. Es ist nicht viel passiert. Das hat mir grade heute noch gefehlt. Ein Unfall mit drei Whisky's. Aber ich lebe noch. Der Wagen ist über den Jordan. Ich werde aussteigen. Und das alles nur wegen . . . was ist das in der Brust. Bitte. Nein! Nicht hier: Bitte, Gott! Um Himmelswillen. Es tut so weh. Aaaaaah! Es ist schwarz. Nein, nicht ganz. Lichter. Stimmen. Ein Hauch. Ein Kuss. Ein Grab. Nicht sterben! Da, ich werde aufgehoben. Ein breiter Fluss mit Trauerweiden. Ein Spiel am Himmel. Der Fluss glitzert träge. Ein schwarzes Loch. Ich falle. Am Ende ein strahlendes . . . Christa? . . . Licht!

Wo liegt nun der mathematische Aspekt dieser tragischen Einleitung? Die Erklärung liefert ein einziges Wort aus dem Einsatzprotokoll: **FOURIER-Analyse**[1]. Mit der Grundlage dieser technisch so wichtigen Methode wollen wir uns nun beschäftigen. Der Herzschlag (dieser wird mit dem EKG gemessen) ist eine periodisch wiederkehrende Muskelkontraktion. Kennen wir bereits periodische Vorgänge und Funktionen? Denken wir z. B. an die wohlbekannten trigonometrischen Funktionen. Mit diesen kann man bequem rechnen, sie sind leicht handzuhaben.
Jeder, der sich in der Anwendung dieses Standardrüstzeuges nicht mehr ganz sicher ist, findet zur Auffrischung in den Aufgaben **537.** bis **549.** ein reiches Betätigungsfeld. Es hat nicht jedermann die Fähigkeit, die Probleme, die das Interpretieren eines EKGs verursacht, durch fundierte medizinische Ausbildung meistern zu können. Aber der Musik aus Synthesizern zu lauschen, das kann wohl jeder. Die eigenartigen Klänge einer Sägezahnschwingung werden ebenfalls mittels Fourierreihenentwicklung erzeugt. Wie das geht? Mit dem folgenden Formelsatz[2] ganz einfach:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

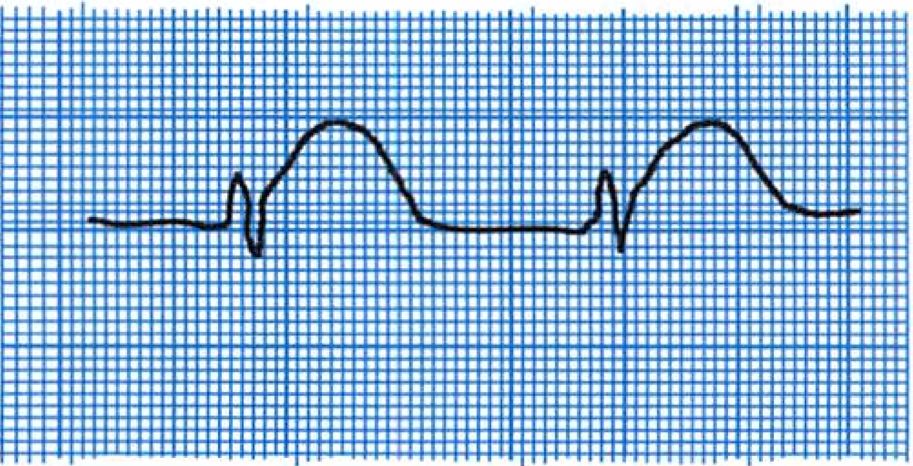
$$= \frac{a_0}{2} = a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

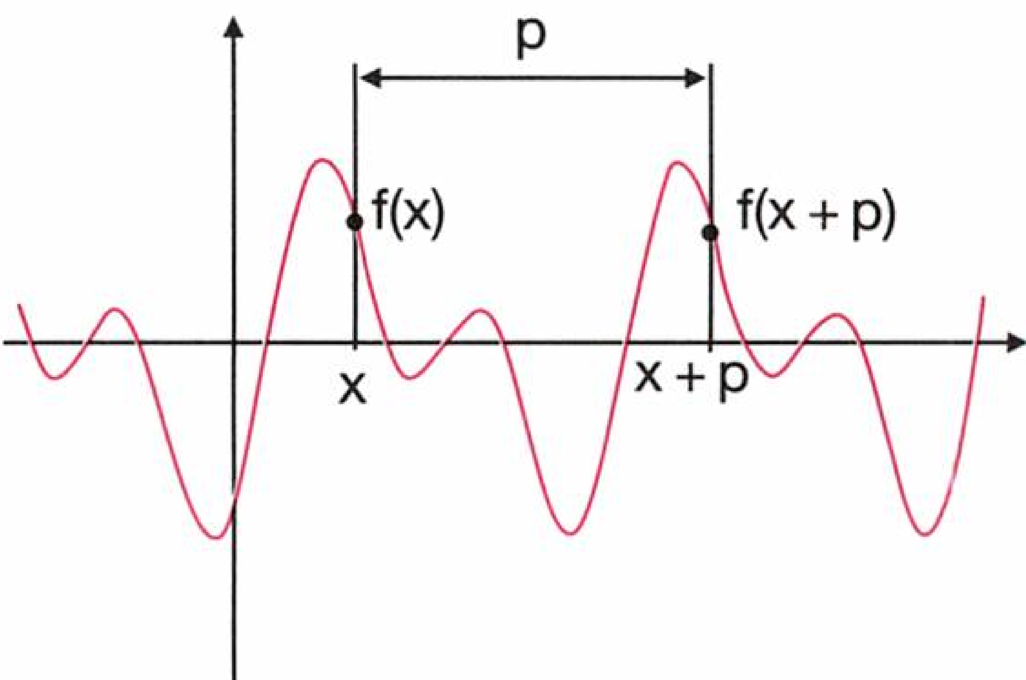
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$





Das obere EKG (Elektrokardiogramm, Messung des Herzschlags) zeigt den normalen Verlauf das untere einen akuten Herzinfarkt.



Die Koeffizienten der Reihe a_0, a_n und b_n heißen **FOURIER-Koeffizienten**. Die Darstellung einer Funktion als FOURIER-Reihe funktioniert also nach folgendem Muster. Zuerst werden mittels der drei angegebenen Integrale die — noch von n abhängigen — FOURIER-Koeffizienten bestimmt. Anschließend werden diese in die Reihe

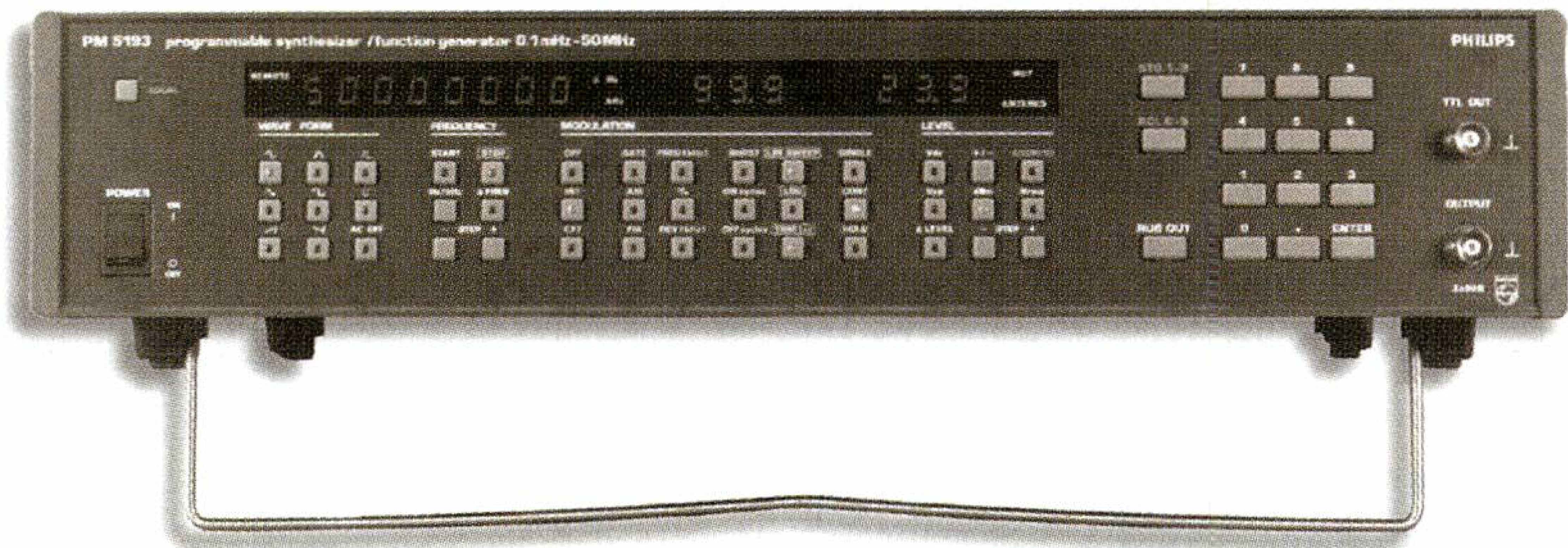
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

eingesetzt. Bevor wir uns nun Details dieses mathematischen Apparats zu Gemüte führen, ahmen wir zuerst einmal einen Synthesizer nach und erzeugen eine Sägezahnschwingung.

Definition:

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt **periodisch** mit der **Periode p**, wenn für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = f(x + p)$ mit $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $(x + p) \in D$.

Wenn p die kleinste positive Zahl ist, für die $f(x) = f(x + p)$ gilt, dann heißt p die **primitive Periode** der Funktion.





[1]) Benannt nach **Joseph Baron de FOURIER** (1768–1830), französischer Mathematiker
[2]) Nur für Funktionen mit der Periode 2π.

Rechenregel:

(1) $a_0 = ?$
(2) $a_n = ?$
(3) $b_n = ?$
(4) $f(x) = \ldots$

Die Winkelfunktionen $f_1(x) = A\cos nx$ und $f_2(x) = B\sin nx$, wobei A und B konstante Faktoren sind, spielen vor allem in der sogenannten **Schwingungslehre** eine herausragende Rolle.

Bei der harmonischen Schwingung ergeben sie sich als Lösungen der Differenzialgleichung $\ddot{x} = kx$.

In diesem Sinne kann man die FOURIER-Reihenentwicklung auch als Darstellung einer periodischen Schwingung durch Überlagerung von harmonischen Schwingungen interpretieren.

① Ist f(x) eine gerade Funktion, so sind alle b_n gleich Null.

② Ist f(x) eine ungerade Funktion so sind alle a_n sowie a_0 gleich Null.

③ Sind innerhalb einer Periode der Funktion f(x) die Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß, so ist a_0 gleich Null.

Beispiel:

Die periodische Funktion $f(x) = x,\ -\pi < x < \pi$ ist in eine FOURIER-Reihe zu entwickeln.

Lösung:

1) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

2) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \qquad |u = x \quad v' = \cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad |u' = 1 \quad v = -\frac{\sin nx}{n}$$

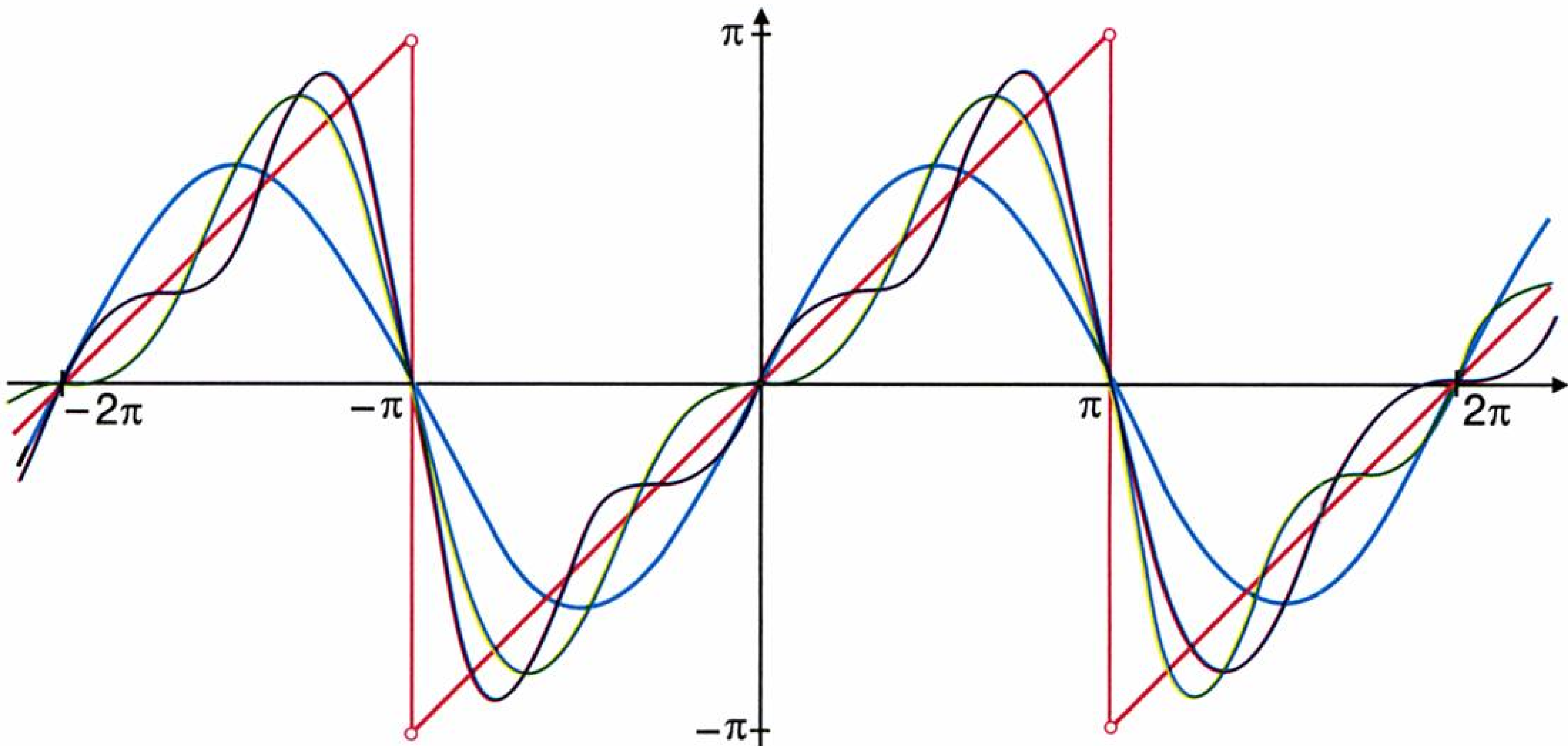
$$= \frac{1}{n^2\pi}[\cos n\pi - \cos(-n\pi)] = 0$$

3) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \qquad |u = x \quad v' = \cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right\} = \qquad |u' = 1 \quad v = \frac{\cos nx}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \left[\frac{\sin n\pi}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

4) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$



In obigem Beispiel waren sämtliche Koeffizienten a_n der Kosinusfunktionen cos nx und a_0 gleich Null.

Das dies kein Zufall ist, zeigen uns einfache Merkregeln, die die Berechnung der FOURIER-Koeffizienten wesentlich erleichtern. Diese Regeln sind ein typisches Beispiel dafür, dass sich die allgemeine Betrachtungsweise eines Problems von einer speziellen dadurch unterscheidet, dass sie die Möglichkeit liefert, allgemeine Erkenntnisse auf jedes beliebige spezielle Problem derselben Kategorie anzuwenden. Damit die Arbeit aber nicht zu trocken wird, wollen wir diese Regeln in drei Beispielen auf ihre Tauglichkeit prüfen:

Beispiel:

Bei folgenden periodischen Funktionen sind die FOURIER-Koeffizienten mit dem Wert Null zu ermitteln.

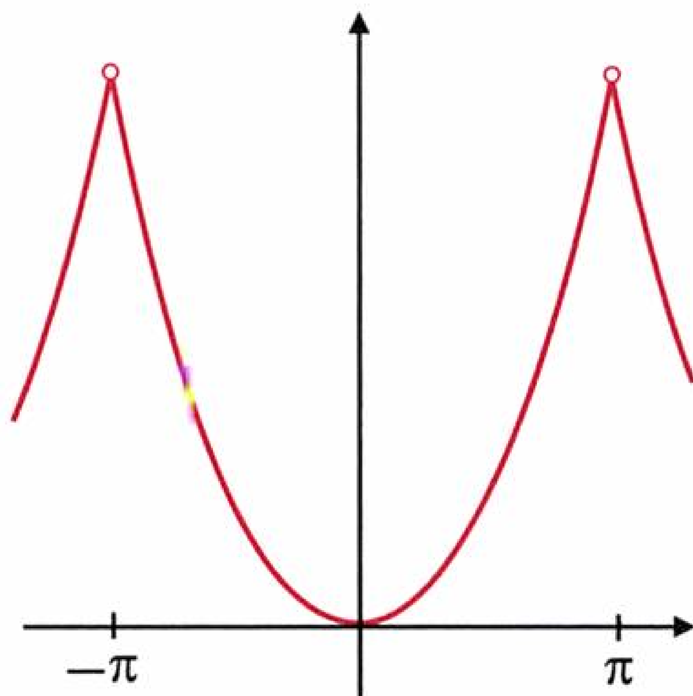
a) $f(x) = x^2, \; -\pi < x < \pi$

b) $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x < 0 \\ -a, & 0 < x < \pi \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} -x-1, & -\pi < x < 0 \\ x-1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

Lösung:

a) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist ein gerade Funktion.

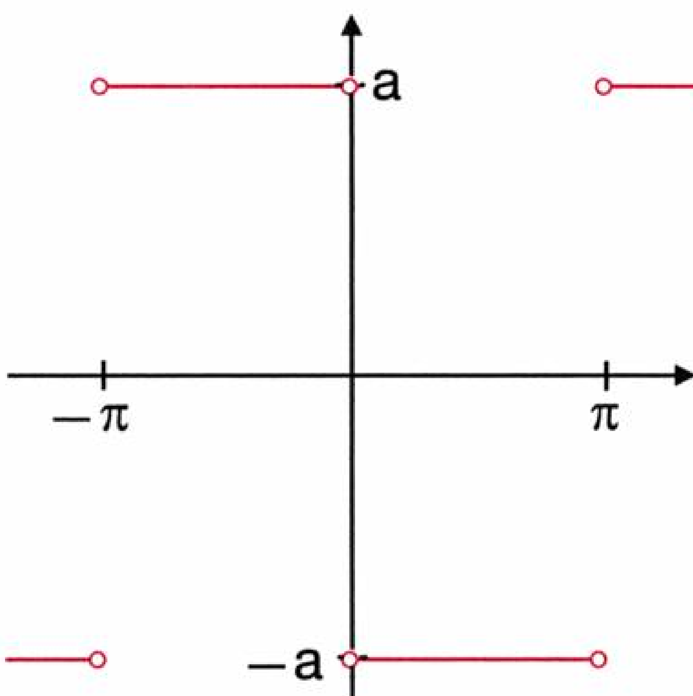
$\Rightarrow$ (1) $b_n = 0$



b) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x < 0 \\ -a, & 0 < x < \pi \end{cases}$

ist eine gerade Funktion, weiters ist die Fläche ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß.

$$a_n = a_0 = 0$$

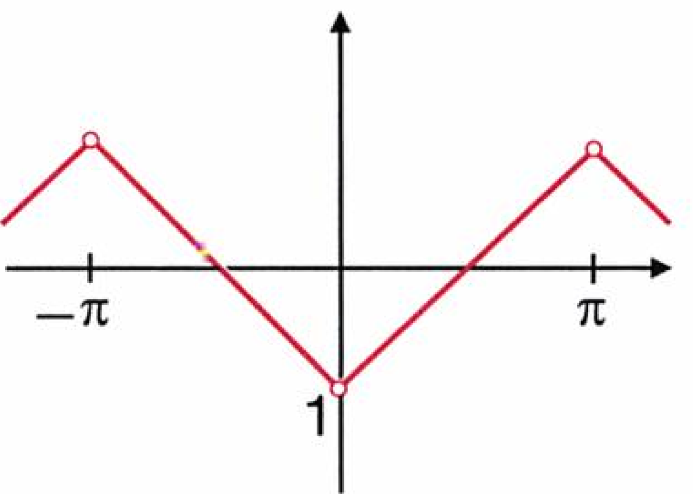


c) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & -\pi < x < 0 \\ x - 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

ist eine gerade Funktion, weiters ist die Fläche ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß.

$$b_n = a_0 = 0$$



Es ist also bei den Reihenentwicklungen der letzten beiden Funktionen nur mehr jeweils ein Integral zu berechnen. Dies bedeutet eine erhebliche Verminderung des Rechenaufwandes.

Der Klang eines jeden Instruments ist durch die Oberschwingungen einer Grundschwingung charakterisiert.

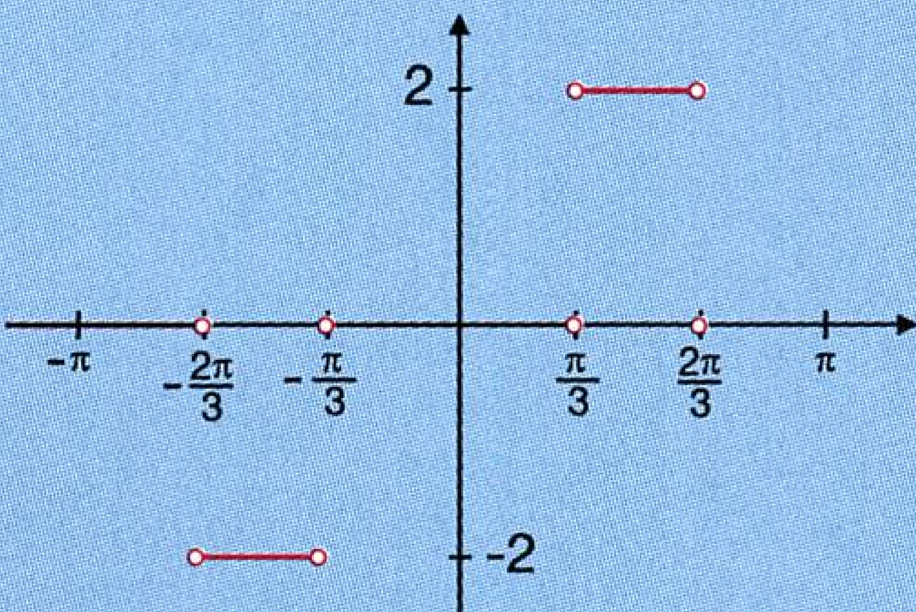
Auch in der **Schwingungslehre** bezeichnet man bei FOURIER-Analysen die ersten beiden Summanden $a_1 \cos x$, $b_1 \sin x$ als **Grundschwingung**, die restlichen Summanden $a_n \cos nx$, $b_n \sin nx$ als **Oberschwingungen**.

Es zahlt sich wirklich aus, die diversen Regeln entsprechend anzuwenden, denn bei schwierigen Problemstellungen ist der Rechenaufwand für die verbleibenden Integrale meist schon enorm! Dies sei durch das folgende Beispiel verdeutlicht.

Beispiel:

Die durch ihre Gleichung und Schaubild gegebene periodische Funktion ist in eine FOURIER-Reihe zu entwickeln.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{2\pi}{3} \\ -2, & -\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3} \\ 0, & -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \\ 2, & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \\ 0, & \frac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$



Lösung:

Es handelt sich um eine ungerade Funktion, deren Fläche unter- und oberhalb der x-Achse gleich groß ist. Damit werden a_0 und a_n gleich Null.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{2\pi}{3}} 0\cdot\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}(-2)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 0\cdot\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 2\sin nx\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 0\cdot\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\right\} = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\sin nx$$

Wir betrachten nun die Kosinusausdrücke für fortlaufende Werte von n:

$n=1 \quad \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

$n=2 \quad \cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$n=3 \quad \cos\pi - \cos 2\pi = -1 - 1 = -2$

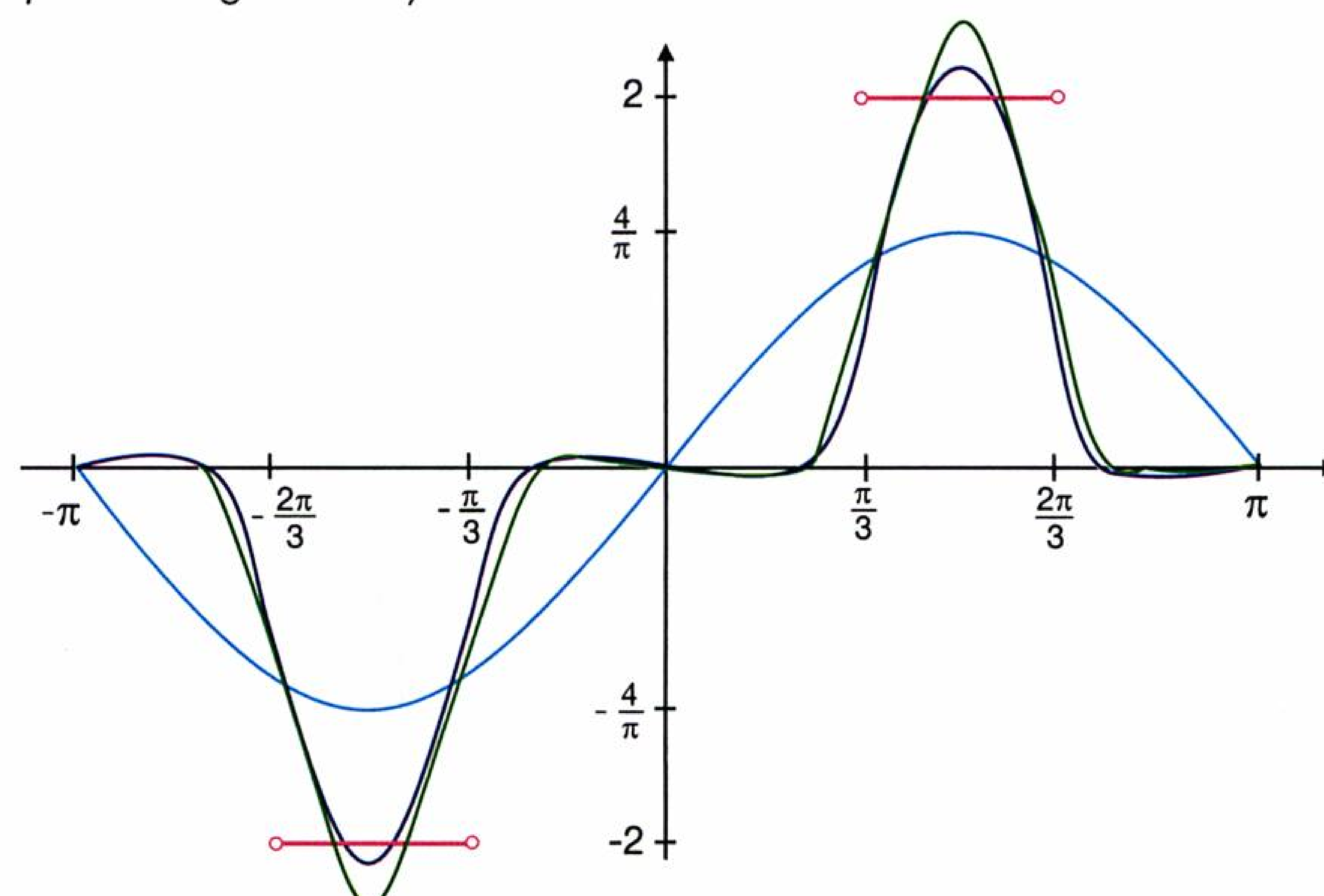
$n=4 \quad \cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$n=5 \quad \cos\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{10\pi}{3} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

$n=6 \quad \cos 2\pi - \cos 4\pi = 1 - 1 = 0$

Ab n = 7 wiederholen sich die Werte, damit ergibt sich die Reihe:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{2\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} - \frac{2\sin 9x}{9} + \ldots\right)$$



AUFGABEN

Es sind die Graphen folgender Funktionen zu zeichnen:

537. **a)** $f(x) = \sin x + \sin 2x$ **b)** $f(x) = \cos x + \frac{\cos 2x}{2}$ **c)** $f(x) = \sin x - \frac{\sin 3x}{3}$ **d)** $f(x) = \cos x + \frac{\cos 3x}{6}$

538. **a)** $f(x) = 1 - \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$ **b)** $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 2x}{4}$ **c)** $f(x) = 1 - \sin x + \cos x$ **d)** $f(x) = 1 - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

539. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Die trigonometrischen Funktionen sind ..... (periodische/nicht periodische) Funktionen.

b) Die Summe zweier periodischer Funktionen gibt ..... (immer/nicht immer) eine periodische Funktion.

c) Die Summe zweier Sinusfunktionen gleicher Periode ergibt ..... (immer/nicht immer) eine Sinusfunktion.

d) Die Summe zweier Sinusfunktionen verschiedener Periode ergibt ..... (immer/nicht immer/nie) eine Sinusfunktion.

e) Die Summe zweier Sinusfunktionen verschiedener Periode ergibt ..... (immer/nicht immer/nie) eine periodische Funktion.

f) ..... (Jede/Nicht jede) periodische Funktion läßt sich als FOURIER-Reihe darstellen.

g) In einer FOURIER-Reihe sind ..... (immer/nicht immer) sowohl Sinus- als auch Kosinusfunktionen enthalten.

h) Die FOURIER-Koeffizienten sind von ..... (einem/keinem) Index abhängig.

540. Folgende Gleichungen sind mit Hilfe der Summensätze herzuleiten:

a) $\sin x = \sin(\pi - x)$ **b)** $\sin(-x) = -\sin x$

c) $\cos x = \cos(2\pi - x)$ **d)** $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

e) $\sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ **f)** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

g) $\cos x = \cos(-x)$ **h)** $\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$

541. Folgende Beziehungen sind mit Hilfe der Summensätze nachzuweisen:

a) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$

b) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

c) $\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$

542. Mit Hilfe von Aufgabe **541.** sind folgende Integrale zu berechnen:

a) $\int \sin mx \cos nx \; dx =$ **b)** $\int \cos mx \cos nx \; dx =$ **c)** $\int \sin mx \sin nx \; dx =$

543. Der fehlende Text ist einzusetzen:

a) Das Produkt zweier ungerader Funktionen ergibt eine ..... (gerade/ungerade) Funktion.

b) Das Produkt zweier gerader Funktionen ergibt eine ..... (gerade/ungerade) Funktion.

c) Das Produkt einer ungeraden und einer geraden Funktion ergibt eine ..... (gerade/ungerade) Funktion.

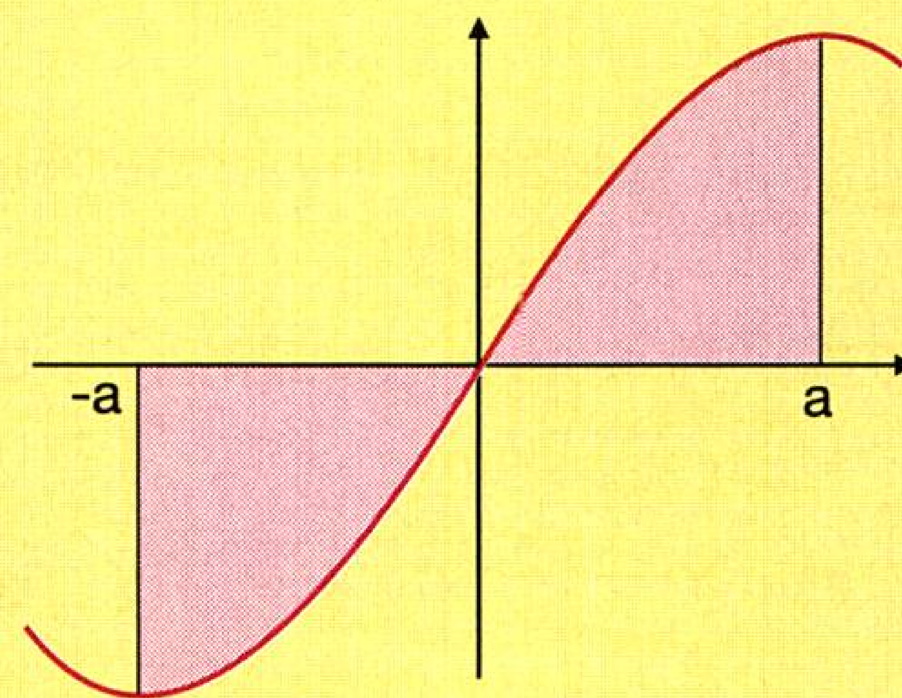
d) Die Summe zweier gerader Funktionen ergibt eine ..... (gerade/ungerade) Funktion.

e) Die Summer zweier ungerader Funktionen ergibt eine ..... (gerade/ungerade) Funktion.

f) Die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion ergibt eine ..... (gerade/ungerade) Funktion.

g) In der FOURIER-Reihe einer geraden Funktion kommen keine ..... (Sinus-/Kosinus-) funktionen vor.

h) In der FOURIER-Reihe einer ungeraden Funktion kommen nur ..... (Sinus-/Kosinus-) funktionen vor.



544. Für eine ungerade Funktion gilt: $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (vgl. nebenstehende Figur). Es ist zu zeigen, dass für eine solche Funktion gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

545. f(x) sei eine ungerade Funktion. Man zeige unter Verwendung der Aufgaben **543.** und **544.**:

a) $f(x) \cdot \cos nx$ ist ebenfalls eine ungerade Funktion.

b) $\int_{-a}^{a} f(x) \cos nx = 0$

546. f(x) sei eine gerade Funktion. Man zeige unter Verwendung der Aufgaben **543.** und **544.**

a) $f(x) \cdot \sin x$ ist eine ungerade Funktion.

b) $\int_{-a}^{a} f(x) \sin nx = 0$

547. Man ermittle den Wert von $\cos n\pi$ für $n \in \{1, 2, ..., 12\}$. Welche der folgenden Beziehungen ist richtig?

a) $\cos n\pi = \pm 1$ **b)** $\cos n\pi = \mp 1$ **c)** $\cos n\pi = (-1)^{n-1}$ **d)** $\cos n\pi = (-1)^{n}$

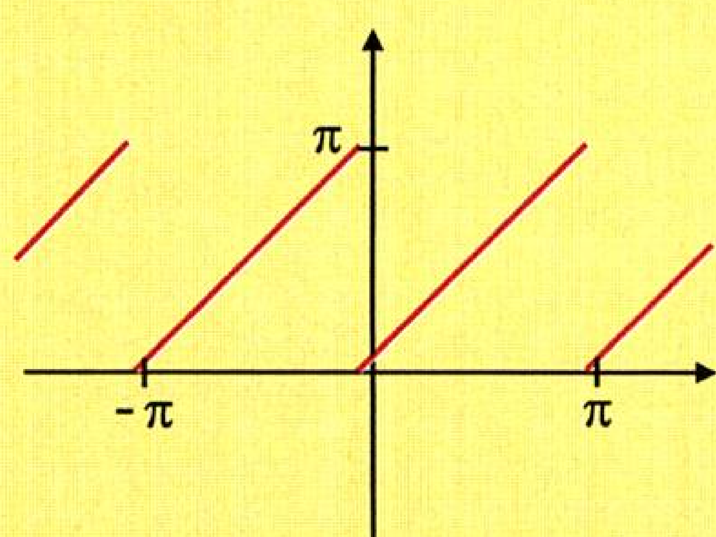
548. Man berechne unter Verwendung von Aufgabe **547.**:

a) $\int_{0}^{n\pi} \cos x\,dx$ **b)** $\int_{0}^{n\pi} \sin x\,dx$

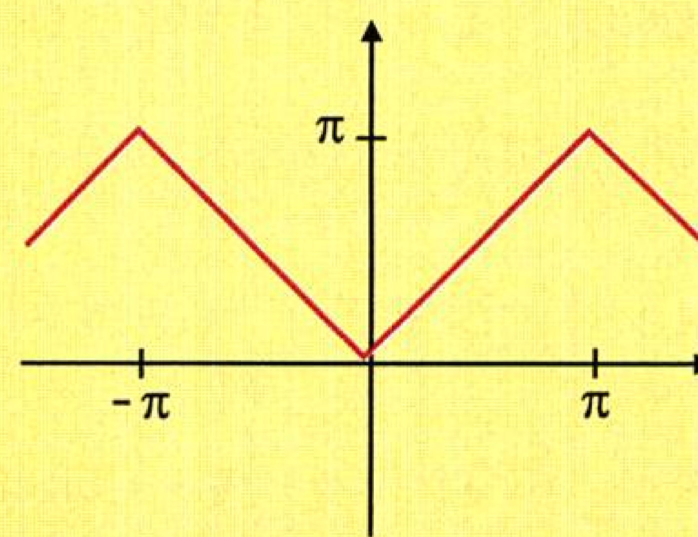
549. Es ist zu zeigen, dass $\cos^n x$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ eine gerade Funktion darstellt.

Folgende, durch ihre Graphen und gegebenenfalls Gleichungen, dargestellten Funktionen sind in eine FOURIER-Reihe zu entwickeln:

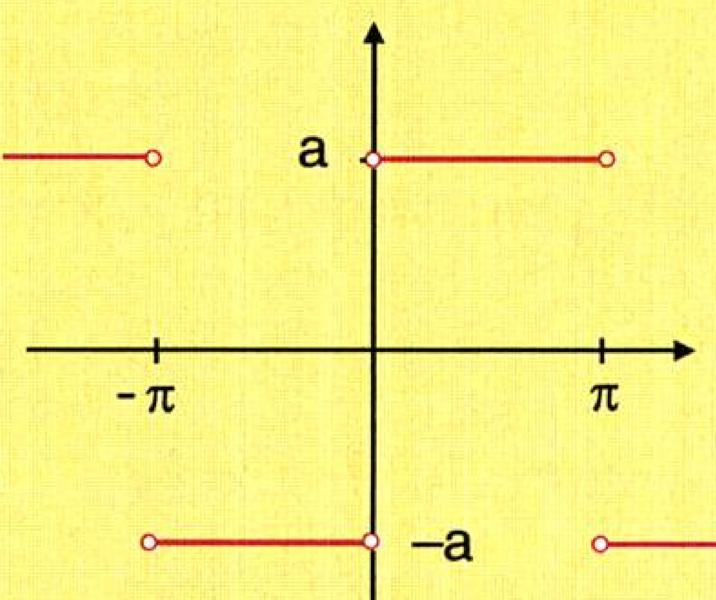
550. a)



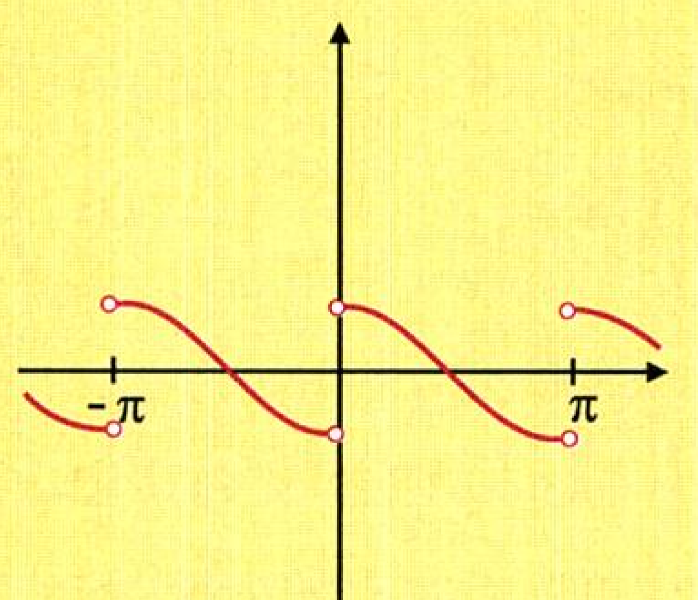
b)



551. a)



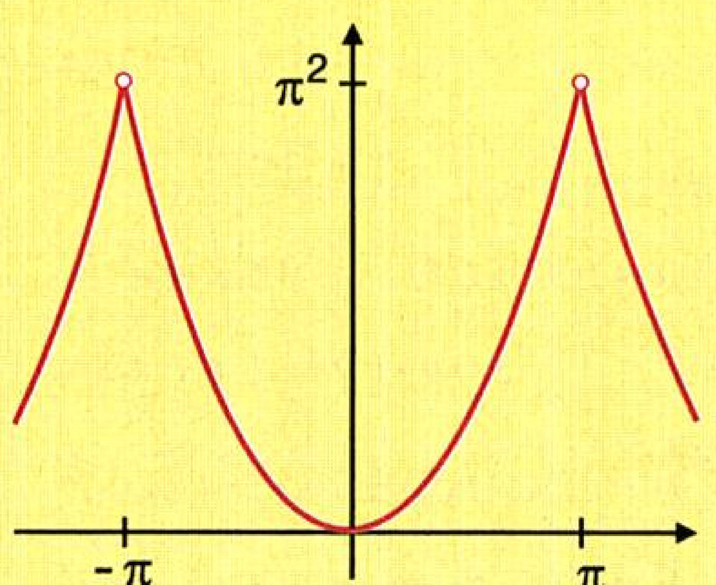
b)



$f(x) = \cos x$

$0 < x < \pi$

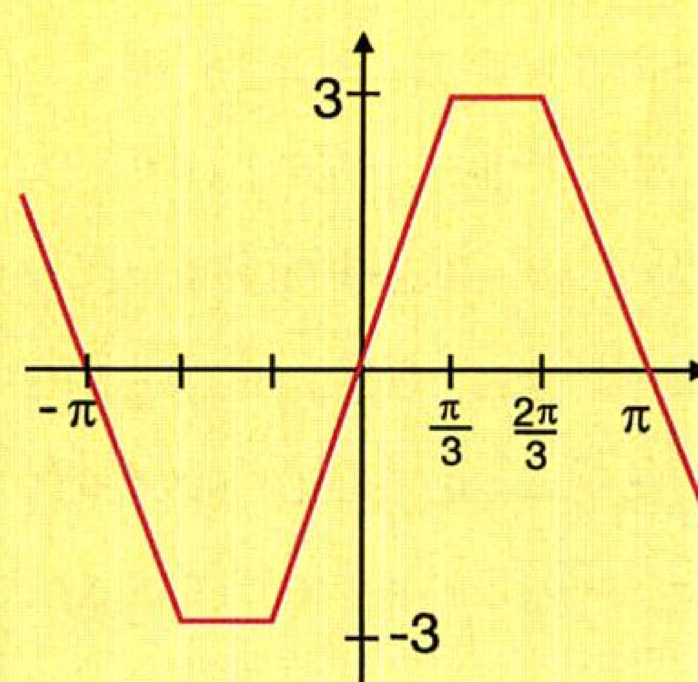
552. a)



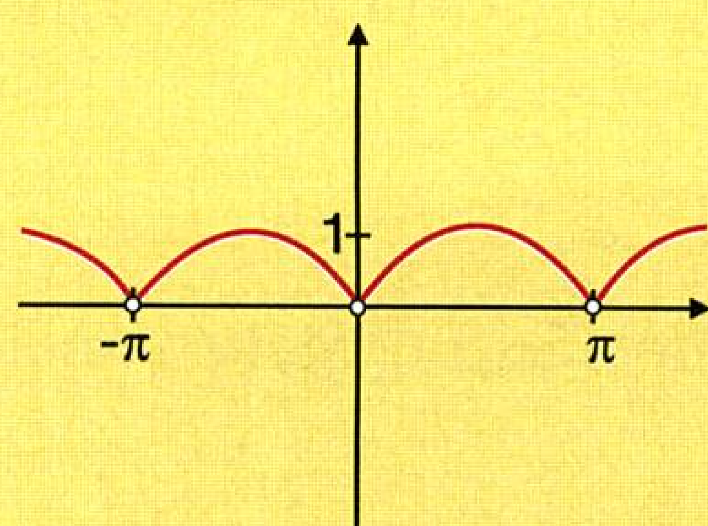
$f(x) = x^2$

$-\pi < x < \pi$

b)

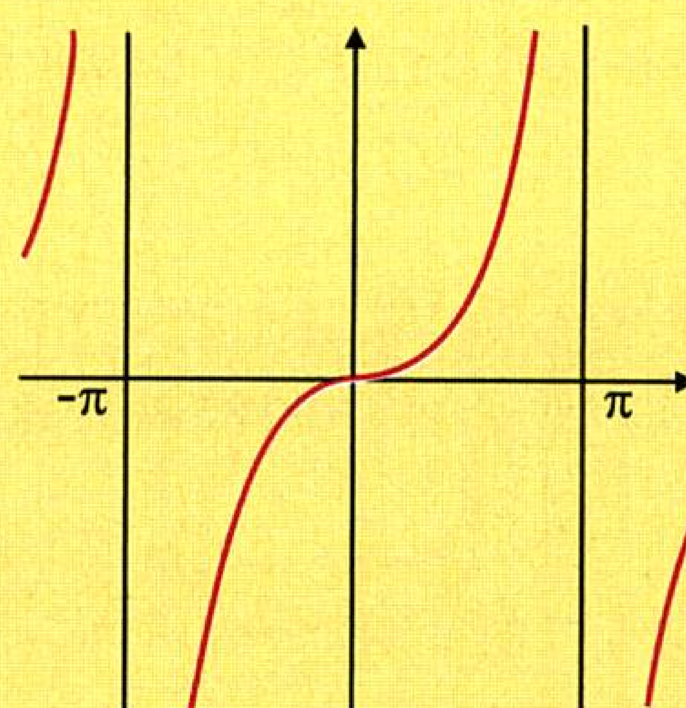


553. a)



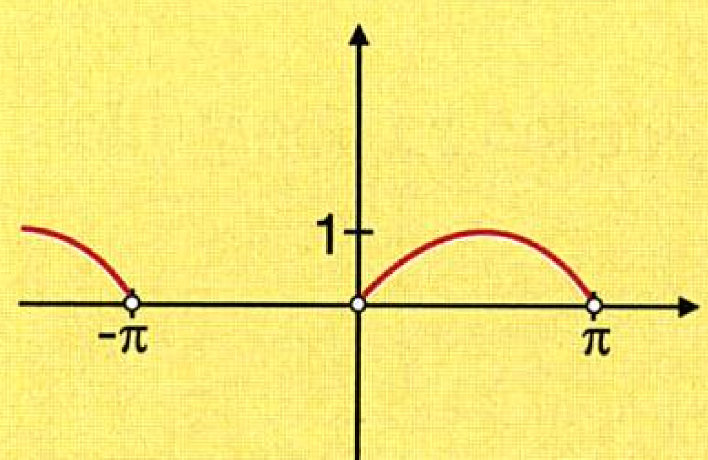
$f(x) = \sin x$
$0 < x < \pi$

b)



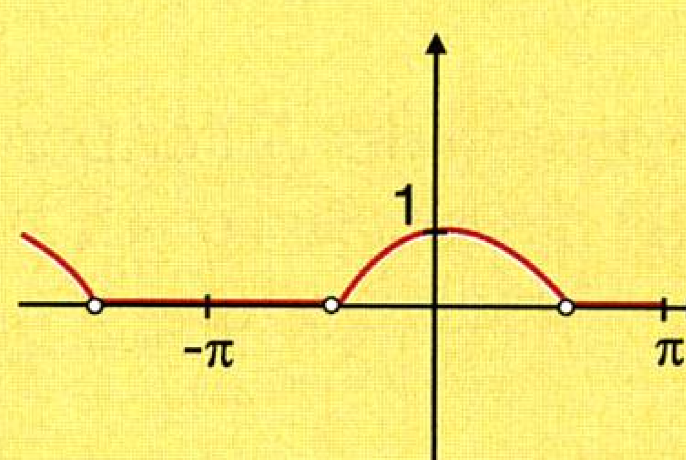
$f(x) = x^3$
$-\pi < x < \pi$

554. a)



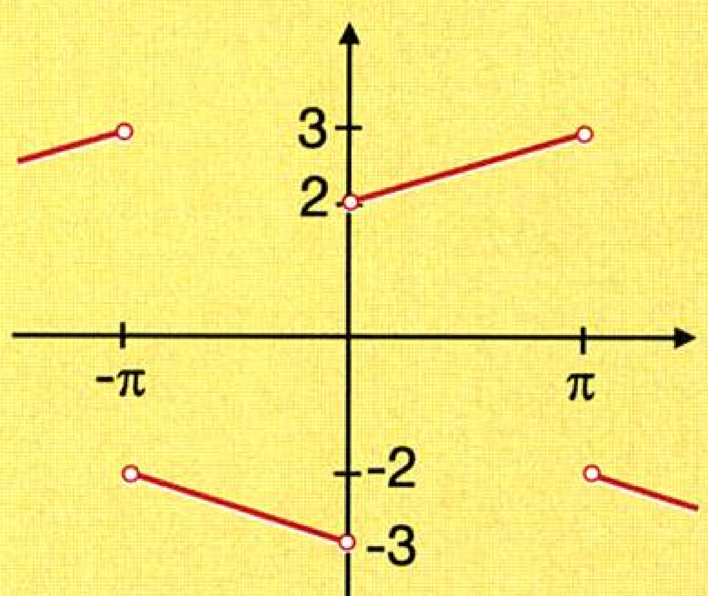
$f(x) = 0$
$-\pi < x < 0$
$f(x) = \sin x$
$0 < x < \pi$

b)

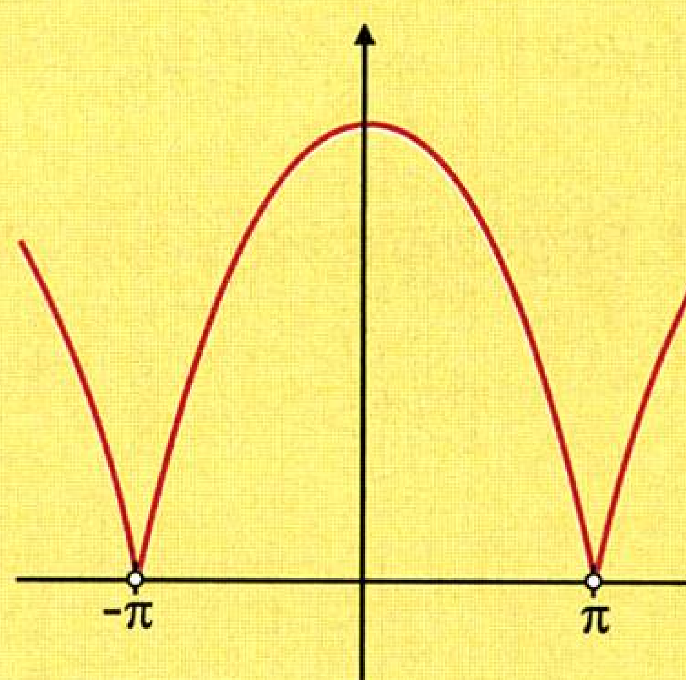


$f(x) = 0$
$-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$,
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
$f(x) = \cos x$
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

555. a)

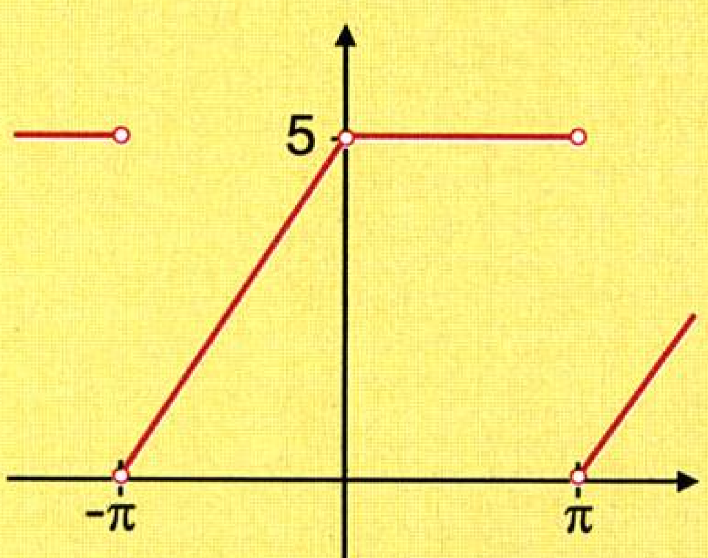


b)

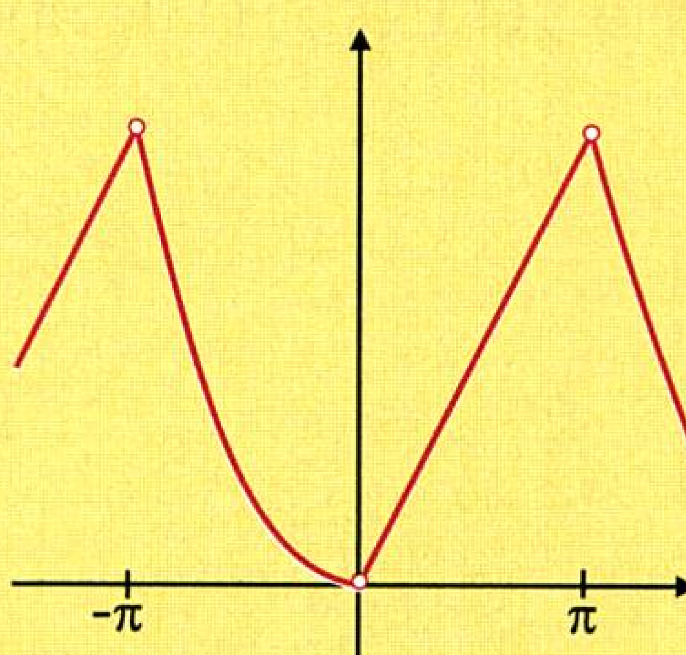


$f(x) = \pi^2 - x^2$
$-\pi < x < \pi$

556. a)

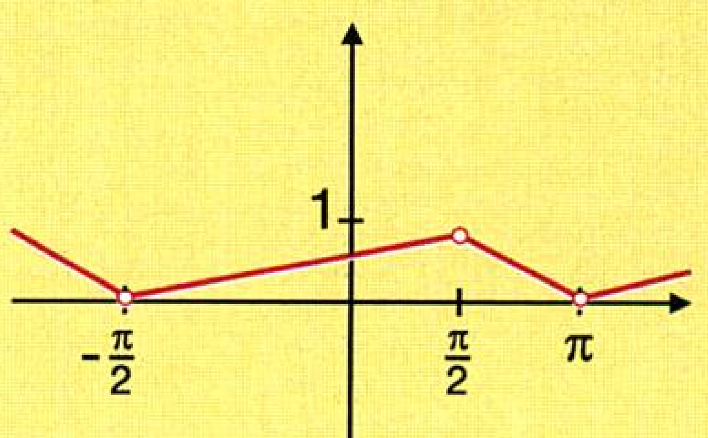


b)

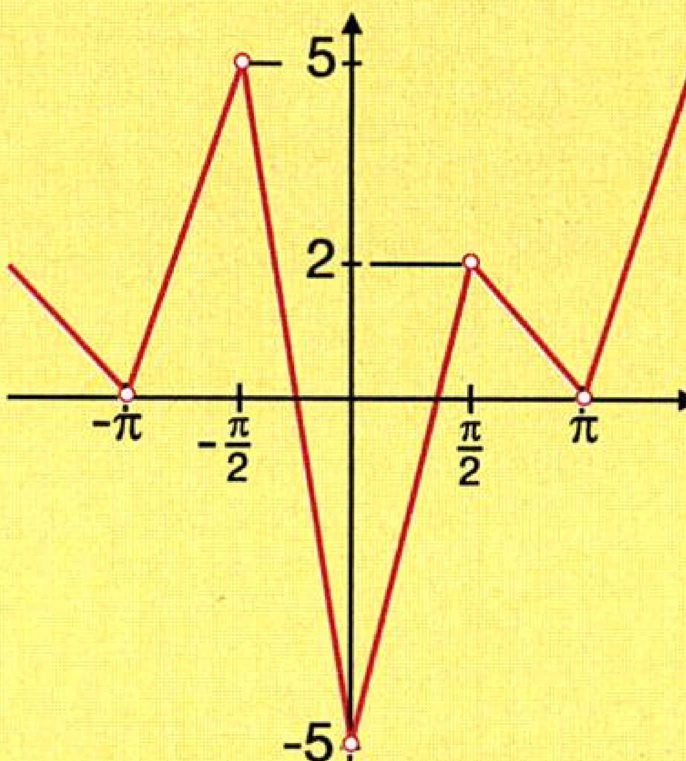


$f(x) = x^2$
$-\pi < x < 0$
$f(x) = \pi x$
$0 < x < \pi$

557. a)



b)



558. Wir haben uns schon in der Theorie mit der Einführung in die Schwingungslehre unter besonderer Berücksichtigung der elementaren Funktionstheorie befasst: nämlich bei der Erwähnung der Differentialgleichung $\ddot{x} = kx$. Diese tritt bei allen harmonischen Schwingungsvorgängen auf. Die Bedeutung von k jedoch variiert. So lässt sich die Frequenz einer Pendelschwingung in Abhängigkeit von k wie folgt anschreiben: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k}$

Die Schwingungsgleichung $x(t) = B \sin \omega t$ ist für ein Pendel mit $k = 5$ anzugeben.

Bemerkung: $\omega = 2\pi f$

559. Das Konvergenzverhalten der unendlichen FOURIER-Reihen wurde bisher stiefmütterlich behandelt. Vor allem an den Sprungstellen einer periodischen Funktion ist das Verhalten der FOURIER-Reihe interessant.

Es gilt folgender Satz:

Die FOURIER-Reihe einer stückweise stetigen Funktion konvergiert an den Sprungstellen nach

$$\frac{1}{2}[\lim_{h\to 0} f(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x-h)].$$

also nach dem arithmetischen Mittel von links- und rechtsseitigem Grenzwert.

Die periodischen Funktionen der Aufgaben **550.** und **557.** sind auf Sprungstellen zu überprüfen. Der Wert der FOURIER-Reihe an diesen Stellen ist zu ermitteln.

560. Der Begriff **FOURIER-Reihe** ist uns schon sehr gut vertraut. Der Arzt jedoch am Beginn des Kapitels sprach von der **FOURIER-Analyse**, als er das EKG (Elektrokardiogramm) des Patienten untersuchte.

Bei Funktionen, wie die Darstellung des Herzschlages, bei denen lediglich der Graph, nicht aber die Funktionsgleichung bekannt ist, versagt die FOURIER-Reihe.

Bei dieser kommt das sogenannte **FOURIER-Integral** vor:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

Das Integral ist mit Hilfe der EULER-Gleichung in Realteil und Imaginärteil zu zerlegen.

INTEGRALTRANSFORMATIONEN

Was haben ein durchgebogener Balken, die Temperaturverteilung in einem Metallstab und der Stromfluss in einem elektrischen Schaltkreis gemeinsam? Bei der Berechnung dieser physikalischen Probleme treten Differenzialgleichungen auf! Und diese lassen sich oft nur mühsam berechnen. Eine sehr elegante Möglichkeit zur Lösung von Differenzialgleichungen ist durch eine spezielle Integraltransformation, die sogenannte **LAPLACE-Transformation** (vgl. Außenspalte), gegeben.

Wir wollen uns diese schwierige Formel etwas genauer ansehen. Die LAPLACE-Transformation einer Funktion f(x) ist auf Grund des Integrationsintervalls $[0, \infty[$ ein bestimmtes, uneigentliches Integral. Dies bedeutet, dass oftmals Grenzwerte zur Ermittlung der LAPLACE-Transformation zu bilden sind. Der Integrand ist das Produkt aus der zu transformierenden Funktion f(x) und dem Faktor e^{-sx}. Das s im Exponenten dieses Faktors ist der **Parameter der Transformation**. Es ist grundsätzlich notwendig, für jede Transformation festzustellen, für welche Werte von s diese zulässig ist. Das Ergebnis ist eine Funktion dieses Parameters s, eben die sogenannte **LAPLACE-Transformierte** von f(x): $\mathscr{L}\{f(x)\} = F(s)$.[1)]

Die Methoden zur Berechnung sind vielfältig. Die direkte Methode, nämlich das Anwenden der Definitionsgleichung ist, wie wir später sehen werden, zwar nicht immer die einfachste Möglichkeit, aber oft zielführend.

LAPLACE-Transformation

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-sx}\, dx = F(s)$$

Die LAPLACE-Transformation hat folgende notwendige Voraussetzungen:

(1) f(x) ist im Intervall $[0, \infty[$ — stückweise — stetig.

(2) Das uneigentliche Integral existiert für alle $s > s_0$.

Im vorliegenden Kapitel beschränken wir uns auf $s \in \mathbb{R}$. In manchen Gebieten der höheren Mathematik und ihrer Anwendungen ist $s \in \mathbb{C}$.

Beispiel:

Man berechne $\mathscr{L}\{f(x)\}$ für **a)** $f(x) = 1$ **b)** $f(x) = x$, für $x \geqslant 0$ **c)** $f(x) = x^2$, für $x \geqslant 0$

Lösung:

a) $$\mathscr{L}\{f(x)\} = \mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx}\, dx = \lim_{P\to\infty}\left(\left[\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_0^P\right) = \lim_{P\to\infty}\left(\frac{e^{-sP}}{-s} + \frac{1}{s}\right) =$$

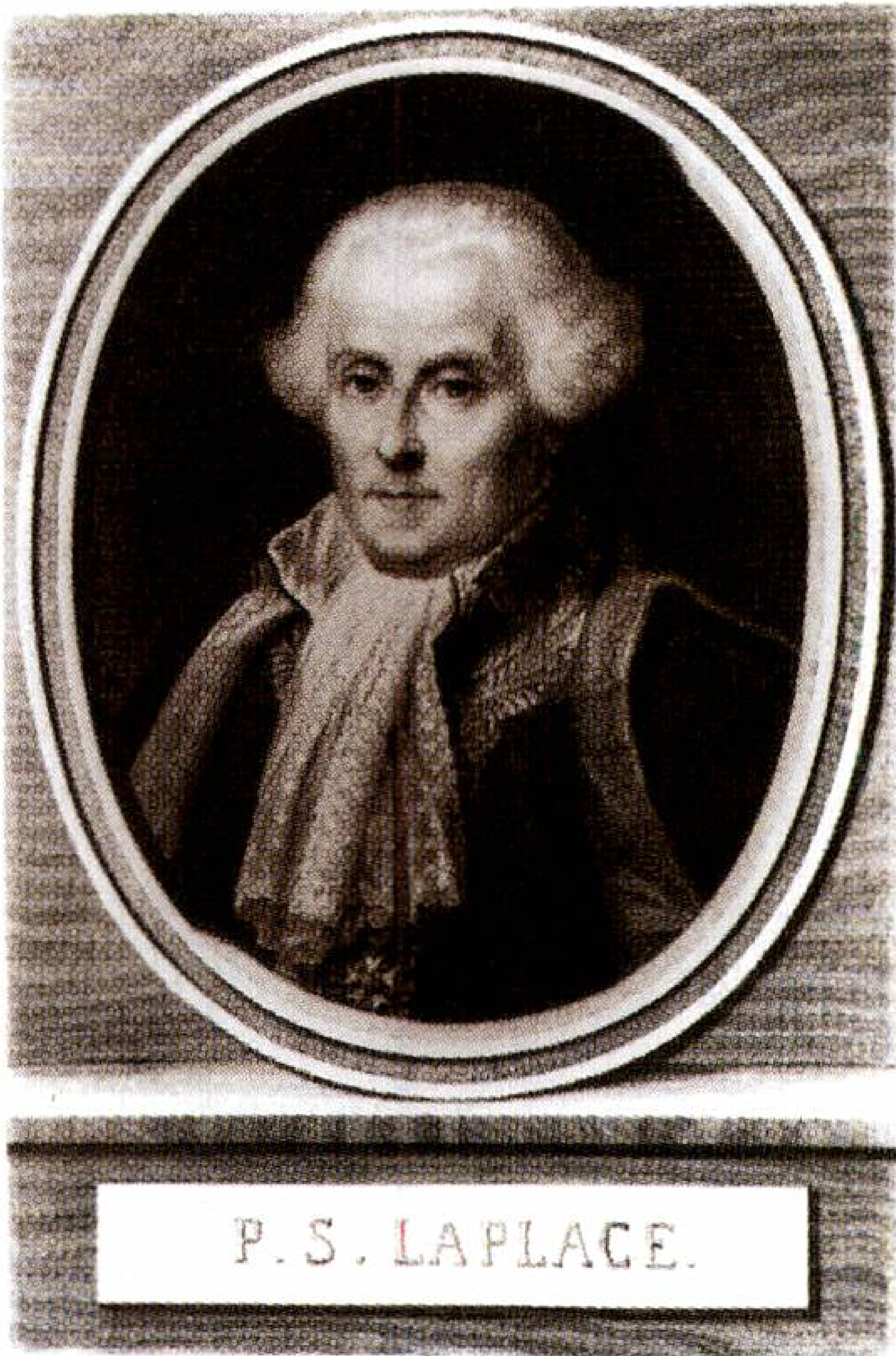
$$\lim_{P\to\infty}\frac{e^{-sP}}{-s} = 0 \quad \text{für } s > 0 \Rightarrow \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \textbf{für } s > 0$$

b) $$\mathscr{L}\{f(x)\} = \mathscr{L}\{x\} = \int_0^\infty x \cdot e^{-sx}\, dx = \lim_{P\to\infty}\left(\left[x \cdot \frac{e^{-sx}}{-s}\right]_0^P + \frac{1}{s}\int_0^P e^{-sx}\, dx\right) =$$

$$= \lim_{P\to\infty}\left(P \cdot \frac{e^{-sP}}{-s} + 0\right) + \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = 0 + \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s^2} \quad \textbf{für } s > 0$$

c) $$\mathscr{L}\{f(x)\} = \mathscr{L}\{x^2\} = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-sx}\, dx = \lim_{P\to\infty}\left(\int_0^P x^2 \cdot e^{-sx}\, dx\right) =$$

$$= \lim_{P\to\infty}\left(\left[x^2 \cdot \frac{e^{-sx}}{-s}\right]_0^P + \frac{2}{s}\int_0^P x \cdot e^{-sx}\, dx\right) = 0 + \frac{2}{s}\mathscr{L}\{x\} = \frac{2}{s^3} \quad \textbf{für } s > 0$$



Pierre Simon de LAPLACE (1749 – 1827), französischer Mathematiker und Astronom, ist uns schon bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung begegnet. Er bewies u. a. die Stabilität der Planetenbahnen.

1) Zur Vermeidung von Verwechslungen wird die Orginalfunktion hier immer mit Kleinbuchstaben, z. B. f(x), die Bildfunktion mit Großbuchstaben, z. B. F(s), bezeichnet.

Beispiel:

Man ermittle $\mathcal{L}\{f(x)\}$ für **a)** $f(x)=e^{ax}$ für $x \geqslant 0$ und $a>0$ **b)** $f(x)=\sin ax$

Lösung:

a) $\mathcal{L}\{f(x)\}=\mathcal{L}\left\{e^{ax}\right\}=\int\limits_0^{\infty} e^{ax}\cdot e^{-sx}\,dx=\lim\limits_{P\to\infty}\left(\int\limits_0^{P} e^{(a-s)x}\,dx\right)=$

$=\lim\limits_{P\to\infty}\left(\left[\frac{1}{a-s}\cdot e^{(a-s)x}\right]_0^P\right)=\frac{1}{s-a}\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{ax}\right\}=\frac{1}{s-a}$ **für $s>a$**

Die direkte Methode zur Ermittlung von LAPLACE-Transformationen ist also immer dann geeignet, wenn das Integral der Definitionsgleichung leicht lösbar ist.

b) Aus a) folgt: $\mathcal{L}\left\{e^{jax}\right\}=\frac{1}{s-aj}=\frac{s+aj}{s^2+a^2}=\frac{s}{s^2+a^2}+j\frac{a}{s^2+a^2}$,

$j=$ imaginäre Einheit[1)]

Wir wissen: $e^{jax}=\cos ax+j\cdot\sin ax$

$\mathcal{L}\left\{e^{jax}\right\}=\mathcal{L}\{\cos ax\}+j\cdot\mathcal{L}\{\sin ax\}\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin ax\}=\frac{a}{s^2+a^2}$, **für $s>0$**

Damit es nicht zu kompliziert wird, wollen wir in der folgenden Tabelle einige LAPLACE-Transformationen elementarer Funktionen vorwegnehmen.

Originalfunktion f(x)	Bildfunktion $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$
c	$\frac{c}{s}$, $s>0$
x	$\frac{1}{s^2}$, $s>0$
x^2	$\frac{2}{s^3}$, $s>0$
x^3	$\frac{6}{s^6}$, $s>0$
x^n, $n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$
$e^{\pm ax}$	$\frac{1}{s\mp a}$, $s>\pm a$
$1+e^{\pm ax}$	$\frac{2s\mp a}{s(s\mp a)}$, $s>\pm a$, $a>0$
$1-e^{\pm ax}$	$\frac{\mp a}{s(s\mp a)}$, $s>\pm a$, $a>0$

Originalfunktion f(x)	Bildfunktion $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s>0$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$
$e^{\mp bx}\sin ax$	$\frac{a}{(s\pm b)^2+a^2}$, $s>\mp b$
$e^{\mp bx}\cos ax$	$\frac{s\pm b}{(s\pm b)^2+a^2}$, $s>\mp b$
$x\sin ax$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$, $s>0$
$x\cos ax$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$, $s>0$
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s>\lvert a\rvert$
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s>\lvert a\rvert$

[1)] In Analogie zum Kapitel „Differenzialgleichungen“ wollen wir auch hier die in der Elektrotechnik übliche Schreibweise j für die imaginäre Einheit verwenden.

Die nächsten Beispiele sollen uns zeigen, wann und wie die Formeln in der Außenspalte mit Hilfe der auf Seite **226** angeführten Tabelle angewendet werden.

Beispiel:

Man ermittle $\mathcal{L}\{f(x)\}$ für **a)** $f(x) = 3 + 5x - 7e^{-2x}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x-5) \text{ für } x > 5 \\ 0 \text{ für } x \leq 5 \end{cases}$ **c)** $f(x) = e^{-7x}\cos 4x$ **d)** $f(x) = x^2 \cos 2x$

e) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ **f)** $f(x) = \frac{\sin 3x}{3x}$

Lösung:

(1)

a) $\mathcal{L}\left\{3 + 5x - 7e^{-2x}\right\} = 3\,\mathcal{L}\{1\} + 5\,\mathcal{L}\{x\} - 7\,\mathcal{L}\{e^{-2x}\} =$

$= 3\frac{1}{s} + 5\frac{1}{s^2} - 7\frac{1}{s+2} = \frac{3}{s} + \frac{5}{s^2} - \frac{7}{s+2}$

(3)

b) $\mathcal{L}\{\sin(x-5)\} = e^{-5s}\,\mathcal{L}\{\sin x\} = e^{-5s}\frac{1}{s^2+1}$, $\mathcal{L}\{0\} = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(x)\} = \begin{cases} \frac{e^{-5s}}{s^2+1} & \text{für } x > 5 \\ 0 & \text{für } x \leqslant 5 \end{cases}$

(3)

c) $\mathcal{L}\{e^{-7x}\cos 4x\} = \frac{(s+7)}{(s+7)^2+4^2} = \frac{s+7}{s^2+14s+49+16} = \frac{s+7}{s^2+14s+65}$

(4)

d) $\mathcal{L}\{x^2\cos 2x\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\,\mathcal{L}\{\cos 2x\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right) =$

$= \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{-2s(s^2+4)^2 - 2(s^2+4)2s(4-s^2)}{(s^2+4)^4} =$

$= \frac{-2s(s^2+4) - 4s(4-s^2)}{(s^2+4)^3} = \frac{-2s(s^2+4+8-2s^2)}{(s^2+4)^3} = \frac{2s(s^2-12)}{(s^2+4)^3}$

(5)

e) $\mathcal{L}\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{\sin x}{x}\} = \int\limits_s^\infty \frac{1}{1+u^2}du = \lim\limits_{P\to\infty}[\arctan u]_s^P =$

$= \lim\limits_{P\to\infty}(\arctan P - \arctan s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \mathbf{arctan}\ \frac{1}{s}$

(2)

f) Mit $\mathcal{L}\{\frac{\sin x}{x}\} = \arctan\frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{\sin 3x}{3x}\} = \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{(\frac{1}{3})s} = \frac{1}{3}\mathbf{arctan}\ \frac{3}{s}$

Im Zusammenspiel zwischen den Sätzen über LAPLACE-Transformationen und der Tabelle auf Seite **226** lassen sich schon sehr komplizierte Transformationen lösen.

Wichtige Sätze über LAPLACE-Transformationen

(1) Additionssatz:

$\mathcal{L}\left\{c_1f_1(x) + c_2f_2(x)\right\} =$

$= c_1\,\mathcal{L}\left\{f_1(x)\right\} + c_2\,\mathcal{L}\left\{f_2(x)\right\}$

(2) Ähnlichkeitssatz:

$\mathcal{L}\left\{f(ax)\right\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

(3) Verschiebungssätze:

1. $\mathcal{L}\left\{f(x-a)\right\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} =$

   $= e^{-as}F(s)$

2. $\mathcal{L}\left\{e^{ax}f(x)\right\} = F(s-a)$

3. $\mathcal{L}\left\{e^{-ax}f(x)\right\} = F(s+a)$

(Man nennt den 3. Verschiebungssatz auch Dämpfungssatz.)

(4) Multiplikationssatz:

$\mathcal{L}\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$

(5) Division durch Variable:

$\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int\limits_s^\infty F(u)du$

(6) Integrationssatz:

$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x f(y)dy\right\} = \frac{F(s)}{s}$

(7) Differenziationssätze:

1. $\mathcal{L}\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$

2. $\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

3. $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = s^nF(s) -$

   $-[f^{(n-1)}(0) + sf^{(n-2)}(0) + \ldots$

   $\ldots + s^{(n-1)}f(0)]$

Wir wissen nun, wie man zu einer gegebenen Funktion die LAPLACE-Transformierte ermittelt. Da stellt sich nun die Frage: Geht das auch in der „anderen" Richtung, d. h. kann man zu einer gegebenen LAPLACE-Transformierten F(s) die Orginalfunktion f(x) eindeutig ermitteln? Ohne Beweis sei angeführt, dass das grundsätzlich funktioniert. Man nennt dann die Funktion f(x) die **inverse LAPLACE-Transformierte** von F(s) und schreibt $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Verwendung von LAPLACE-Transformationen bei der Lösung von Differenzialgleichungen:

(1) Transformation der Differenzialgleichung mit den Differenziationssätzen.

(2) Explizites Darstellen von F(s).

(3) Inverse LAPLACE-Transformation

Man vergleiche den Typus der Differenzialgleichung im Beispiel in der Hauptspalte mit den folgenden Differenzialgleichungen:

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \dot{x} = \frac{dx}{dt} = V$

(Bewegungsgleichung mit Reibungsglied $r\dot{x}$) bzw.

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E$

$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}, \dot{q} = \frac{dq}{dt} = i$

(Schaltkreis mit Spule, Widerstand und Kondensator).
Was fällt dabei auf?

Beispiel:

a) Man ermittle $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{3}x}\sin x}{x}dx$

b) Es ist die Differenzialgleichung $y'' + 8y' + 25y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2$ unter Verwendung von LAPLACE-Transformationen zu lösen.

Lösung:

a) Es gilt: $\mathscr{L}\{\frac{\sin x}{x}\} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-sx}dx = \arctan\frac{1}{s}$ (vgl. Beispiel **e)** auf Seite 227)

Für $s = \sqrt{3} \Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\sqrt{3}x}dx = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{3}x}\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{6}$$

b) Unter Berücksichtigung von $y'' = f''(x)$, $y' = f'(x)$, $y = f(x)$, sowie $y(0) = f(0)$, $y'(0) = f'(0)$ und mit Hilfe der Differenziationssätze wird die Differenzialgleichung transformiert.

$$y'' + 8y' + 25y = 0$$
$$s^2F(s) - sy(0) + y'(0) + 8(sF(s) - y(0)) + 25F(s) = 0$$
$$s^2F(s) - 3s - 2 + 8sF(s) - 24 + 25F(s) = 0$$
$$F(s)(s^2 + 8s + 25) = 3s + 26$$
$$F(s) = \frac{3s+26}{s^2+8s+25}$$

Um die inverse LAPLACE-Transformation auszuführen, ist der Term auf der rechten Seite derart umzuformen, dass er den in der Tabelle auf Seite **226** enthaltenen Bildfunktionen entspricht!

$$\frac{3s+26}{s^2+8s+25} = \frac{\overbrace{3s+12}^{3(s+4)} + 14}{\underbrace{s^2+8s+16}_{(s+4)^2}+9} = \frac{3(s+4)}{(s+4)^2+9} + \frac{14}{(s+4)^2+9} = 3\frac{(s+4)}{(s+4)^2+9} + \frac{14}{3}\frac{3}{(s+4)^2+9}$$

$$\Rightarrow y(x) = 3e^{-4x}\cos 3x + \frac{14}{3}e^{-4x}\sin 3x$$

Zusammenhang zwischen dem Beispiel in der Hauptspalte und der Tabelle auf Seite 226:

$\frac{(s+4)}{(s+4)^2+3^2}$ entspricht der Bildfunktion $\frac{(s+b)}{(s+b)^2+a^2}$ für $a = 3$ und $b = 4$. Die zugehörige Originalfunktion lautet daher $e^{-4x}\cos 3x$.

$\frac{3}{(s+4)^2+3^2}$ entspricht der Bildfunktion $\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$ für $a = 3$ und $b = 4$. Die zugehörige Originalfunktion lautet daher $e^{-4x}\sin 3x$.

Um also eine homogene, lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten und gegebenen Anfangsbedingungen zu lösen, ist es mit Hilfe der LAPLACE-Transformationen nicht mehr notwendig, zuerst die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung zu ermitteln.

Zusätzlich zeigt das obige Beispiel, dass man quasi als „Abfallprodukt" der LAPLACE-Transformationen spezielle bestimmte Integrale sehr elegant lösen kann!

Beispiel:

An einen Stromkreis mit in Serie geschaltetem Widerstand R, Kondensator C und Spule L wird eine konstante Spannung von U_0 unter Berücksichtigung von $\frac{4L-R^2C}{4L^2C}=\omega^2>0$ angelegt, wobei die Ladung des Kondensators zur Zeit $u(t=0)=0$ beträgt, ebenso ist der Strom $i(t=0)=0$. Ermittle mit Hilfe der LAPLACE-Transformationen jeweils q(t) sowie i(t)!

Lösung:

Zuerst wird die Differenzialgleichung aufgestellt, wobei wir berücksichtigen, dass die Variable t die Zeit ist. Die Summe der Spannungsabfälle an den Bauteilen ist gleich der angelegten Spannung:

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{q(t)}{C}=U_0\Rightarrow L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=U_0\Rightarrow\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{LC}q(t)=\frac{U_0}{L}$$

Diese Differenzialgleichung ist natürlich auch mit herkömmlichen Methoden lösbar, eleganter und rascher (da nicht zuerst die homogene Lösung ermittelt werden muss) geht es mit Hilfe der LAPLACE-Transformation.

Unter Beachtung von $\mathscr{L}\{\dot{q}(t)\}=sQ(s)-q(0)$ bzw. $\mathscr{L}\{\ddot{q}(t)\}=s^2Q(s)-sq(0)-\dot{q}(0)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}s^2Q(s)-sq(0)-\dot{q}(0)+\frac{R}{L}(sQ(s)-q(0))+\frac{1}{LC}Q(s)&=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\\ s^2Q(s)+\frac{R}{L}sQ(s)+\frac{1}{LC}Q(s)&=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\\ Q(s)\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)&=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\\ Q(s)&=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}\end{aligned}$$

Umformung des Bruchs auf der rechten Seite (vollständiges Quadrat):

$$Q(s)=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{4L-R^2C}{4L^2C}}$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch und setzen $\frac{R}{2L}=\delta$ sowie $\frac{4L-R^2C}{4L^2C}=\omega^2>0$.

$$\frac{1}{s}\frac{1}{(s+\delta)^2+\omega^2}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+D}{(s+\delta)^2+\omega^2}$$

Mit $A=CL$, $B=-CL$ und $D=-RC$ gilt also:

$$\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{4L-R^2C}{4L^2C}}=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{(s+\delta)^2+\omega^2}=\frac{U_0}{L}\left(\frac{LC}{s}+\frac{-LCs-RC}{(s+\delta)^2+\omega^2}\right)=\frac{U_0LC}{L}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{R}{L}}{(s+\delta)^2+\omega^2}\right)=U_0C\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}+\frac{\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}\right)$$

Dabei ist im letzten Schritt zu berücksichtigen, dass $\frac{R}{2L}=\delta$ gilt.

Um die inverse LAPLACE-Transformation durchzuführen, ist der letzte Bruch wie folgt umzuformen:

$$U_0C\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}-\frac{\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}\right)=U_0C\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}-\frac{\delta}{\omega}\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}\right)$$

Nun die Rücktransformation:

$$\mathscr{L}^{-1}\{Q(s)\}=q(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{U_0C\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}-\frac{\delta}{\omega}\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}\right)\right\}=U_0C\left(1-e^{-\delta t}\cos\omega t-\frac{\delta}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t\right)=$$

$=\mathbf{U_0C\left[1-e^{-\delta t}\left(\cos\omega t+\frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)\right]}$, wobei wir den 2. Verschiebungssatz und die Formeln für sin ax und cos ax von der Tabelle auf Seite **226** verwendet haben.

Um von der Funktion $q(t) = U_0C\left[1 - e^{-\delta t}(\cos\omega t - \frac{\delta}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t)\right]$ auf den Strom i(t) zu gelangen, müssen wir die 1. Ableitung nach der Zeit bilden:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{U_0C\left[1 - e^{-\delta t}\left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)\right]\right\} = U_0C\left(\delta e^{-\delta t}\left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right) - e^{-\delta t}(-\omega\sin\omega t + \delta\cos\omega t)\right) =$$

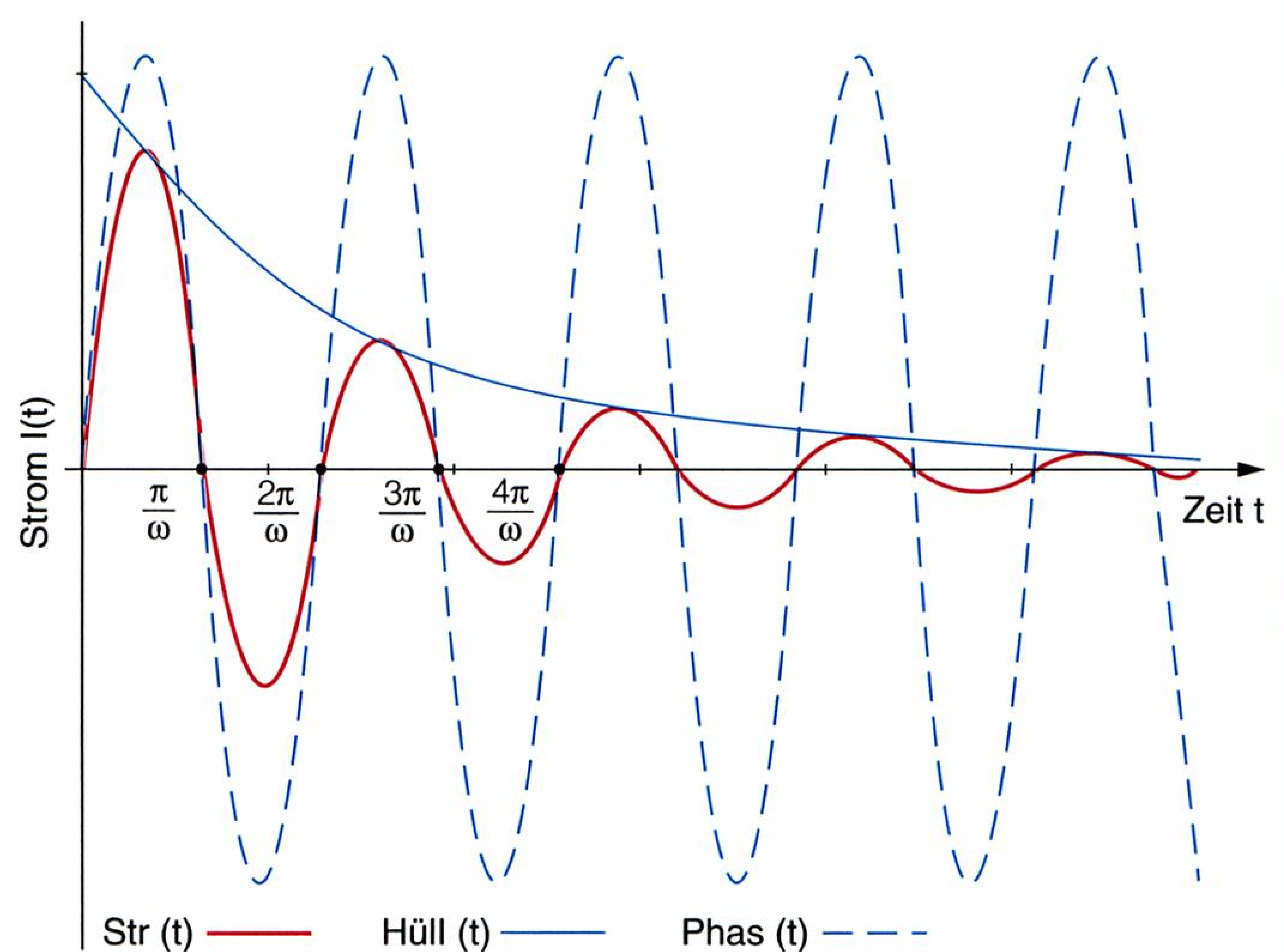
$$= U_0C\left(\delta e^{-\delta t}\cos\omega t + \frac{\delta^2}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t + \omega e^{-\delta t}\sin\omega t - \delta e^{-\delta t}\cos\omega t\right) = U_0C\left(\frac{\delta^2}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t + \omega e^{-\delta t}\sin\omega t\right) =$$

$$= U_0C\left(\frac{\delta^2 + \omega^2}{\omega}\right)e^{-\delta t}\sin\omega t$$

Und unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen für δ bzw. ω erhalten wir:

$$U_0C\left(\frac{\delta^2 + \omega^2}{\omega}\right)e^{-\delta t}\sin\omega t = U_0C\left(\frac{1}{\omega LC}\right)e^{-\delta t}\sin\omega t = \frac{U_0}{\omega L}e^{-\delta t}\sin\omega t \Rightarrow \mathbf{i(t)} = \frac{U_0}{\omega L}e^{-\delta t}\sin\omega t$$

Der Faktor $e^{-\delta t}$ nimmt mit der Zeit ab und sorgt dafür, dass der Strom gegen Null geht. Dies geschieht umso schneller, je größer R bzw. je kleiner L ist. Die Frequenz des Systems ist mit $\omega = \sqrt{\frac{4L - R^2C}{4L^2C}}$ gegeben. Die nebenstehende Grafik zeigt den Verlauf der Stormstärke in diesem Fall.



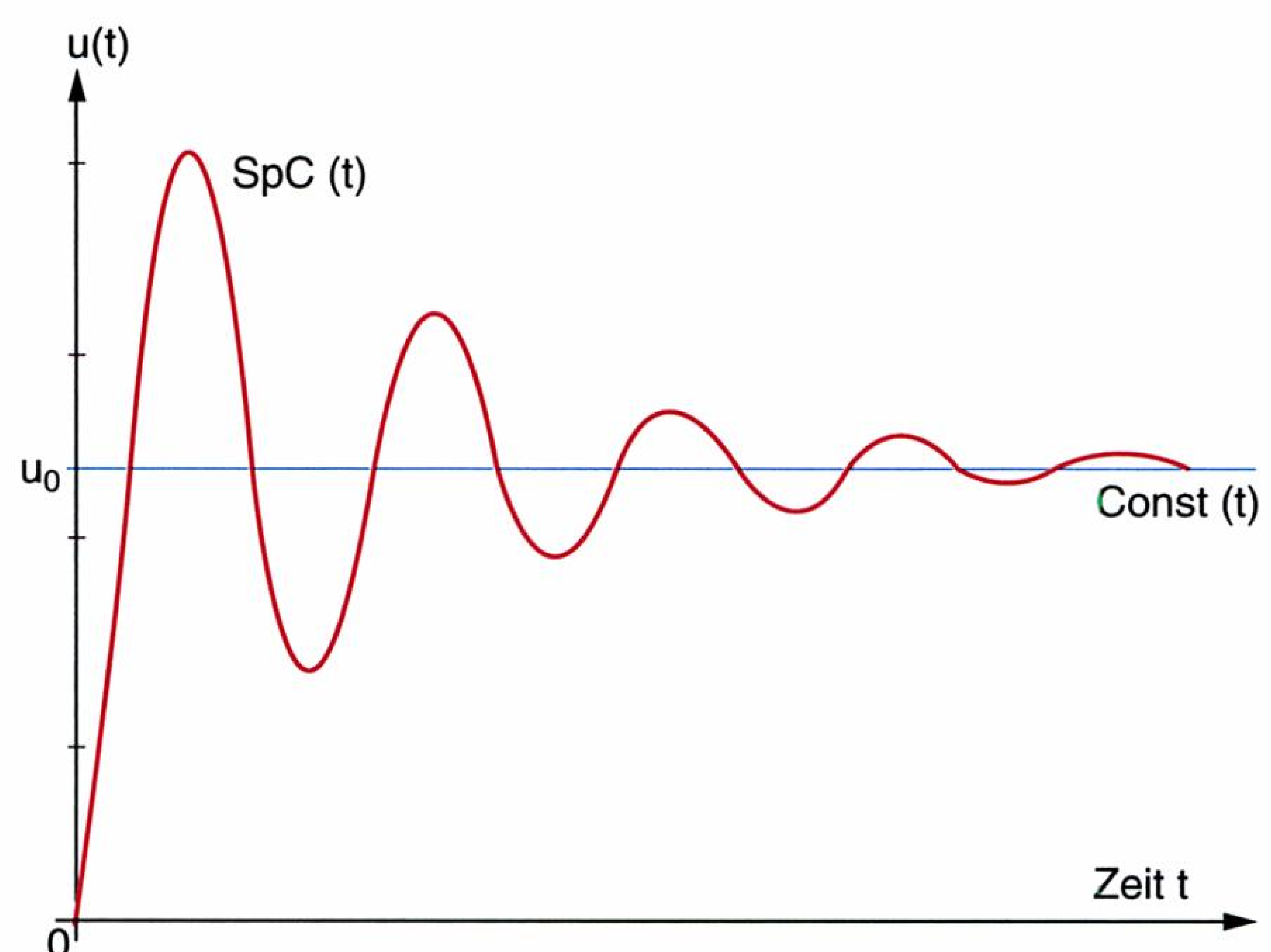
Phas (t) zeigt den reinen Sinusanteil, Hüll(t) den Exponentialteil des Stroms, Str(t) den Strom i(t), der sich aus Überlagerung von Phas (t) und Hüll (t) ergibt.

Zu beachten ist, dass Phas (t) und Hüll (t) zum Zweck des besseren Vergleichs mit dem Vorfaktor $\frac{U_0}{\omega L}$ multipliziert wurden.

Interessant ist auch der Verlauf der Spannung am Kondensator, die natürlich mit $U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ gegeben ist:

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_0\left[1 - e^{-\delta t}\left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

Die Spannung pendelt sich natürlich bei U_0 (in der Grafik als Const(t) bezeichnet) ein.



Beachten Sie, dass die Spannung am Kondensator auch größer wird als die angelegte Spannung.

Um zu überprüfen, ob die ursprüngliche Differenzialgleichung tatsächlich korrekt gelöst wurde, ist noch $\frac{d^2q(t)}{dt^2} = \frac{di(t)}{dt}$ zu ermitteln und in die Differenzialgleichung einzusetzen.

Überprüfen Sie auch die Anfangsbedingungen!

AUFGABEN

561. Man ermittle folgende LAPLACE-Transformationen:

a) $\mathscr{L}\{-3\}$ **b)** $\mathscr{L}\{8\}$ **c)** $\mathscr{L}\{2x\}$ **d)** $\mathscr{L}\left\{-\frac{4}{3}x\right\}$

e) $\mathscr{L}\left\{3x^2+7\right\}$ **f)** $\mathscr{L}\left\{8x^3-7x\right\}$ **g)** $\mathscr{L}\left\{e^{-2x}\right\}$ **h)** $\mathscr{L}\left\{7e^{\frac{2}{3}x}\right\}$

562. Der Additionssatz ist zu beweisen.

Anleitung: $\mathscr{L}\{c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\}=\int_0^\infty (c_1f_1(x)+c_2f_2(x))e^{-sx}dx=\ldots$

563. Der Ähnlichkeitssatz ist zu beweisen.

Anleitung: Mit der Definitionsgleichung und der Substitution $u=ax$ erhält man ...

564. Man zeige $\mathscr{L}\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2}$

a) durch die EULERsche Formel ($e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$) [1]

b) durch zweimaliges Integrieren.

565. Es sind die LAPLACE-Transformationen zu ermitteln:

a) $\mathscr{L}\{\sin x+\cos x\}$ **b)** $\mathscr{L}\{7\sin 2x\}$ **c)** $\mathscr{L}\{3\cos 8x\}$ **d)** $\mathscr{L}\left\{(\sin x-\cos x)^2\right\}$

566. Es ist für nachfolgende Funktionen f(x) die LAPLACE-Transformierte $\mathscr{L}\{f(x)\}$ zu bestimmen.

a) $f(x)=e^{-3x}\sin 2x$ **b)** $f(x)=e^{-4x}(2\sin x+7\sin 2x)$ **c)** $f(x)=x^2\cos 4x$ **d)** $f(x)=(x-7)^2e^x$

567. Man bestimme **a)** $\mathscr{L}\{\sinh ax\}$ und **b)** $\mathscr{L}\{\cosh ax\}$

Anleitung: $\sinh ax=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$, $\cosh ax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$

568. Die Γ-Funktion[2] ist für $n>0$ definiert mit $\Gamma(n)=\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du$. Man berechne:

a) $\Gamma(1)$ **b)** $\Gamma(2)$

569. Es ist zu beweisen:

a) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ **b)** $\Gamma(n+1)=n!$ für $n\in\mathbb{N}$

570. Man zeige, dass für $n>0$ $\mathscr{L}\left\{x^n\right\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ gilt.

Anleitung: Einsetzen in die Definitionsgleichung der LAPLACE-Transformation und Substitution $sx=u$.

571. Die **Faltung zweier Funktionen** f(x) und g(x), man schreibt $f(x)*g(x)$, ist definiert mit:

$$f(x)*g(x)=\int_0^x f(u)g(x-u)du$$

Es ist die Faltung für die nachfolgend angegebenen Funktionen zu ermitteln:

a) $f(x)=1,\ g(x)=1$ **b)** $f(x)=2x,\ g(x)=3$ **c)** $f(x)=e^x,\ g(x)=e^x$ **d)** $f(x)=4x^2,\ g(x)=e^x$

[1]) vgl. Fußnote auf Seite **226**.
[2]) Man lese: Gamma-Funktion.

572. Es sei $f(x)*g(x)$ die Faltung der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, dann gilt (ohne Beweis) der sogenannte **Faltungssatz**:

$$\mathcal{L}\{f(x)*g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\}$$

Mit den Angaben (und Lösungen) der Aufgabe **571.** ist der Faltungssatz zu überprüfen, indem man sowohl $\mathcal{L}\{f(x)*g(x)\}$, als auch $\mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\}$ bestimmt.

573. Von den nachstehenden Transformierten $F(s)$ ist die inverse LAPLACE-Transformierte $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ zu ermitteln:

a) $F(s) = \frac{1}{s-5}$ **b)** $F(s) = \frac{1}{s^6}$ **c)** $F(s) = \frac{1}{s^2+25}$ **d)** $F(s) = \frac{1}{s^2-49}$

e) $F(s) = \frac{4}{s^2-16}$ **f)** $F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s-8}$ **g)** $F(s) = \frac{s-7}{(s-7)^2+16}$ **h)** $F(s) = \frac{s+4}{(s+4)^2+9}$

574. Die Differenzialgleichungen sind mit Hilfe von LAPLACE-Transformationen zu lösen.

a) $f''(x)+f(x)=0,\ f(0)=0,\ f'(0)=1$ **b)** $f''(x)+3f(x)=8x,\ f(0)=f'(0)=1$

575. Die Bewegungsgleichung eines an einer Feder befestigten Körpers, auf den eine äußere Kraft

a) $F = F(t) = \text{const.}$ **b)** $F(t) = A\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **c)** $F(t) = Ae^{-bt}$ wirkt, aber keine Reibungskräfte, lautet:

$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$.

Mit $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ist $x(t)$ gesucht.

576. Wenn bei der Problemstellung von Aufgabe **575.** eine Reibungskraft $r\dot{x}$ hinzu kommt, lautet die Bewegungsgleichung: $m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$.

Für $m = 2,\ r = 4,\ k = 8,\ F(t) = 7 = \text{const.}$, sowie mit $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ist die Gleichung zu lösen.

577. An einer Spannungsquelle $U = 25\,V$ sind ein Kondensator mit $C = 0{,}8\,F$, ein Widerstand mit $2\,\Omega$ und eine Spule mit $0{,}5\,H$ in Serie geschaltet. Vor dem Einschalten gilt zum Zeitpunkt $t = 0$: $q(0) = i(0) = 0$.

Es ist der Strom $i(t) = \frac{dq}{dt}$ für $t > 0$ zu ermitteln.

Anleitung: Die Differenzialgleichung lautet $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U$.

578. Man ermittle die Funktionen $q(t)$ im Beispiel auf der Seite **230** unter Berücksichtigung von **a)** $4L - R^2C = 0$ **b)** $4L < R^2C$.

579. Man ermittle die Funktionen $q(t)$ und $I(t)$ im Beispiel auf der Seite **230**, wobei an diesem Stromkreis eine periodische Spannung $U(t) = U_0 \sin\varphi_0 t$ angelegt wird und $4L - R^2C > 0$.

ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

1. Was ist eine algebraische Struktur?

Die **klassische Algebra** war die Kunst des Gleichungslösens: Mathematiker waren bemüht, für die Variable einen Wert zu finden, der die Gleichung erfüllte.

Die **moderne oder abstrakte Algebra** hat nahezu nichts mehr mit Gleichungen zu tun. In der modernen Algebra geht es um sogenannte **algebraische Strukturen**.

Die klassische Algebra war praxisorientiert und man war bemüht, angewandte Problemstellungen zu lösen. In der modernen Algebra haben wir es hingegen mit von der Praxis losgelöst erscheinenden Begriffen zu tun: Es geht darum, „Ordnung", also Strukturen von Systemen und deren logische Aufbaugesetze, zu erforschen.

Wahrscheinlich werden Sie sich nicht allzuviel vorstellen können, wenn wir von logischen Zusammenhängen oder Strukturen von Systemen reiner Begriffe sprechen. Zugegeben: Die moderne oder abstrakte Algebra ist – wie schon der Name sagt – abstrakt. Es liegt also in der Natur der abstrakten Algebra, dass sie oftmals von praktischen Anwendungen losgelöst ist.

Sobald Sie freilich die ersten Beispiele sehen, wird Ihnen vieles klarer werden. Akzeptieren Sie vorerst einfach, dass man in der modernen Algebra mit – was immer das auch sein mag – algebraischen Strukturen arbeitet und dass damit tiefe mathematische Zusammenhänge erforscht werden können. (Eine ausführliche Erklärung im Hinblick auf mathematische Zusammenhänge und mathematische Anwendungen findet sich in Aufgabe **580**.)

Nach dieser langen Einleitung gleich einmal zu einem Kernbegriff, den wir für spätere Definitionen benötigen: der Begriff der **Verknüpfung**. Bitte lesen Sie sich die Definition in der Außenspalte durch.

Es ist wichtig, die Verknüpfung mittels geordnetem Paar (a, b) zu definieren, zumal ja die Möglichkeit besteht, dass (a, b) eine andere Zuordnung liefert als (b, a): $\left.\begin{matrix} a \circ b = c \\ b \circ a = d \end{matrix}\right\} c \neq d$

Beispiel:
Wie lautet die Verknüpfung der Zahlenpaare **a)** (5, 7) **b)** (9, 3) und **c)** (10,10) in der Menge $\mathbb{N}$ für die Verknüpfungsvorschrift $a \circ b = c$: *„Die kleinere der Zahlen a und b oder der gleiche Wert, wenn a = b ist."*?

Lösung:
a) $5 \circ 7 = 5$ **b)** $9 \circ 3 = 3$ **c)** $10 \circ 10 = 10$

Was ist Algebra?

*„**Algebra** [durch roman. Vermittlung aus arab. al-ǧabr, eigtl. › die Einrenkung (gebrochener Teile) ‹] die, –, 1) im urspr. Sinn als **klassische A.** dasjenige Gebiet der Mathematik, das sich mit der Auflösung → algebraischer Gleichungen und von Gleichungssystemen befaßt, wobei im wesentlichen nur die rationalen Rechenoperationen der Grundrechnungsarten verwendet werden und im Fall der Gleichungssysteme nur bei Systemen von → linearen Gleichungen für mehrere Unbekannte eine Systematik existiert (Bereich der → linearen Algebra). Da die Lösbarkeit einer algebraischen Gleichung von dem als Grundmenge zur Verfügung stehenden → Zahlbereich abhängt, ist damit auch die Untersuchung der Struktur der Zahlbereiche eingeschlossen. Heute versteht man unter **moderner** oder **abstrakter A.** die systemat. Theorie der → algebraischen Strukturen und ihrer (zweistelligen) Verknüpfungen. Sie ist damit die Theorie jener Mengen, deren Elemente durch eine oder mehrere → algebraische Operationen verknüpft werden, wobei die Elemente nicht unbedingt Zahlen sein müssen, sondern auch Abbildungen, Funktionen, Permutationen, Vektoren, Matrizen u.a. sein können."* [1)]

Definition:

Eine **Verknüpfung** ∘ in einer Menge M ist eine Vorschrift, die jedem geordneten Paar (a, b) dieser Menge ein Element c dieser Menge zuordnet. Das geordnete Paar (M, ∘) nennt man **Verknüpfungsgebilde**.

1) Zitat aus der BROCKHAUS ENZYKLOPÄDIE in 24 Bänden, 19., völlig neu bearbeitete Auflage, 1. Band, Seite 354.

Aus folgenden Gründen wäre es ungenau zu sagen, dass „in einer Verknüpfung dem Paar (a, b) ein anderes Element c zugeordnet wird“:

(1) Das Element c muss ein Element der Menge sein.

(2) Wir wollen auch solche Fälle erlauben, in denen einem geordneten Paar (a, b) nicht ein **anderes** Element der Menge zugeordnet wird, sondern entweder das Element a oder das Element b.

Beispiel: Gegeben ist (5, 0) und die Verknüpfungsvorschrift

$a \circ b =$ *„Addieren der Zahlen a und b“*

$\Rightarrow a \circ b = 5 \circ 0 = 5 + 0 = 5$

(Vgl. Aufgaben **581**.)

Wichtige Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	{0,1, 2, 3, ...} Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^*$	{1, 2, 3, ...} Menge der natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Zahl 0
$\mathbb{N}_u$	{1, 3, 5, ...} Menge der ungeraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_g$	{0, 2, 4, 6, ...} Menge der geraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{P}$	{2, 3, 5, 7, ...} Menge der Primzahlen
$\mathbb{Z}$	{..., −2, −1, 0, +1, +2, ...} Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^+$	{+1, +2, +3, ...} Menge der positiven ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_0^+$	$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}^-$	{−1, −2, −3, ...} Menge der negativen ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^-$	Menge der negativen rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{R}^-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{I}$	Menge der irrationalen Zahlen

Beispiel:

Wie lautet die Verknüpfung der Zahlen **a)** (5, 7) **b)** (9, 3) und **c)** (10, 10) in der Menge $\mathbb{Z}$ für die Verknüpfungvorschrift $a \circ b = a$?

Lösung:

a) $5 \circ 7 = 5$ **b)** $9 \circ 3 = 9$ **c)** $10 \circ 10 = 10$

Die letzten beiden Beispiele werden Ihnen vielleicht vollkommen unwichtig und theoretisch erscheinen. Bevor Sie freilich zu einem vorschnellen Urteil kommen, denken Sie bitte an folgende praktische Situation: In einem Supermarkt liegt eine neue Lieferung von köstlichen Marzipanstäbchen zum Preis von 2 Euro neben gleichfalls vom Ablaufdatum her frischen „alten“, identisch aussehenden Marzipanstäbchen zum Preis von 1,60 Euro. Welche der beiden Marzipanstäbchen werden Sie wählen? In Anwendung der Verknüpfung des ersten Beispiels werden Sie sich wahrscheinlich für die billigeren Marzipanstäbchen entscheiden. Die im zweiten Beispiel dargelegte Verknüpfung hat gleichfalls eine praktische Erklärung. Hier geht es um die Reihenfolge, in der eine Verknüpfung ausgeführt wird. Ein oft gebrachtes Beispiel für die „richtige“ Ordnung ist die Reihenfolge, in der jemand Socken und Schuhe anzieht. Eine Umkehrung dieser Reihenfolge wäre äußerst schwierig bzw. unmöglich! Sie sehen: Selbst abstrakt erscheinende Verknüpfungen können mitunter im Zusammenhang mit Anwendungen des täglichen Lebens erklärt werden.

Wenn in einer Menge M eine Verknüpfung definiert ist, spricht man von einer algebraischen Struktur.

Beispiel:

Welche der folgenden Vorschriften $a \circ b$ bildet eine algebraische Struktur über der gegebenen Menge M? Die Entscheidung ist jeweils zu begründen.

a) $M = \mathbb{R},\ a \circ b = \frac{a}{b}$ **b)** $M = \mathbb{R}^+,\ a \circ b = \frac{a}{b}$ **c)** $M = \mathbb{N},\ a \circ b = a - b$?

Lösung:

a) Die Vorschrift $a \circ b = \frac{a}{b}$ ist keine Verknüpfung in $\mathbb{R}$, da beispielsweise das geordnete Paar (6, 0) keine Zuordnung liefert: $\frac{6}{0} = ?$

$\Rightarrow$ Es liegt keine algebraische Struktur vor.

b) In der Menge $\mathbb{R}^+$ ist die Vorschrift $a \circ b = \frac{a}{b}$ für alle Elemente eine Verknüpfung in $\mathbb{R}^+$, weil jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ genau ein Element $c \in \mathbb{R}^+$ liefert.

$\Rightarrow$ Es liegt eine algebraische Struktur vor.

c) Die Vorschrift $a \circ b = a - b$ ist keine Verknüpfung in $\mathbb{N}$, da beispielsweise das geordente Paar (3, 4) kein Element der Menge $\mathbb{N}$ zuordnet:

$3 - 4 = -1, \quad -1 \notin \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Es liegt keine algebraische Struktur vor.

Zusammenfassend betrachtet ist eine Verknüpfung dann definiert, wenn zwei Forderungen erfüllt werden:

(1) Genau ein Element c wird jedem geordneten Paar (a, b) zugeordnet.

(2) Das Element c ist ein Element der Menge M.

Wenn eine Verknüpfung über einer Menge definiert ist, liegt eine algebraische Struktur vor.

Algebraiker, also jene Mathematiker, die abstrakte Algebra zu ihrem Spezialgebiet gemacht haben, stellen immer wieder folgende Fragen:

- Ist die gegebene Menge eine Gruppe bezüglich der gegebenen Verknüpfung?
- Ist sie ein Ring?
- Ist sie ein Körper?

Sie werden im Aufgabenteil zahlreiche dieser Fragen nicht nur beantworten, sondern für Ihre Antwort auch einen Beweis geben müssen.

2. Was ist eine Gruppe?

Es gibt spezielle Namen für algebraische Strukturen mit besonderen Eigenschaften: **Gruppe**, **Ring** und **Körper** sind wichtige algebraische Strukturen.

Wir werden die besonderen Eigenschaften der „Gruppe" in allen Einzelheiten im Theorieteil erklären. Die speziellen Eigenschaften der algebraischen Struktur „Ring" und „Körper" können Sie im Aufgabenteil nachlesen.

Aus dem Hausübungsheft eines Schülers:

$$3 + x = 4 \qquad | + (-3) \longleftarrow (3)$$
$$+(-3) + (3 + x) = 4 + (-3)$$
$$\underbrace{(-3 + 3)}_{0} + x = 4 - 3 \qquad | \text{Assoziativgesetz} \longleftarrow (1)$$
$$+x = 4 - 3$$
$$x = 1 \qquad \longleftarrow (2)$$

Erinnert Sie die obige Lösung der Gleichung $3+x=4$ in $\mathbb{Z}$ an eine lang zurück liegende Zeit? Sie werden wohl kaum so viele Schritte benötigen, um diese einfache Gleichung zu lösen.

Die mit **(1)**, **(2)** und **(3)** gekennzeichneten Schritte sind allerdings genau jene Eigenschaften, die die sogenannten **Gruppenaxiome** bilden.

Und in ähnlicher Weise können wir die Gruppenaxiome erkennen, wenn wir die Gleichung $5x = 4$ in $\mathbb{Q}$ lösen:

$5x = 4$

$\frac{1}{5}(5x) = \left(\frac{1}{5}\right)4$ | Multiplikation mit inversem Element (3)

$\left(\frac{1}{5} \cdot 5\right)x = \frac{1}{5} \cdot 4$ | Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (1)

$1 \cdot x = \frac{4}{5}$

$x = \frac{4}{5}$ | Multiplikation mit neutralem Element (2)

Definition:

Das Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ heißt **Gruppe**, wenn folgende Gesetze für alle $a, b, c \in M$ erfüllt werden:

(1) Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(2) Es existiert ein neutrales Element e in M, sodass $a \circ e = e \circ a = a$ gilt.

(3) Zu jedem Element $a \in M$ existiert ein inverses Element $\bar{a} \in M$, sodass $a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = e$ gilt.

Die Gruppe $(M, \circ)$ heißt **kommutativ**, wenn folgendes Gesetz für alle $a, b \in M$ erfüllt:

$a \circ b = b \circ a$

Die obigen Gruppenaxiome **(1)** bis **(3)** lassen sich etwas weniger präzise wie folgt formulieren: Die Gleichung $x \circ a = b$ mit $a, b \in M$ ist derart lösbar, dass auch $x \in M$ ist.

Gruppenaxiome:

(1) Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(2) Es existiert ein neutrales Element in M, sodass $a \circ e = e \circ a = a$ gilt.

(3) Zu jedem Element $a \in M$ existiert ein inverses Element $\bar{a} \in M$, sodass $a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = e$ gilt.



Evariste GALOIS (1811–1832), französischer Mathematiker.

„Von seinem Leben ist wenig zu berichten, es war zu kurz. Mit dreizehn Jahren begann er Mathematik zu studieren, mit siebzehn und achtzehn Jahren überreichte er der Akademie drei Abhandlungen, in denen er über seine Vorgänger GAUSS und LAGRANGE bereits weit hinausging. Er traf auf keinerlei Verständnis – die ersten beiden Arbeiten gingen sogar verloren –, geschweige denn auf die erhoffte Anerkennung. Vielleicht war die Darstellung zu kurz, wahrscheinlich waren die Gedanken zu ungewohnt und zu kühn: der Jüngling entwickelte auf wenigen Druckseiten eine gänzlich neue mathematische Disziplin, die gruppentheoretische Behandlung der Algebra, heute GALOISsche Theorie genannt. Wir können nur einen vorsichtigen Blick in diese Geheimküche des Geistes werfen."[1)]

Beispiel:

Welche der gegebenen Mengen ist eine Gruppe bezüglich der Addition als Verknüpfung? Für jede Menge, die keine Gruppe bezüglich der Addition bildet, ist ein Beispiel zu geben, das wenigstens ein Gruppenaxiom nicht erfüllt.

a) $\mathbb{N}$ **b)** $\mathbb{Z}$ **c)** $\mathbb{R}^+$

Lösung:

a) (1) Die Addition in $\mathbb{N}$ ist assoziativ:
$(a+b)+c = a+(b+c)$ $a, b, c \in \mathbb{N}$

(2) Es existiert ein neutrales Element in $\mathbb{N}$, sodass
$a+e = e+a = a$ gilt: $a+0 = 0+a = a$ $a, 0 \in \mathbb{N}$

(3) Dieses Gruppenaxiom wird nicht erfüllt.
Beispiel: $5+(-5) = 0$ $-5 \notin \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ **$\mathbb{N}$ bildet keine Gruppe bezüglich der Addition.**

b) (1) Die Addition in $\mathbb{Z}$ ist assoziativ:
$(a+b)+c = a+(b+c)$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$

(2) Es existiert ein neutrales Element in $\mathbb{Z}$, sodass
$a+e = e+a = a$ gilt: $a+0 = 0+a = a$ $a, 0 \in \mathbb{Z}$

(3) Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}$ existiert ein inverses $\bar{a} \in \mathbb{Z}$, sodass $a+\bar{a} = \bar{a}+a = 0$ gilt.

$\Rightarrow$ **$\mathbb{Z}$ bildet eine Gruppe bezüglich der Addition.**

c) (1) Die Addition in $\mathbb{R}^+$ ist assoziativ:
$(a+b)+c = a+(b+c)$ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

(2) Dieses Gruppenaxiom wird nicht erfüllt.
Beispiel: $\sqrt{2}+0 = 0+\sqrt{2} = \sqrt{2}$ $0 \notin \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ **$\mathbb{R}^+$ bildet keine Gruppe bezüglich der Addition.**

Beispiel:

Welche der gegebenen Mengen ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation als Verknüpfung? Für jede Menge, die keine Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet, ist ein Beispiel zu geben, das wenigstens ein Gruppenaxiom nicht erfüllt.

a) $\mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{N}$ **c)** $\mathbb{Z}$ **d)** $\mathbb{R}$

Lösung:

a) (1) Die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ ist assoziativ:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $a, b, c \in \mathbb{Q}$

(2) Es existiert ein neutrales Element in $\mathbb{Q}$, sodass $a \cdot e = e \cdot a = a$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $a, 1 \in \mathbb{Q}$

(3) Zu jedem Element $a \in \mathbb{Q}$ existiert ein inverses Element $\bar{a} \in \mathbb{Q}$, sodass $a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a = 1$ gilt.

$\Rightarrow$ **$\mathbb{Q}$ bildet eine Gruppe bezüglich der Multiplikation.**

[1)] Aus „KARLSON, Zauber der Zahlen" (Ullstein Verlag).

b) (1) Die Multiplikation in $\mathbb{N}$ ist assoziativ:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad a, b, c \in \mathbb{N}$

(2) Es existiert ein neutrales Element in $\mathbb{N}$, sodass
$e \cdot a = a \cdot e = a$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad a, 1 \in \mathbb{N}$

(3) Dieses Gruppenaxiom wird nicht erfüllt.
Beispiel: $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \quad \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$

⇒ $\mathbb{N}$ bildet keine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

c) (1) Die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ ist assoziativ:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}$

(2) Es existiert ein neutrales Element in $\mathbb{Z}$, sodass
$a \cdot e = e \cdot a = a$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad a, 1 \in \mathbb{Z}$

(3) Dieses Gruppenaxiom wird nicht erfüllt. Beispiel:
$(-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3) = 1 \quad -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

⇒ $\mathbb{Z}$ bildet keine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

d) (1) Die Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist assoziativ:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

(2) Es existiert ein neutrales Element in $\mathbb{R}$, sodass $a \cdot e = e \cdot a = a$
gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a \qquad a, 1 \in \mathbb{R}$

(3) Zu jedem Element $a \in \mathbb{R}$ existiert ein inverses Element $\bar{a} \in \mathbb{R}$
sodass $a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a = 1$ gilt.

⇒ $\mathbb{R}$ bildet eine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

Zu dem Thema „Abstrakte Algebra" gibt es weltweit Hunderte Publikationen. Bemerkenswert ist, dass es kaum ein Buch in deutscher Sprache gibt und die meisten Bücher in englischer Sprache veröffentlicht werden. Als Beispiel sei von der Web Page des Springer-Verlags Heidelberg (www.springer.de) ein im Jahre 1999 erschienenes Werk zitiert, das Abstrakte Algebra mit dem Mathematikprogramm „Mathematica" verbindet:

***Hibbard, A.C.**, Central College, Pella, IA, USA* ***Levasseur, K.M.**, University of Massachusetts, Lowell, MA, USA*

Exploring Abstract Algebra with Mathematica

1999, XIII, 467 pp., with CD-ROM. Softcover 0-387-98619-7

This upper-division laboratory supplement for courses in abstract algebra consists of several Mathematica packages programmed as a foundation for group and ring theory. Additionally, the „user's guide" illustrates the functionality of the underlying code, while the lab portion of the book reflects the contents of the Mathematica-based electronic notebooks. Students interact with both the printed and electronic versions of the material in the laboratory, and can look up details and reference information in the user's guide. Exercises occur in a stream of the text of the lab, which provides a context within which to answer, and the questions are designed to be either written into the electronic notebook, or on paper.

Contents: Part I: Group Labs (12 labs). — Part II: Ring Labs (12 labs). — Part III: Users Guide. — Appendix (Usage Statements for all Functions). — Index.

AUFGABEN

Die im folgenden Zitat fehlenden Texte sind selbstständig zu ergänzen:

580. *„Was ist eine Gruppe? ... Man könnte an einen Indianerstamm denken, dem Mischehen mit fremden Stämmen eines anderen Totemtieres verboten sind. Aus der Vereinigung irgend zweier Mitglieder dieser Eingeborenen-Gruppe entspringt dann ein Nachkomme, der automatisch auch zur Gruppe gehört; und nur dann, wenn dies wirklich der Fall ist, kann man von einer Gruppe reden.*

In der Mathematik steht es ähnlich. Ein System von Elementen a, b, c ... bildet eine Gruppe, wenn es folgenden Bedingungen genügt:" [1)]

a) (1) Die Verknüpfung ist assoziativ:

(2) Es existiert ein neutrales Element $e \in M$, sodass

(3) Zu jedem Element $a \in M$ existiert ein inverses Element $\bar{a} \in M$, sodass

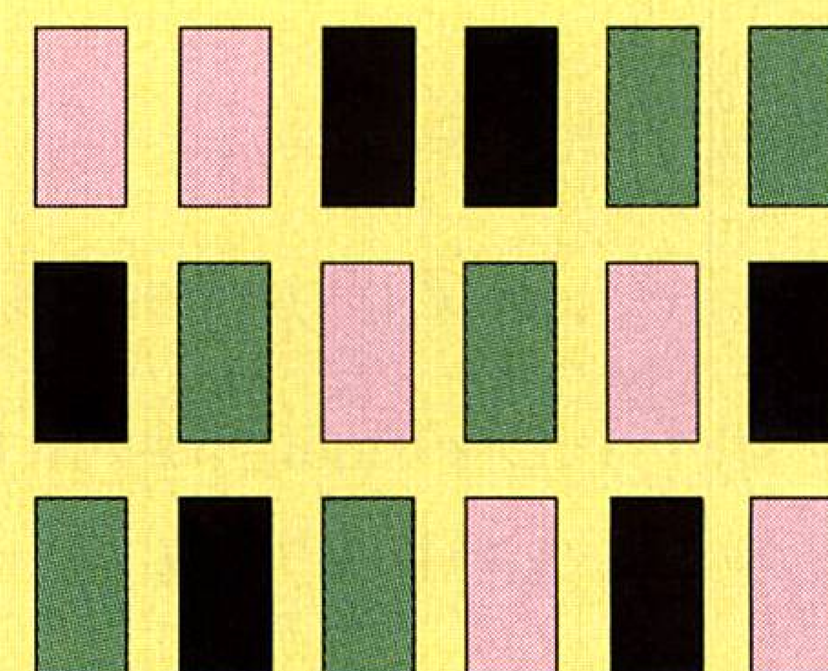
[1)] Aus „KARLSON, Zauber der Zahlen" (Ullstein Verlag).

580. (Fortsetzung)

„Jedes System von wohlunterschiedenen Dingen, das die eben formulierten Eigenschaften hat, stellt eine Gruppe dar. Es braucht sich dabei keineswegs um Zahlen zu handeln. Denken wir an die Drehungen, die eine Wetterfahne auf dem Dach ausführen kann: auch sie bilden offenbar eine Gruppe, und zwar sind die Glieder dieser Gruppe die Winkel, die die Fahne z. B. mit der Nord-Süd-Richtung bildet.

Die »Verknüpfungsvorschrift« würde dann darin bestehen, dass zwei Drehungen um je zwei Winkel A und B nacheinander auszuführen sind. So kann sich die Fahne erst um 45 Grad in der NO-Richtung drehen, dann um weitere 90 Grad in die SO-Richtung. Sie steht dann in derselben Stellung, die sie auch durch eine einzige Drehung um 135 Grad – von N unmittelbar bis SO – hätte erreichen können. Es gibt das »Einheitselement«, nämlich etwa die Drehung einmal ganz im Kreis herum, genau so gut aber die »Nulldrehung«, also gar keine Drehung, denn im Effekt ist das nicht entscheidbar. Und es gibt endlich die Inversion, denn ich kann ja die Fahne um jeden Winkel wieder zurückdrehen – der Wind macht das oft genug. Das wäre die »Wetterfahnengruppe«, der Mathematiker spricht vornehmer von einer Drehungsgruppe.

Wir können auch alle möglichen Umordnungen der Güterwagen auf einem Güterbahnhof als Gruppe betrachten, und zwar soll hier jede neue Umrangierung der Wagen ein Element der Gruppe darstellen. Nehmen wir der Einfachheit halber einen Zug von nur drei Wagen an: ein Tankwagen T, ein Kohlewagen K und ein Wagen mit Fischen F. Auf welche Weise kann man die drei Wagen aneinanderkoppeln?



Nun, das geht auf 6 verschiedene Arten:“ [1]

b) TKF, TFK, ... Wie lauten die verbleibenden vier Möglichkeiten?

„Weiter geht's nicht. Denn wenn wir die Wagen jetzt noch weiter umrangieren wollten, kämen wir doch nur immer wieder auf eine Anordnung, die wir schon gehabt haben. Diese Umordnungen (gelehrt gesprochen, Permutationen) stellen also eine Gruppe dar, die im Gegensatz zu den vorher behandelten nur aus endlich vielen Gliedern besteht, und zwar hier nur aus 6. Man spricht von einer Gruppe 6. Ordnung, und zwar von einer Permutationsgruppe.

Gerade diese Rangiermeisterprobleme sind der Schlüssel, der die letzten Geheimnisse der Gleichungstheorie aufschließt. Um jedoch zu Galois zurückzukehren: er wandte also die Gruppentheorie auf die algebraischen Gleichungen an. Er verstand es, jeder algebraischen Gleichung eine bestimmte Permutationsgruppe zuzuordnen und dann statt der Gleichung selbst die Eigenschaften der Gruppe zu studieren.

Hier liegt ein neuer Fall einer Abbildung vor, die wir schon früher einmal betrachtet haben und die sich immer mehr als Grundbegriff der heutigen Mathematik herausstellen wird. Galois verfuhr damit im Grunde nicht anders als die Funktechniker, die einen Radioapparat mit seinem Labyrinth von Röhren, Leitungen, Kondensatoren durch ein klares, übersichtliches Schaltschema symbolisieren, oder als ein General, der die Bewegungen auf dem Kriegsschauplatz durch Fähnchen und Striche auf einer schematischen Karte abbildet. Auf dem Plan findet man sich leichter zurecht, er ist übersichtlicher als das wirkliche Gelände. So sind auch die Eigenschaften der Galoisschen Gruppen leichter zu durchschauen als die der Gleichungen selbst, und es gelang Galois auf diese Weise, in voller Allgemeinheit abschließende Klarheit über die Möglichkeit und die Durchführung der Auflösung einer algebraischen Gleichung zu gewinnen. An die Stelle der »Wurzeljagd«, des Zahlenrechnens, treten Strukturprobleme, Formgesetze. Die moderne Algebra unserer Tage hat mit dem »aldschebr« der Araber nur noch den Namen gemein, die Galoissche Idee aber hat ihr ungeahnte neue Weiten erschlossen, ohne dabei überholt zu werden.“ [1]

c) Durch Verwendung eines Nachschlagewerks oder via Internet ist herauszufinden, was der Autor mit dem Begriff „aldschebr“ meint!

[1]) Aus „Karlson, Zauber der Zahlen“ (Ullstein Verlag)

580. (Fortsetzung)

„Achtzehn Jahre war Galois alt, als er seine wichtigsten Arbeiten geschrieben hatte, und in diesem Alter zog er sich aus der Mathematik zurück, um sich, ein glühender Patriot, der Politik zu widmen. Mit einundzwanzig Jahren wurde er in einen Ehrenhandel verstrickt und forderte seinen Gegner zum Duell. Fast scheint er gewußt zu haben, welches Schicksal ihm bevorstand, denn in der Nacht vor dem Waffengang schreibt er in fliegender Hast einen Brief an einen Freund. Nun auf einmal fürchtet er, aus der Welt gehen zu müssen, ohne seine wichtigsten Gedanken bekanntgegeben zu haben.

Er muß sich damit begnügen, die großen Leitlinien seiner Gedanken anzugeben, die Sätze ohne Beweis hinzuschreiben – aber er betont, daß er die Beweise durchaus besäße.

»Es ist mir häufig in meinem Leben geglückt, Sätze im voraus zu verkünden, von denen ich noch keine Gewißheit hatte, aber alles, was ich hier geschrieben habe, ist seit bald einem Jahr in meinem Kopfe, und es liegt zu sehr in meinem Interesse, mich nicht zu irren, damit man mich nicht verdächtigt, Sätze ausgesprochen zu haben, für welche ich nicht den vollständigen Beweis besessen hätte.

Bitte öffentlich Jacobi oder Gauß, ihr Urteil abzugeben, nicht über die Richtigkeit, sondern über die Wichtigkeit der Sätze.

Danach wird es, hoffe ich, Leute geben, die ihren Nutzen finden werden, wenn sie sich bemühen, alle diese Hieroglyphen zu entziffern.

Ich umarme Dich herzlichst

Am 29. Mai 1832 E. Galois«

Am nächsten Morgen, im Dämmerlicht der Frühe, fiel Galois, einundzwanzig Jahre alt, ein Genie, wie es nur in Jahrhunderten wiederkehrt.“ [1)]

581. Wenn Mathematiker über Mathematik diskutieren, geht es vielfach um Definitionen. Und Mathematikstudenten müssen bei mündlichen Prüfungen oftmals verschiedene Begriffe exakt definieren.

Es ist also wichtig, präzise und genau zu definieren, da es schwierig oder unmöglich wäre, einen mathematischen Gedankengang zu verstehen, wenn man nicht vollständig mit den Begriffen vertraut ist.

In einem Mathematikbuch findet sich folgende Definition für „Verknüpfung“:

„Eine Verknüpfung $\circ$ in einer Menge ist eine Vorschrift, die je zwei Elementen a und b der Menge ein anderes Element c zuordnet.“

a) Was ist an der Definition zu beanstanden?

b) Wie ist diese Definition zu verbessern, sodass die in **a)** vorgebrachten Einwände berücksichtigt werden?

582. Welche der folgenden Vorschriften $\circ$ bildet eine algebraische Struktur über der gegebenen Menge M? Die Entscheidung ist jeweils zu begründen.

a) $M = \mathbb{Q},\ a \circ b = \frac{a}{b}$
b) $M = \mathbb{Q}^+,\ a \circ b = \frac{a}{b}$
c) $M = \mathbb{Z}^-,\ a \circ b = \frac{a}{b}$

d) $M = \mathbb{N}^*,\ a \circ b = \frac{a}{b}$
e) $M = \mathbb{P},\ a \circ b = a + b$
f) $M = \mathbb{N}_u,\ a \circ b = a + b$

g) M = Menge von 10 Personen mit verschiedenem Gewicht.
$a \circ b = c$, wobei c die schwerste der 10 Personen ist.

h) M = Menge von 10 Personen mit verschiedenem Gewicht.
$a \circ b = c$, wobei c die leichteste Person ist, die schwerer als a oder b ist.

Anleitung: Man überprüft jeweils, ob die Verschrift $a \circ b$ eine Verknüpfung ist.

[1)] Aus „Karlson, Zauber der Zahlen“ (Ullstein Verlag)

583. Welche der folgenden Verknüpfungen (1) bis (4) sind für alle der gegebenen Beispiele I, II und III erfüllt?

a) I. $A^3 \circ A^2 = A^1$ (1) $A^B \circ A^C = A^{BC-7}$ (2) $A^B \circ A^C = A^{B+C-1}$
II. $A^2 \circ A^4 = A^{-2}$ (3) $A^B \circ A^C = A^{BC-5}$ (4) $A^B \circ A^C = A^{B-C}$
III. $A^5 \circ A^2 = A^3$

b) I. $B^7 \circ B^1 = B^9$ (1) $B^D \circ B^E = B^{2D-5}$ (2) $B^D \circ B^E = B^{D+E+1}$
II. $B^5 \circ B^6 = B^{12}$ (3) $B^D \circ B^E = B^{3D-E-11}$ (4) $B^D \circ B^E = B^{D+2E}$
III. $B^3 \circ B^2 = B^6$

c) I. $C^3 \circ C^2 = C^7$ (1) $C^G \circ C^H = C^{GH}$ (2) $C^G \circ C^H = C^{2H+3}$
II. $C^5 \circ C^2 = C^9$ (3) $C^G \circ C^H = C^{H-G+6}$ (4) $C^G \circ C^H = C^{2H+G}$
III. $C^2 \circ C^3 = C^7$

584. Welche der gegebenen Mengen ist eine Gruppe bezüglich der Addition als Vorschrift? Für jede Menge, die keine Gruppe bezüglich der Addition bildet, ist ein Beispiel zu geben, das wenigstens ein Gruppenaxiom nicht erfüllt.

a) $\mathbb{N}_u$ **b)** $\mathbb{P}$ **c)** $\mathbb{Z}_g$ **d)** $\mathbb{Q}^+$
e) $\mathbb{R}^-$ **f)** $\mathbb{I}$ **g)** $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ **h)** $A = \{0, 1\}$

585. Welche der gegebenen Mengen ist eine kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation als Vorschrift? Für jede Menge, die keine Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet, ist ein Beispiel zu geben, das wenigstens ein Gruppenaxiom nicht erfüllt.

a) $\mathbb{N}_g$ **b)** $\mathbb{P}$ **c)** $\mathbb{Z}_0^-$ **d)** $\mathbb{Q}^-$
e) $\mathbb{R}^+$ **f)** $\mathbb{I}$ **g)** $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ **h)** $B = \{1, 2\}$

586. Gegeben ist die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Hierbei handelt es sich um die Stundenangaben auf einer Uhr. Ist die Menge M eine Gruppe bezüglich der folgenden Vorschrift: $a \circ b = a \oplus b$.

Bemerkung: $2 \oplus 12 = 2$, $5 \oplus 10 = 3$, $9 \oplus 10 = 7$ usw.

Eine Menge M mit dem zwei Verknüpfungen $\circ$ und $*$ nennt man **Ring** $(M, \circ, *)$, wenn folgende Gesetze für alle $a, b, c \in M$ erfüllt sind:

① $(M, \circ)$ ist eine kommutative Gruppe.

② Die 2. Verknüpfung $*$ ist assoziativ.

③ Die 2. Verknüpfung $*$ ist distributiv bezüglich der 1. Verknüpfung.
$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$, $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ für alle $a, b, c \in M$

Man nennt $(M, \circ, *)$ **Körper**, wenn ①, ③ und zusätzlich Folgendes erfüllt ist:
$(M \setminus \{e_\circ\}, *)$ ist eine Gruppe, wobei $e_\circ$ das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $\circ$ ist.

587. Welche der gegebenen Mengen ist ein Ring?

a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **b)** $(\mathbb{Z}, +, -)$ **c)** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
d) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **e)** $(\mathbb{Q}, -, +)$ **f)** $(\mathbb{R}, \cdot, -)$

588. Welche der gegebenen Mengen ist ein Körper?

a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **b)** $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ **c)** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
d) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **e)** $(\mathbb{I}, +, \cdot)$ **f)** $(\mathbb{R}, -, +)$

MODERNE HILFSMITTEL IN DER MATHEMATIK: TI-92 UND TI-92 PLUS

Die Ausführungen dieses Abschnitts sind – mit Ausnahme von 7. **Differenzialgleichungen** – sowohl für den TI-92 als auch für den TI-92 Plus gültig. Auf eventuelle Unterschiede bei der Eingabe wird jeweils gesondert hingewiesen.

1. Matrizenrechnung

Beispiel:

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Gesucht sind:

a) die transponierten Matrizen A^T und B^T
b) die inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1}
c) die Summe $A + B$
d) die Differenzen $A - B$ und $B - A$
e) die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$

Lösung:

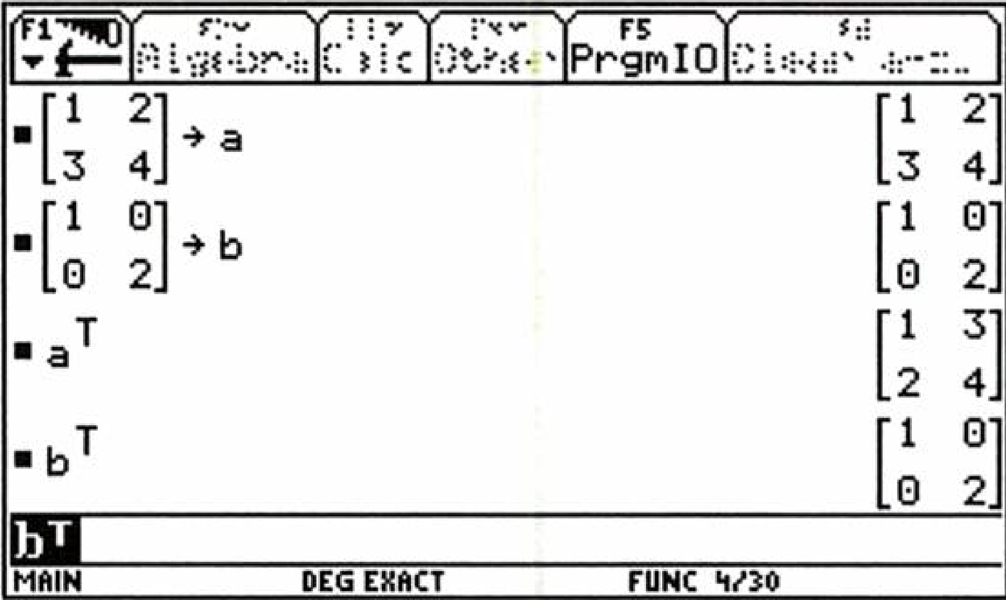
a) Zunächst werden die Matrizen auf den Feldern **a** und **b** abgespeichert. Die Eingabe erfolgt in eckigen Klammern zeilenweise, wobei jeweils in einer Zeile stehende Zahlen durch Beistriche und die Zeilen durch Strichpunkte voneinander getrennt werden.

[wird durch 2nd , erzeugt,] durch 2nd ÷ und der Strichpunkt durch 2nd M.

Eingabe:

[1,2;3,4] STO▸ a ENTER
[1,0;0,2] STO▸ b ENTER
a 2nd MATH 4 1 ENTER
b 2nd MATH 4 1 ENTER

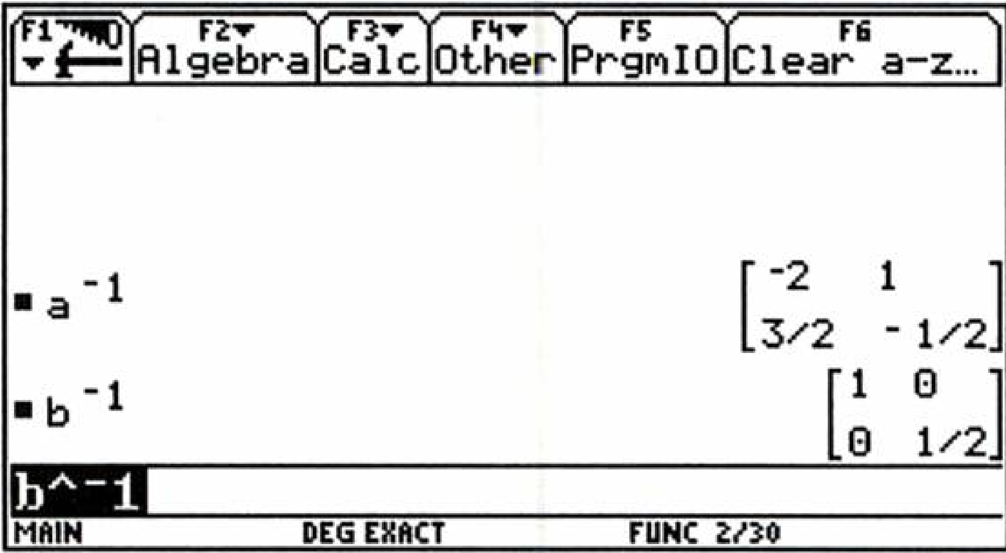
Die transponierte Matrix wird mittels 2nd MATH 4 1 erzeugt.



b) Eingabe:

a ^ – 1 ENTER
b ^ – 1 ENTER

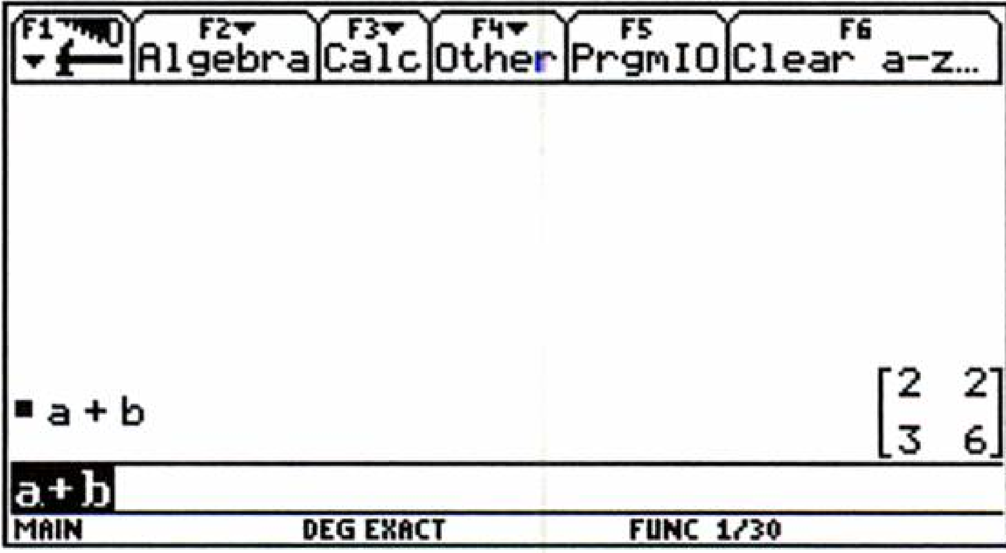
Die inverse Matrix wird mittels ^ (-) 1 erzeugt.



c) Eingabe:

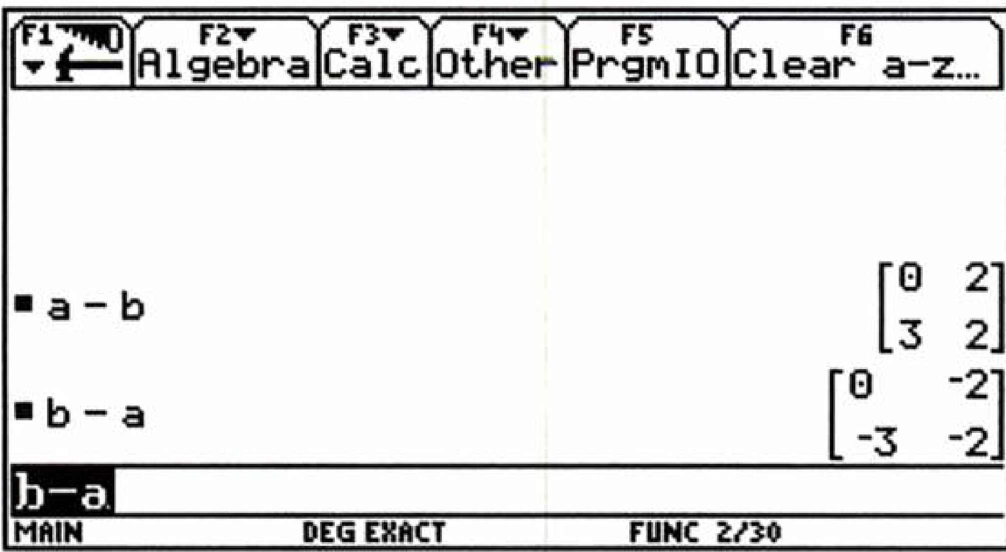
a + b ENTER

Für die Addition und Subtraktion von Matrizen sind die bereits bekannten TR-Tasten zu betätigen.



d) Eingabe:

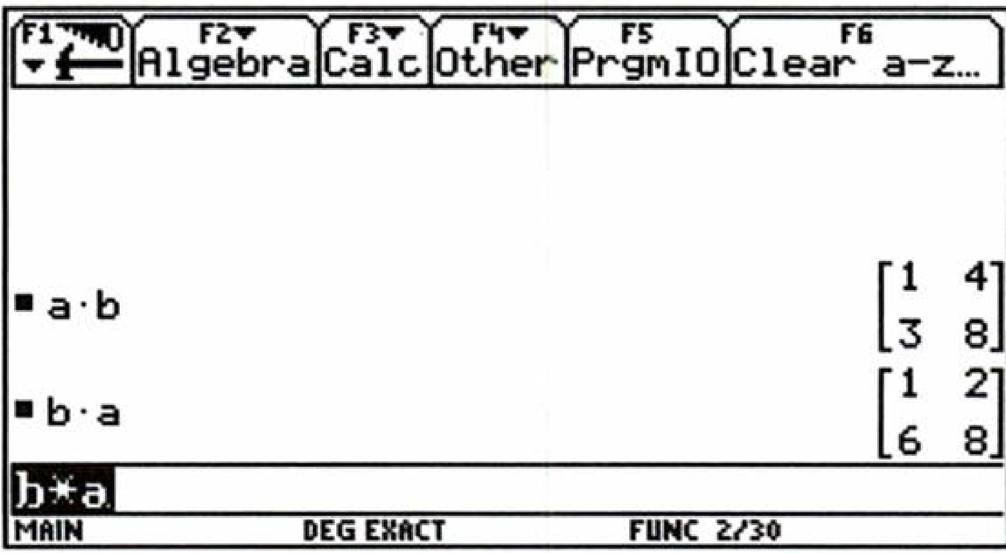
a – b ENTER
b – a ENTER



e) Eingabe:

a • b ENTER
b • a ENTER

Für die Multiplikation von Matrizen ist die bereits bekannte TR-Taste zu betätigen.



rref(erhält man mit:

[2nd] [MATH] [4] [4] oder:

[2nd] [CATALOG] [R] ⌄ … ⌄ [ENTER] [1)]

simult(erhält man mit:

[2nd] [MATH] [4] [5] oder:

[2nd] [CATALOG] [S] ⌄ … ⌄ [ENTER] [1)]

Beispiel: Gleichungssystem

Das Gleichungssystem $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$ soll mit

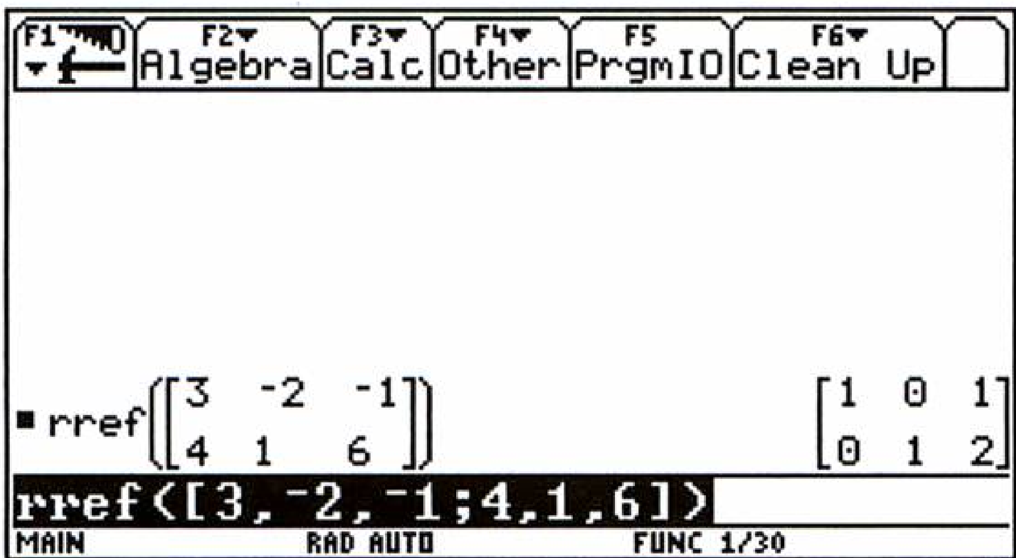
a) der Funktion **rref**

b) der Funktion **simult**

c) mit der Umkehrmatrix gelöst werden.

Lösung:

a) Die Koeffizienten der Gleichungen müssen als Matrix in die Funktion **rref** eingegeben werden.



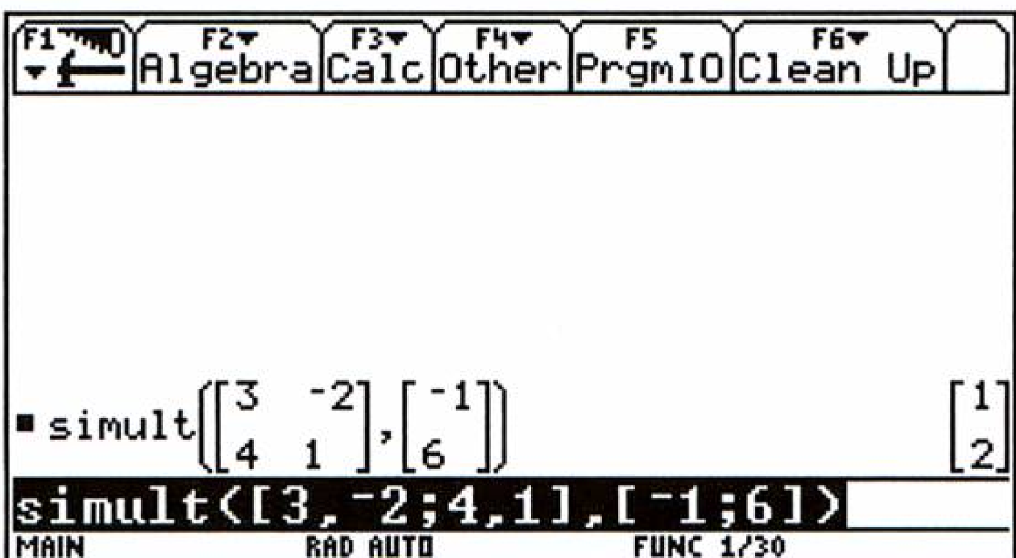
Eingabe:

rref ([3,–2,–1;4,1,6]) [ENTER]

Das Ergebnis ist die ganz rechte Spalte: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Also: **x = 1 und y = 2**

b) Die Koeffizienten der linken Seite der Gleichungen werden als erste Matrix und die der rechten Seite als senkrechter Vektor in die Funktion **simult** eingegeben:

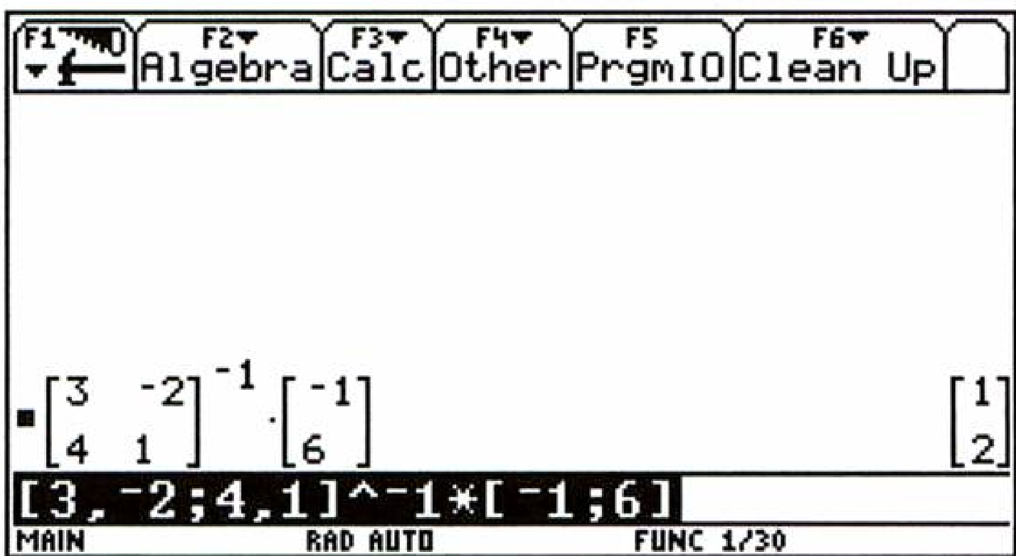


Eingabe:

simult ([3,–2;4,1], [–1;6]) [ENTER]

Das Ergebnis ist: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Es gilt die Matrixgleichung: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Man kann sie lösen durch die Umkehrmatrix A^{-1}: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$



Eingabe:

[3, –2;4,1]^–1 · [–1;6] [ENTER]

Das Ergebnis ist: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

[1)] Sie erhalten die Anzeige **rref(** bzw. **simult(** und müssen daher die Eingabe mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Auf Seite **16** wird der Unterschied zwischen Matrizen und Determinanten erklärt. Bisher konnten wir nur zwei- und dreizeilige Determinanten berechnen.

Beispiel:

Man berechne die Determinanten $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ und $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Lösung:

$D_1 = 3 \cdot 8 - 7 \cdot 5 = \mathbf{-11}$

$D_2 = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 3 + 4 \cdot 8 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 8 \cdot (-1) = \mathbf{84}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

Wir zeigen nun, wie die Berechnung vierzeiliger Determinanten mit und ohne TI-92 bzw. TI-92 Plus erfolgt.

Beispiel: Determinanten

Berechnen Sie händisch und mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus die folgende Determinante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

Lösung:

Händisch berechnet man diese Determinante, indem man nach einer Zeile oder nach einer Spalte auflöst.

Da die erste Zeile die einfachsten Werte aufweist, lösen wir nach dieser Zeile auf:

Die erste Zeile wird mit wechselnden Vorzeichen versehen und mit den Unterdeterminanten multipliziert, die aus dem Streichen der ersten Zeile und der jeweiligen Spalte entstehen:

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$1 \cdot (6 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 5 \cdot 7 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot 8 - 1 \cdot 7 \cdot 7 - 6 \cdot 6 \cdot 3) -$

$-1 \cdot (5 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 7 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 8 - 1 \cdot 7 \cdot 7 - 5 \cdot 6 \cdot 3) +$

$+1 \cdot (5 \cdot 1 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 8 - 5 \cdot 3 \cdot 5 - 7 \cdot 1 \cdot 6) -$

$-2 \cdot (5 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 \cdot 2) =$

$= 0 + 1 - 2 + 2 = \mathbf{1}$

Eingabe:

det ([1,1,1,2;5,6,7,8;1,1,2,3;4,5,6,7]) ENTER

Das Ergebnis ist: **1**

Bemerkung: Die hier gezeigte Methode der Berechnung mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus funktioniert bei allen Arten von Determinanten.

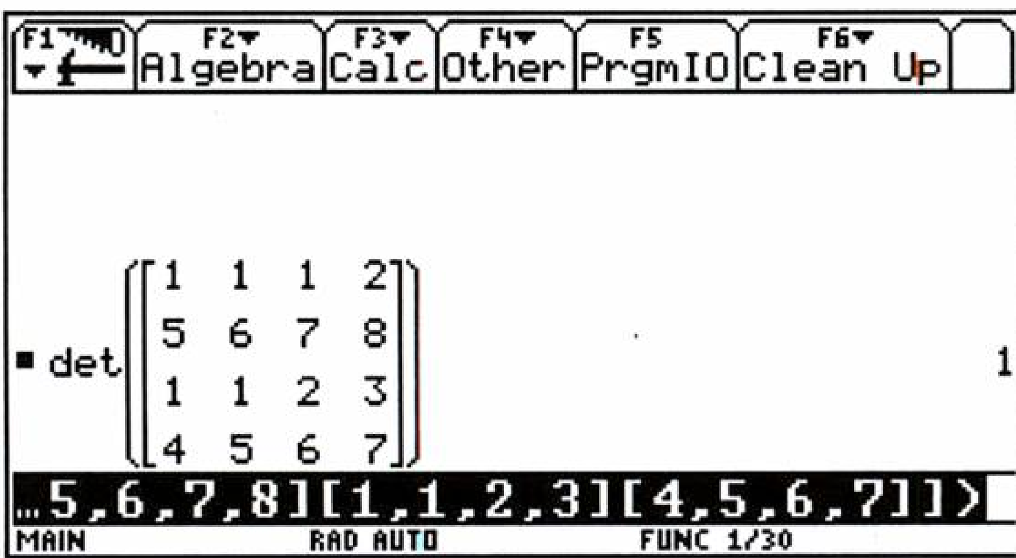
det(erhält man mit:

2nd MATH 4 2



oder:

2nd CATALOG D ⌄ … ⌄ ENTER[1)]



[1)] Sie erhalten die Anzeige **det(** und müssen daher die Eingabe mit einer schließenden runden Klammer beenden.

Beispiel:

Warenmatrix · Preisvektor = Vektor der Rechnungsbeträge

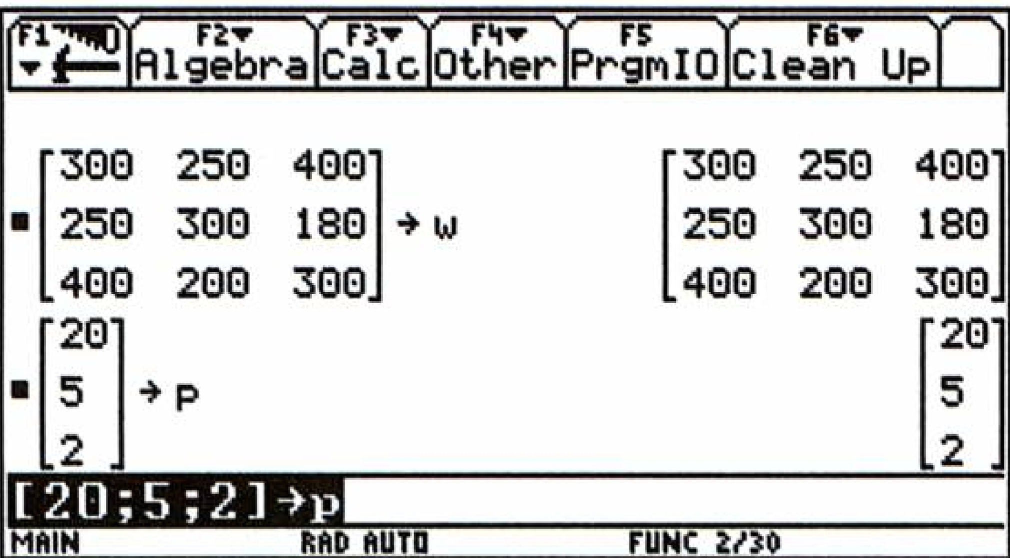
Die Großkunden A, B und C bestellen Mozartkugeln, Kaugummi und Pralinen mit folgenden Stückzahlen:

	Mozartkugeln	Kaugummi	Pralinen
A	300	250	400
B	250	300	180
C	400	200	300

a) Mozartkugeln kosten 20 Cent, Kaugummi kosten 5 Cent und Pralinen kosten 2 Cent pro Stück. Die Berechnung der Gesamtkosten pro Kunde soll mittels Matrizenrechnung erfolgen.

b) Sind umgekehrt die Rechnungsendbeträge gegeben, kann man auf die Preise pro Stück schließen? Wenn ja, welche Preise wurden verrechnet, wenn die Kunden A, B, C folgende Endbeträge bezahlten: 67,00 Euro, 54,90 Euro und 77,00 Euro?

Lösung:



a) Die Warenmatrix $W = \begin{pmatrix} 300 & 250 & 400 \\ 250 & 300 & 180 \\ 400 & 200 & 300 \end{pmatrix}$ muss mit dem Preisvektor

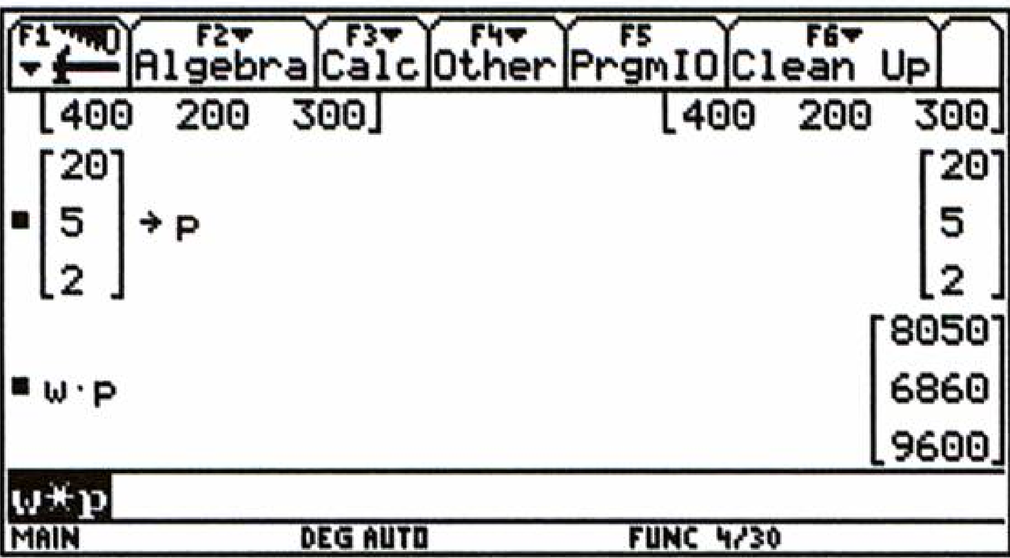
$P = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ multipliziert werden, um die Rechnungsendbeträge zu bekommen.

Das geschieht mit folgender Eingabe:

[300,250,400;250,300,180;400,200,300] STO▸ w ENTER

[20;5;2] STO▸ p ENTER

w · p ENTER



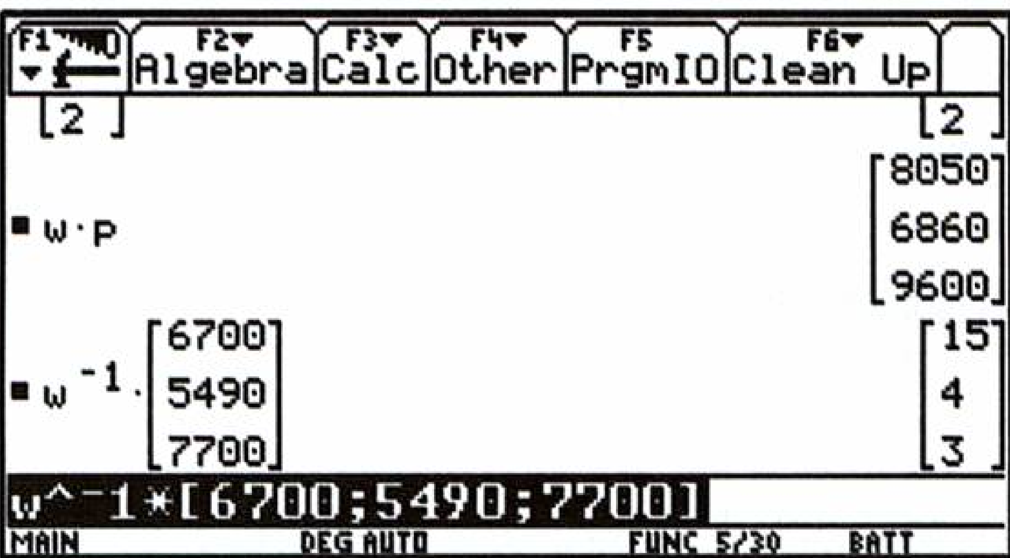
Das ergibt die Rechnungsendbeträge: **8050 Euro, 6860 Euro und 9600 Euro.**

b) Die Umkehrung der Matrizenmultiplikation mittels der Umkehrmatrix W^{-1} liefert die Preise:

$W \cdot P = R \Rightarrow W^{-1} \cdot W \cdot P = W^{-1} \cdot R \Rightarrow P = W^{-1} \cdot R$

Im TI-92 bzw. TI-92 Plus eingegeben ergibt das in Cent:

w^–1 · [6700;5490;7700] ENTER



Das Ergebnis ist: $P = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Preise sind also: **15, 4 und 3 Cent pro Stück.**

AUFGABEN

589. Die Firma Schuhzwerg hat folgende Angebote: Wanderschuhe um 66,— Euro und Streeter um 33,— Euro. Die Firma Schuko hat folgende Angebote: Wanderschuhe um 57,— Euro und Streeter um 36,— Euro. Geben Sie diese Daten als Matrizen im TI-92 bzw. TI-92 Plus ein und berechnen Sie zu diesen Daten, welche die Mehrwertsteuer beinhalten, die Mehrwertsteuer mittels Multiplikation dieser Matrizen mit $\frac{1}{6}$!

590. Folgende Tabelle gibt die durchschnittlichen Ausgaben in drei Haushalten pro Monat an.

Haushalt	Wohnung	Kleidung	Essen	Bildung	Unterhaltung
1	350	70	280	30	100
2	300	80	200	60	70
3	280	120	150	40	120

Berechnen Sie die Ausgaben pro Jahr durch Multiplikation der Daten mit 12 (in Matrizenform) und berechnen Sie am TI-92 bzw. TI-92 Plus die Gesamtausgaben pro Monat pro Haushalt in der Form $\sum_{i=1}^{5} M[1,i]$, $\sum_{i=1}^{5} M[2,i]$, und $\sum_{i=1}^{5} M[3,i]$.

591. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie **a)** $2 \cdot A + B$ **b)** $A + C - B$ **c)** $3 \cdot C - A$ **d)** $A + 3 \cdot B - 2 \cdot C$ mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus.

592. Berechnen Sie (mit den Matrizen A, B, C aus Aufgabe **591.**) die Matrix X aus der Gleichung **a)** $2 \cdot A + X = B$ **b)** $X - C = A + B$ **c)** $3 \cdot A = X - B$ **d)** $X + 4 \cdot C = B$.

593. Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Man berechne **a)** $A \cdot B$ **b)** $B \cdot C$ **c)** $C \cdot A$ **(1)** händisch und **(2)** mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus **d)** Warum lässt sich $B \cdot A$ nicht berechnen?

594. Aus den folgenden Angaben eines Bergsteigerausstattungsgeschäfts sollen die Rechnungsendbeträge der Kunden A und B berechnet werden durch Erstellung von entsprechenden Matrizen und durch deren Multiplikation:

	Seil (in Meter)	Karabiner (Stück)	Haken (Stück)
Kunde A	40	10	4
Kunde B	30	4	2

	Seil (Euro/Meter)	Karabiner (Euro/Stück)	Haken (Euro/Stück)
Preis	1,40	2,20	0,80

595. Aus der Tabelle eines Elektrogroßhandels, der unter anderem an die Kunden Meier, Müller und Novak verkauft:

	Kabel (m)	Lampen (Stk.)	Klemmen (Stk.)	Halterungen (Stk.)
Meier	25	16	24	12
Müller	34	20	20	16
Novak	30	14	22	14

Preise im Jahr	Kabel (Euro/m)	Lampen (Euro/Stk.)	Klemmen (Euro/Stk.)	Halterungen (Euro/Stk.)
2002	0,80	9,50	0,20	1,20
2003	0,85	9,20	0,20	1,25

Es soll der Gesamtpreis, den die Kunden **(1)** Meier, **(2)** Müller **(3)** Novak im Jahre **a)** 2002 **b)** 2003 zu bezahlen haben, mittels Matrizenmultiplikation berechnet werden!

596. Transponieren Sie die Matrizen $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

597. Berechnen Sie unter Verwendung der Matrizen des vorigen Beispiels: **a)** $A^T\cdot C$ **b)** $C\cdot B$ **c)** $C^T\cdot A$ **d)** $B^T\cdot C^T$.
Begründen Sie, warum bei **b)** und **d)** die gleichen Zahlen auftauchen, nur transponiert. Kann man dies verallgemeinern in ein Gesetz?

598. Invertieren Sie die Matrizen **a)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ **b)** $L=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **c)** $R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ **d)** $F=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ **(1)** händisch mit dem Gleichungsverfahren **(2)** mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus.

599. Gegeben sind die Matrizen: $L=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Man zeige mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus:

a) $L\cdot L=V$ **b)** $R\cdot R=V$ **c)** $L^{-1}=R$ **d)** $R^{-1}=L$ **e)** $L\cdot L\cdot L=R$
f) $R\cdot R\cdot R=L$ **g)** $V\cdot V=E$ **h)** $L\cdot L\cdot L\cdot L=E$ **i)** $R\cdot R\cdot R\cdot R=E$ **j)** $V^{-1}=V$

600. Mit den Matrizen aus Aufgabe **599.** und $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix}$ zeige man mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus:

a) $L\cdot\vec{a}=\vec{b}$ **b)** $L\cdot\vec{b}=\vec{c}$ **c)** $L\cdot\vec{c}=\vec{d}$ **d)** $L\cdot\vec{d}=\vec{a}$

601. Mit den Matrizen aus Aufgabe **599.** und den Vektoren aus Aufgabe **600.** zeige man:

a) $R\cdot\vec{a}=\vec{d}$ **b)** $R\cdot\vec{d}=\vec{c}$ **c)** $R\cdot\vec{c}=\vec{b}$ **d)** $R\cdot\vec{b}=\vec{a}$

602. Mit den Matrizen aus Aufgabe **599.** und den Vektoren aus Aufgabe **600.** zeige man:

a) $V\cdot\vec{a}=\vec{c}$ **b)** $V\cdot\vec{b}=\vec{d}$ **c)** $V\cdot\vec{c}=\vec{a}$ **d)** $V\cdot\vec{d}=\vec{b}$

603. Man löse das Gleichungssystem $\begin{cases} 2x - 6y = -26 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$

a) händisch **b)** mit der Funktion **rref** **c)** mit der Funktion **simult**.

604. Man löse das Gleichungssystem $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2x - 3y + z = 12 \\ 5x + y - 3z = -6 \end{cases}$

a) händisch **b)** mit der Funktion **rref** **c)** mit der Funktion **simult**.

605. Beweisen Sie das Assoziativgesetz der **a)** Matrizenaddition **b)** Matrizenmultiplikation für quadratische Matrizen ($A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$)

Anleitung: Das Assoziativgesetz lautet:
$A + (B + C) = (A + B) + C$ bzw. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

606. Berechnen Sie folgende Determinanten händisch und mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

607. Bestimmen Sie, ob folgende Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind (wenn die Determinante ungleich Null ist) und lösen Sie die eindeutig lösbaren Gleichungssysteme mit **rref** oder **simult**).

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{5} \\ 9x - 2y = \frac{3}{5} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -\frac{5}{2} \\ 4x + y - 2z = \frac{5}{2} \\ 6x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 2 \\ -x + 5y - z = 8 \\ 8x - 19y + 17z = -10 \end{cases}$

608. 3 Waren werden von 3 Kunden bestellt. Die Bestellmengen sind in der folgenden Tabelle vermerkt:

	Ware 1	Ware 2	Ware 3
Kunde A	20	40	50
Kunde B	30	60	120
Kunde C	40	60	55

a) Ware 1 kostet 35,— Euro, Ware 2 kostet 62,— Euro, und Ware 3 kostet 27,— Euro. Die Berechnung der Gesamtsummen der Kosten für die einzelnen Kunden soll mittels Matrizenrechnung erfolgen.

b) Kann man aus der Angabe der Rechnungsendbeträge der drei Kunden auf die Kosten der Waren rückschließen? Wenn ja, welche Kosten verursachen die drei Waren, wenn die Kunden folgende Endbeträge zahlen: Kunde A: 4400,— Euro, Kunde B: 7860,— Euro und Kunde C: 6340,— Euro.

TI-92 bzw. TI-92 Plus und Matrizen – Übersicht



Mathematische Darstellung	Eingabe im TI-92 bzw. TI-92 Plus	Anzeige im TI-92 bzw. TI-92 Plus
Matrix: $\begin{pmatrix}2&3&4\\6&7&8\end{pmatrix}$	[2,3,4;6,7,8] [STO▸] M oder [[2,3,4][6,7,8]] [STO▸] M	$\begin{bmatrix}2&3&4\\6&7&8\end{bmatrix}\to m \qquad \begin{bmatrix}2&3&4\\6&7&8\end{bmatrix}$
Addition: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$	[1,2 ; 3,4] + [5,6 ; 7,8] oder [[1,2][3,4]] + [[5,6][7,8]]	$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$
Multiplikation mit Skalar: $\begin{pmatrix}2&3&4\\6&7&8\end{pmatrix}\cdot 3$	[2,3,4;6,7,8] · 3 oder [[2,3,4][6,7,8]] · 3	$\begin{bmatrix}2&3&4\\6&7&8\end{bmatrix}\cdot 3 = \begin{bmatrix}6&9&12\\18&21&24\end{bmatrix}$
Matrixprodukt: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7&1\cdot6+2\cdot8\\3\cdot5+4\cdot7&3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}$	[1,2 ; 3,4] · [5,6 ; 7,8] oder [[1,2][3,4]] · [[5,6][7,8]]	$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19&22\\43&50\end{bmatrix}$
Transportieren (Stürzen): $\begin{pmatrix}2&3&4\\6&7&8\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}$	[2,3,4;6,7,8] [2nd] [MATH] [4] [1] oder [[2,3,4][6,7,8]] [2nd] [CATALOG] [T] [ENTER]	$\begin{bmatrix}2&3&4\\6&7&8\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2&6\\3&7\\4&8\end{bmatrix}$
Inverse Matrix bilden: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	[1,2;3,4] [^] [(–)] [1] oder [[1,2][3,4]] [^] [(–)] 1	$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$
Gleichungssystem lösen: $\begin{pmatrix}2x+3y=8\\4x-y=2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&8\\4&-1&2\end{pmatrix}$ ergibt die Lösung: $\begin{pmatrix}x=1\\y=2\end{pmatrix}$	rref([2,3,8; 4,-1,2]) oder rref([[2,3,8][4,-1,2]]) oder simult([2,3; 4,-1] , [8;2]) oder simult([[2,3][4,-1]] , [[8][2]])	$\mathrm{rref}\left(\begin{bmatrix}2&3&8\\4&-1&2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ = Einheitsmatrix und Lösung $\mathrm{simult}\left(\begin{bmatrix}2&3\\4&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
Determinante $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\cdot4-3\cdot2$	det([1,2;3,4]) oder det([[1,2] [3,4]])	$\det\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right) = -2$

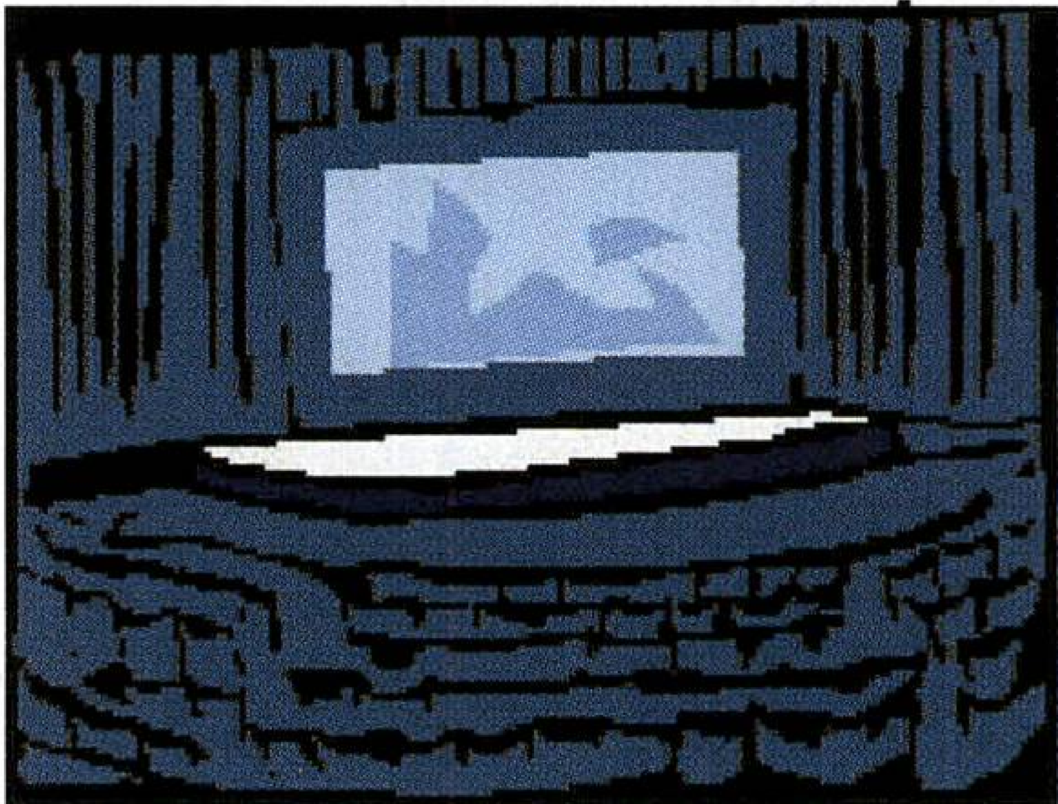
2. Anwendung der Matrizenrechnung in der linearen Optimierung: Simplexverfahren (ohne und mit TI-92 bzw. TI-92 Plus)

In Band 2 dieser Lehrbuchreihe wurde auf Seite **171ff.** die lineare Optimierung mit der grafischen Lösung vorgestellt. Dieses Verfahren ist nur bei zwei unabhängigen Variablen anwendbar. Die technisch wichtigere Lösung ist das **Simplexverfahren**. Hier werden die Koeffizienten der Ungleichungen in Matrixform gespeichert. Mit gezielten Umformungen dieser Matrix wird die Lösung berechnet. Dies wollen wir am Beispiel einer Maximumaufgabe (siehe Band 2, Seite **174**) nachvollziehen.

Beispiel:

Für ein Konzert steht ein Saal für maximal 800 Besucher zur Verfügung. Ein Sitzplatz soll 10,— Euro kosten, ein Stehplatz soll 5,— Euro kosten. Es stehen allerdings maximal 300 Sessel für Sitzplätze zur Verfügung. Wie viele Sitzplätze und Stehplätze sollen angeboten werden, um den maximalen Gewinn zu erzielen?





Lösung:

Die Lösung muss natürlich sein: 300 Sitzplätze und 500 Stehplätze. Aber hier geht es nicht um die Lösung, sondern um die Darstellung des Simplexverfahrens:

① **Erstellung der Ungleichungen und der Zielfunktion:**

x sei die Anzahl der Sitzplätze, y sei die Anzahl der Stehplätze.

(1) $x + y \leqslant 800$

(2) $x \leqslant 300$

Die Zielfunktion für den Gewinn ist: (3) $z = 10x + 5y$

② **Erstellung der Simplex-Matrix:**

Die Ungleichungen werden in Gleichungen mit Schlupfvariablen $s_1, s_2, \ldots$ verwandelt:

(1) $x + y + s_1 = 800$

(2) $x + s_2 = 300$

Alle Koeffizienten der Gleichungen und der Zielfunktion werden in eine Matrix geschrieben:

$$\begin{array}{cccccc} & x & y & s_1 & s_2 & \text{r.S.} \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 800 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem A:

$x + y + s_1 = 800$

$x + s_2 = 300$

$z = 10x + 5y$

③ **Simplexalgorithmus:**

Das Simplexverfahren verfolgt nun folgende Strategie: Jede Variable wird einzeln auf den maximal möglichen Wert gesetzt, solange bis sich keine Verbesserung mehr ergibt. Das erfolgt in mehreren Runden zu je 3 Schritten.

Runde 1:

Schritt 1: Das maximale Element der Zielfunktionszeile wird gesucht = Pivotspalte

Hier ist es der Koeffizient 10 in der **ersten Spalte** (für x).

Wir markieren die entsprechende Spalte (genannt **Pivotspalte**):

$$A = \begin{pmatrix} x & y & s_1 & s_2 & r.S. \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 800 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Minimumsuche in der modifizierten Randspalte ergibt die Pivotzeile:

Wir können die Variable x nur bis zum maximal möglichen Wert vergrößern. Wir suchen dazu das Minimum der rechten Spalte, dividiert durch die Pivotspalte:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & s_1 & s_2 & r.S. \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 800 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800/1 \\ 300/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Minimum

Das Minimum ist hier 300. ⇒ **Die zweite Zeile ist die Pivotzeile**: Im Schnittpunkt von Pivotzeile und Pivotspalte steht das Pivotelement. Dieses müssen wir zu 1 machen (ist hier schon)

Schritt 3: Dividiere die Pivotzeile durch das Pivotelement (hier 1) und addiere sie zu den anderen Zeilen, so dass in der Pivotspalte lauter Nullen und ein Einser entstehen:

$$A' = \begin{pmatrix} x & y & s_1 & s_2 & r.S. \\ 1_1 & 1_0 & 1_0 & 0_{-1} & 800_{-300} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 10_{-10} & 5_{-0} & 0_{-0} & 0_{-10} & z_{-3000} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} *(-1) \\ *(-10) \end{matrix}$$

Die Addition der modifizierten Pivotzeilen zu den anderen Zeilen ergibt eine neue Matrix B:

$$B = \begin{pmatrix} x & y & s_1 & s_2 & r.S. \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & z-3000 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem B:

$y + s_1 - s_2 = 500$

$x + s_2 = 300$

$z = 3000 + 5y - 10s_2$

Damit ist die erste Runde erledigt.

Start frei zur zweiten Runde:

Schritt 1: Das maximale Element der Zielfunktionszeile wird gesucht = Pivotspalte

Hier ist es der Koeffizient 5 in der zweiten Spalte (für y). Die zweite Spalte wird die Pivotspalte.

$$B = \begin{pmatrix} x & y & s_1 & s_2 & r.S. \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & z-3000 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Minimumsuche in der modifizierten Randspalte ergibt die Pivotzeile:

Wir können die Variable y nur bis zum maximal möglichen Wert vergrößern.

Wir suchen dazu das Minimum der rechten Spalte, dividiert durch die Pivotspalte:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & z-3000 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 500/1 \\ 300/0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ \infty \end{pmatrix}$$

(Spalten: x, y, s_1, s_2, r.S.) — Minimum: 500

Das Minimum ist hier 500. ⇒ **Die erste Zeile ist die Pivotzeile**: Im Schnittpunkt von Pivotzeile und Pivotspalte steht das Pivotelement. Dieses müssen wir zu 1 machen (ist hier schon)

Schritt 3: Dividiere die Pivotzeile durch das Pivotelement (hier 1) und addiere sie so zu den anderen Zeilen, dass in der Pivotspalte lauter Nullen und ein Einser entstehen:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0_{-0} & 5_{-5} & 0_{-5} & -10_{+5} & z-3000_{-2500} \end{pmatrix} \quad *(-5)$$

(Spalten: x, y, s_1, s_2, r.S.)

Die Addition der multiplizierten Pivotzeile zu den anderen Zeilen ergibt eine neue Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & z-5500 \end{pmatrix}$$

(Spalten: x, y, s_1, s_2, r.S.)

Gleichungssystem C:

$$y + s_1 - s_2 = 500$$
$$x + s_2 = 300$$
$$z = 5500 - 5s_1 - 5s_2$$

Damit ist die zweite Runde erledigt. Dies ist auch schon das Ende, da in der Zielfunktionszeile nur mehr lauter negative Zahlen oder Nullen vorkommen.

Endrunde:

Die Lösung ergibt sich, wenn man die Spalten mit negativen Zahlen in der Zielfunktionszeile streicht und den Rest wieder in Variablenform anschreibt:

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \square & \square & 500 \\ 1 & 0 & \square & \square & 300 \\ 0 & 0 & \square & \square & z-5500 \end{pmatrix}$$

(Spalten: x, y, s_1, s_2, r.S.)

$y = 500$

$x = 300$

$z = 5500$

Lösung: Wenn man 300 Sitzplätze und 500 Stehplätze verwendet, so erhält man 5500,— Euro als Einnahmen.

Da dieses Verfahren recht aufwendig ist, ist es für das händische Rechnen nicht besonders gut geeignet. Es wurde aber auch für Computer erfunden. Darum wollen wir auf den nächsten Seiten zeigen, wie man das Verfahren am TI-92 bzw. TI-92 Plus programmieren kann.

Die folgenden Funktionen müssen im Programm Editor eingegeben werden:

Eingabe:

APPS 7 3 ▶ ▼ ▼ Funktionsname ENTER ENTER

Eingabe der Funktion

◆ HOME

PROGRAMM	Erklärung
pivot(a,m) Func local i,v,n coldim(a) STO▸ n for i,1,rowdim(a)–1 if a[i,m]≠0 then approx(a[i,n]/(a[i,m])) STO▸ v[i] else ∞ STO▸ v[i] endif endfor v EndFunc	**PIVOT-Funktion** zum Aufsuchen des Pivotelements a ..... Matrix m ..... Pivotspalte n ..... Spaltenzahl For-Schleife zum Dividieren der Randspalte n durch die Pivotspalte m. Wenn das Pivotspaltenelement 0 ist, wird ∞ ausgegeben. Ausgabe: v ..... Liste der modifizierten Randspalte. Hinweis: ∞ wird mit 2nd J eingegeben. ≠ wird mit 2nd V eingegeben.
simplex(a,m,n) Func local b,i mrow(1/(a[n,m]),a,n) STO▸ b for i,1,rowdim(a) if i≠n then mrowadd(ab[i,m],b,n,i) STO▸ b endif endfor EndFunc	**SIMPLEX-Funktion** zur Erstellen der modifizierten Simplexmatrix a ..... Matrix m ..... Pivotspalte n ..... Pivotzeile Zuerst wird die Pivotzeile n durch das Pivotelement a[m,n] dividiert. Dann wird diese Zeile zu allen anderen Zeilen addiert, multipliziert mit –b[i,m], dem Pivotspaltenelement der entsprechenden Zeile. Ausgabe: b ..... die neue Matrix.
simpend(m) Func local i,j,e,z,s,t {} STO▸ e: rowdim(m) STO▸ z: coldim(m) STO▸ s for i,1,s–1 if m[z,i]=0 then 0 STO▸ t for j,1,z–1 if m[j,i]=1 m[j,s] STO▸ t endfor augment(e,{t}) STO▸ e else augment(e,{0}) STO▸ e endif endfor augment(e,{–m[z,s]}) EndFunc	**SIMPEND-Funktion** zur Ermittlung der Ergebnisse des Simplexverfahrens m ..... Matrix e ..... Ergebnisliste z ..... Zeilenzahl s ..... Spaltenzahl Wenn das Element der Zielfunktionszeile m[z,i]= 0 ist, so wird diejenige Zeile gesucht, in der darüber 1 steht und dann das rechte-Seite-Element m[j,s] dieser Zeile in e abgespeichert (mit augment). Wenn das Element der Zielfunktionszeile nicht 0 ist, so wird 0 in e abgespeichert. Zum Schluss wird noch das negative rechte-Seite-Element der Zielfunktionszeile –m[z,s] auf e abgespeichert und e ausgegeben.

Beispiel:

Berechnen Sie die Simplexmatrizen zur folgenden Angabe:

x kg Mais und y kg Weizen und z kg Roggen sollen gekauft werden:

$x+y+z \leqslant 25$ (Alles zusammen soll höchstens 25 kg sein.)

$2x+y+z \leqslant 28$ (Das Volumen soll höchstens 28 dm^3 sein, Mais hat ca. doppeltes Volumen wie Weizen.)

$y \leqslant 12$ (Die Weizenmenge soll weniger als 12 kg sein.)

$x+z \leqslant 13$ (Mais- und Roggenmenge sollen weniger als 13 kg sein.)

Zielfunktion $M = 13x + 15y + 6z$ (Marktpreise in Euro)

Lösung:

Einfügen von Schlupfvariablen:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
x & + & y & + & z & + & s_1 & & & & & & & = & 25 \\
2x & + & y & + & z & & & + & s_2 & & & & & = & 28 \\
 & & y & & & & & & & + & s_3 & & & = & 12 \\
x & & & + & z & & & & & & & + & s_4 & = & 13 \\
13x & + & 15y & + & 6z & & & & & & & & & = & M
\end{array}
$$

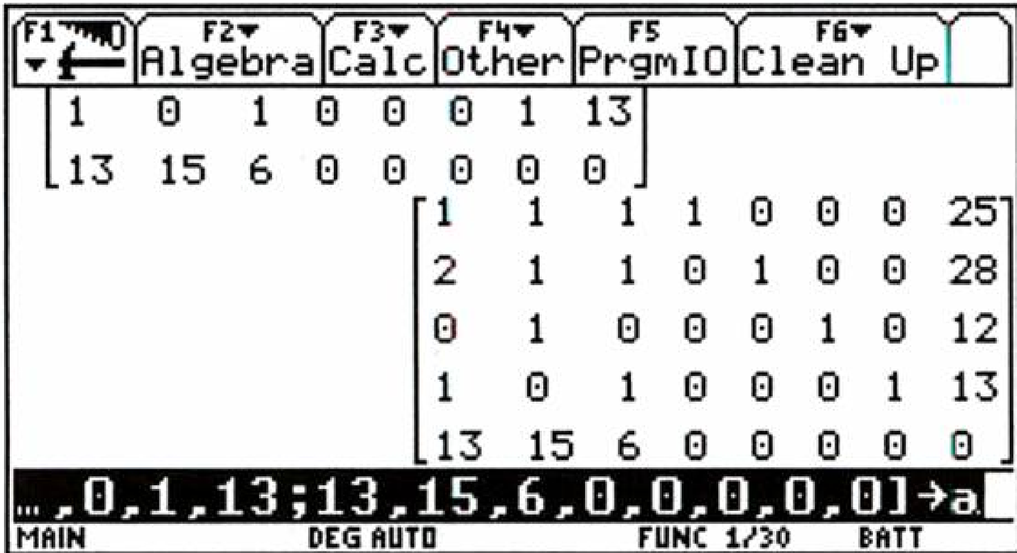
Das ergibt folgende Simplexmatrix A (M wird weggelassen):

$$
\begin{array}{cccccccc}
x & y & z & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \text{r.S.}
\end{array}
$$

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 25 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 28 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\
13 & 15 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Eingabe der Matrix:

[1,1,1,1,0,0,0,25; 2,1,1,0,1,0,0,28; 0,1,0,0,0,1,0,12; 1,0,1,0,0,0,1,13; 13,15,6,0,0,0,0,0] STO▸ A ENTER

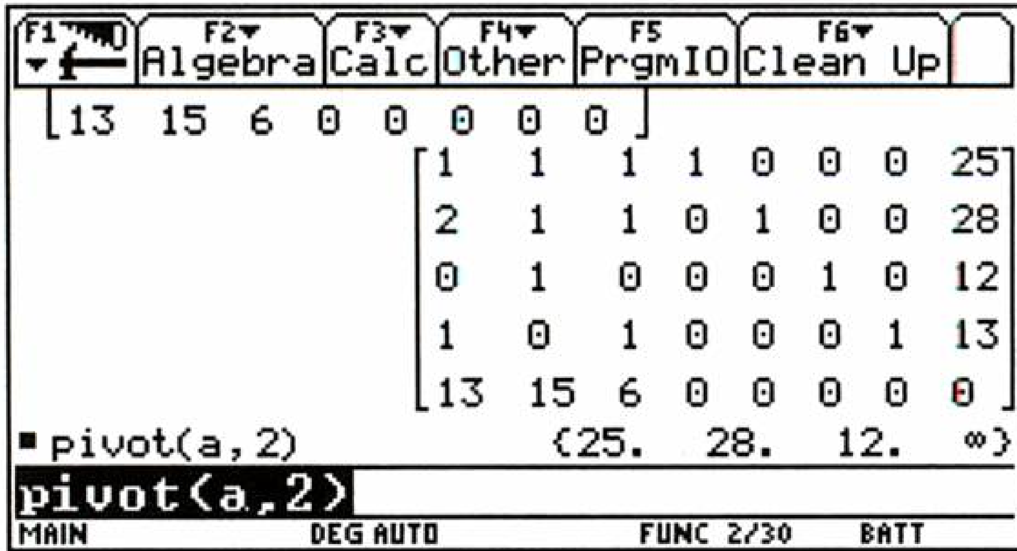


1. Runde:

Schritt 1: Suche des Maximums (15) der Zielzeile – ergibt Pivotspalte 2

Aufruf der PIVOT-Funktion:

pivot(a,2) ENTER

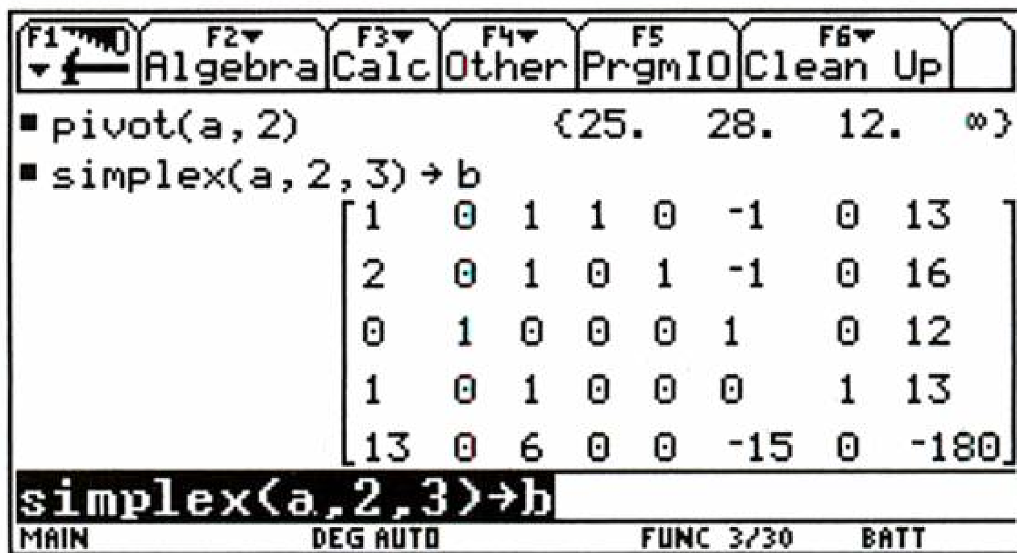


Schritt 2: Suche des Minimums (12) der modifizierten rechten Seiten – ergibt Pivotzeile 3

Schritt 3: Normierung der Pivotzeile und Addition zu den andern Zeilen – erfolgt durch

Aufruf der SIMPLEX-Funktion:

simplex(a,2,3) STO▸ B ENTER



```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
■ simplex(a,2,3)→b
   [1   0  1  1  0  -1   0   13 ]
   [2   0  1  0  1  -1   0   16 ]
   [0   1  0  0  0   1   0   12 ]
   [1   0  1  0  0   0   1   13 ]
   [13  0  6  0  0  -15  0  -180]
■ pivot(b,1)           {13.  8.  ∞  13.}
pivot(b,1)
MAIN    DEG AUTO    FUNC 4/30    BATT
```

2. Runde:

Schritt 1: Suche des Maximums (13) der Zielzeile von B – ergibt Pivotspalte 1

Aufruf der PIVOT-Funktion:

pivot(b,1) ENTER

Schritt 2: Suche des Minimums (8) der modifizierten rechten Seiten – ergibt Pivotzeile 2

Schritt 3: Normierung der Pivotzeile und Addition zu den andern Zeilen – erfolgt durch

Aufruf der SIMPLEX-Funktion:

simplex(b,1,2) STO▸ C ENTER

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
■ pivot(b,1)           {13.  8.  ∞  13.}
■ simplex(b,1,2)→c
   [0  0  1/2   1  -1/2   -1/2   0   5  ]
   [1  0  1/2   0  1/2    -1/2   0   8  ]
   [0  1  0     0  0       1     0   12 ]
   [0  0  1/2   0  -1/2   1/2    1   5  ]
   [0  0  -1/2  0  -13/2  -17/2  0  -284]
simplex(b,1,2)→c
MAIN    DEG AUTO    FUNC 5/30    BATT
```

Endrunde:

Da in der Zielfunktionszeile nur negative Zahlen und Nullen vorhanden sind, ist man fertig und wertet das Ergebnis aus mit dem

Aufruf der SIMPEND-Funktion:

simpend(c) ENTER

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
   [0  0  1/2   1  -1/2   -1/2   0   5  ]
   [1  0  1/2   0  1/2    -1/2   0   8  ]
   [0  1  0     0  0       1     0   12 ]
   [0  0  1/2   0  -1/2   1/2    1   5  ]
   [0  0  -1/2  0  -13/2  -17/2  0  -284]
■ simpend(c)
        {8  12  0  5  0  0  5  284}
simpend(c)
MAIN    DEG AUTO    FUNC 6/30    BATT
```

Ergebnis:
x = 8 kg Mais
y = 12 kg Weizen
z = 0 kg Roggen
M = 284,— Euro
In der ersten und letzten Ungleichung bleibt ein „Schlupf" von 5 kg.

AUFGABEN

609. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei die letzte Zeile die Zielfunktion darstellt. Wie lauten die Ungleichungen und die Zielfunktion? Welches Element wird Pivotelement? Dazu bestimme man die Pivotspalte und danach die Pivotzeile. Zuerst händisch und dann mit PIVOT-Funktion.

610. Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 10 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei die letzte Zeile die Zielfunktion darstellt. Pivotelement ist 5 (1. Zeile und 1. Spalte). Markieren Sie Pivotzeile und Pivotspalte und führen Sie Schritt 3 durch (Dividiere die Pivotzeile durch das Pivotelement (hier 5) und addiere sie zu den anderen Zeilen, so dass in der Pivotspalte lauter Nullen und ein Einser entstehen). Zuerst händisch und dann mit der SIMPLEX-Funktion.

611. Gegeben sind die Ungleichungen $2x+y+z \leqslant 14$, $x+y+3z \leqslant 12$, $x+y+z \leqslant 10$ und die Zielfunktion $M = 2x+3y+4z$.
Erstellen Sie die Simplexmatrix und berechnen Sie die Lösung des Problems einerseits händisch, andererseits mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus.

612. Ein Betrieb erzeugt drei Autotypen GTK, CV und MITSU. In drei Abteilungen werden Teile der Autos erzeugt. Die Herstellungszeiten sind dort:

Abteilung	GTK	CV	MITSU	Kapazität
Motorherstellung	80 h	100 h	110 h	5000 h
Aufhängung/Räder	200 h	180 h	220 h	10000 h
Gesamtmontage	150 h	200h	250 h	8000 h
Umsatz	**10000 Euro**	**12000 Euro**	**8000 Euro**	

Die Kapazitäten dürfen pro Abteilung nicht überschritten werden (Daraus ergeben sich die Ungleichungen). Der Umsatz soll maximiert werden.
Erstellen Sie die Ungleichungen und die Zielfunktion und führen Sie das Simplexverfahren händisch und mit dem TI-92 durch. Welcher Wagentyp wird nicht erzeugt? Welcher Wagentyp wird am häufigsten erzeugt? Welche Abteilung hat freie Kapazitäten in welcher Höhe?

613. Aus den Rohstoffen Baumwolle, Schurwolle und Kunststoff sollen 4 Stoffarten A, B, C und D hergestellt werden. Die folgende Tabelle zeigt die prozentuale Zusammensetzung der einzelnen Stoffarten, die Mengen der insgesamt zur Verfügung stehenden Rohmaterialen sowie die Nettoerträge:

	A	B	C	D	zur Verfügung
Baumwolle	–	70 %	–	40 %	1800 t
Schurwolle	60 %	–	80 %	–	1000 t
Kunststoff	40 %	30 %	20 %	60 %	1600 t
Nettogewinn	40 Euro	20 Euro	60 Euro	30 Euro	

Wie viele t von A, B, C und D müssen produziert werden, um den Gewinn zu maximieren? Welche Stoffart wird nicht produziert? Wie groß ist der Gesamtgewinn?

614. Aus den Rohstoffen F, G sollen 3 Produkte A, B, C hergestellt werden.

	A	B	C	maximal
F	20 kg	30 kg	10 kg	150 kg
G	10 kg	5 kg	50 kg	200 kg
Gewinn	20 Euro	15 Euro	30 Euro	

Der Gewinn der produzierten Güter soll maximal werden. Wie viel von jedem Produkt muss produziert werden? Welches Produkt wird nicht produziert? Gibt es ganzzahlige Lösungen?

3. Lineare analytische Geometrie

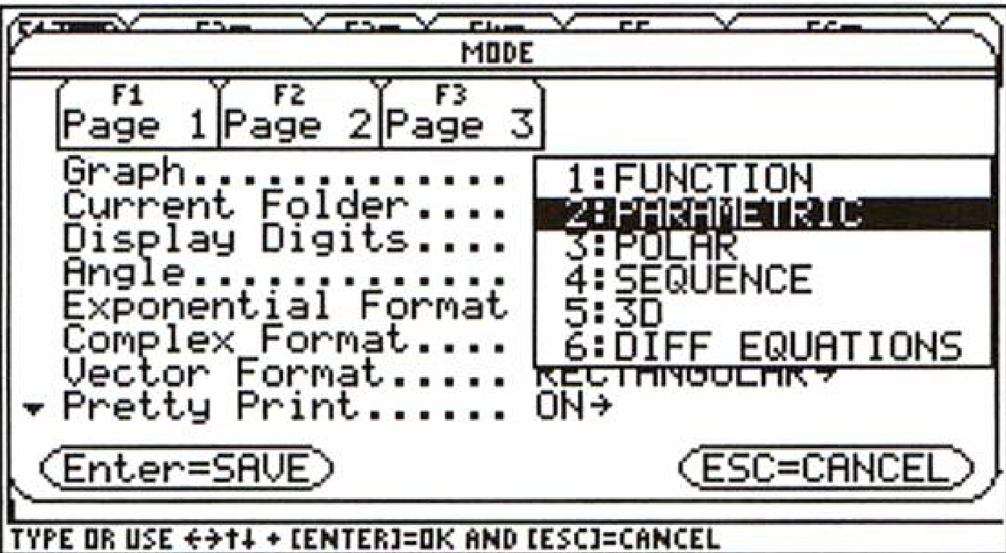
Beispiel:

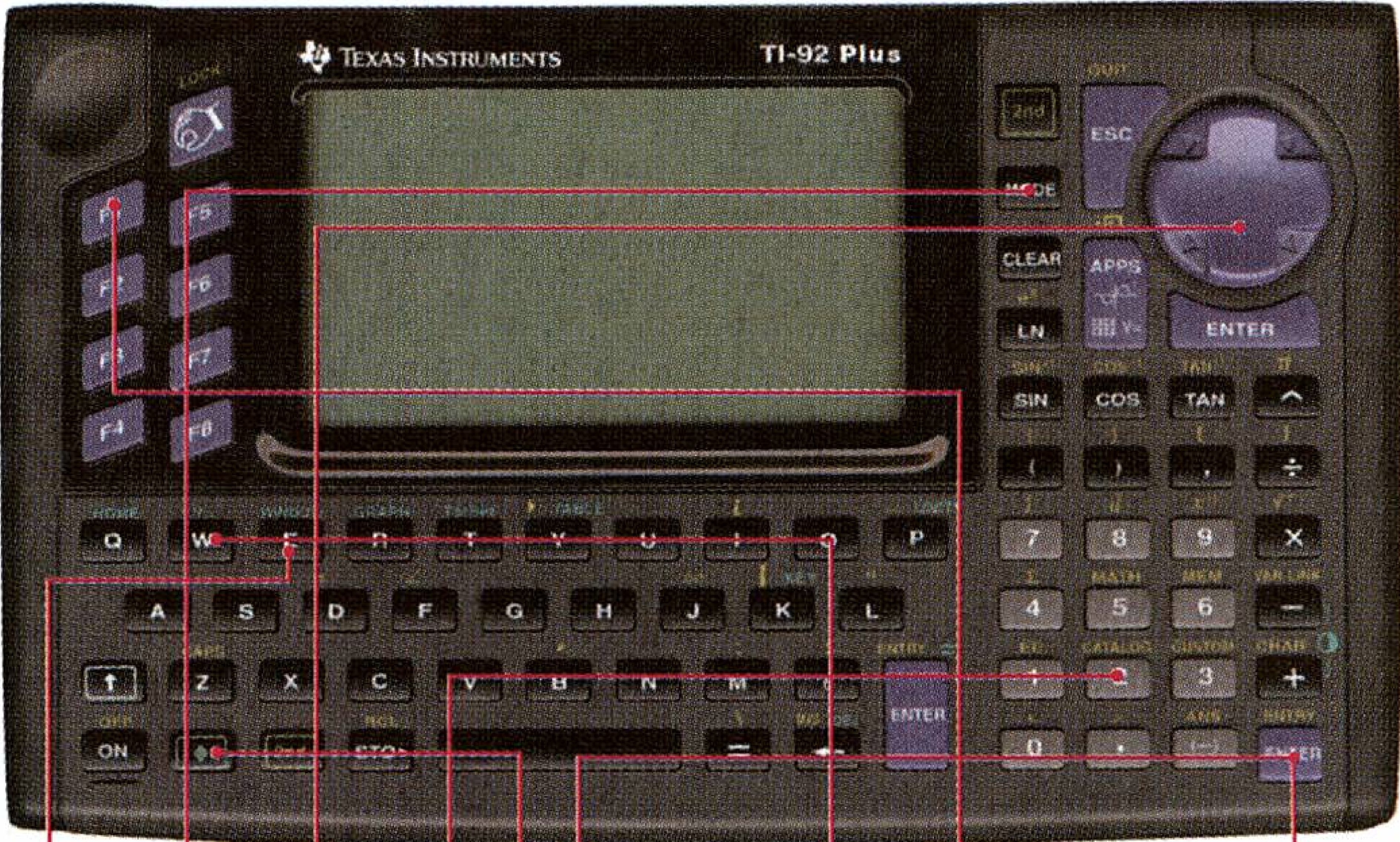
Zeichnen Sie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

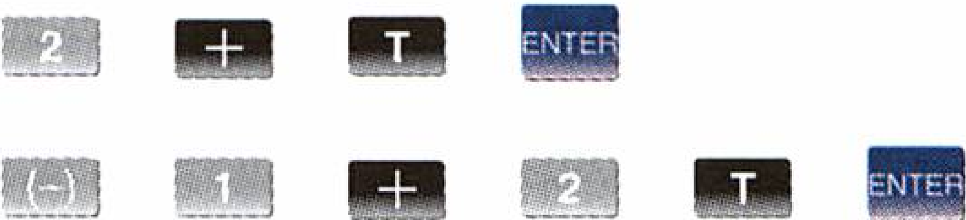
Wir stellen die MODE-Einstellung des Graph auf PARAMETRIC und starten den Y= Bildschirm:

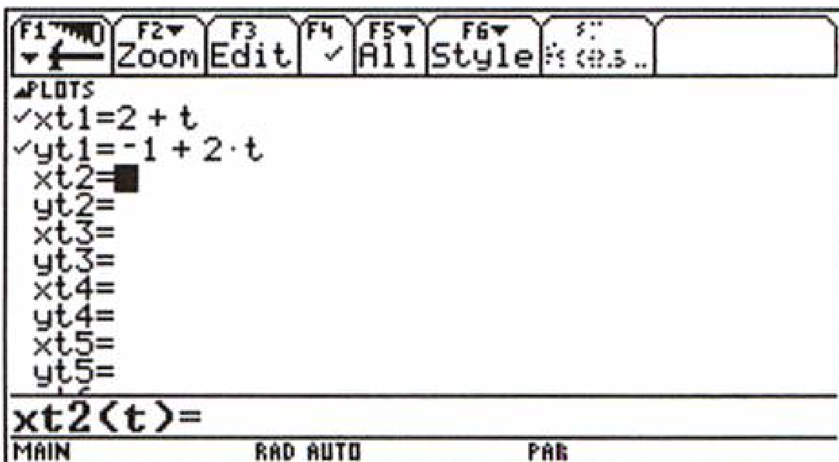
Der MODE wird auf Graph...PARAMETRIC umgestellt:



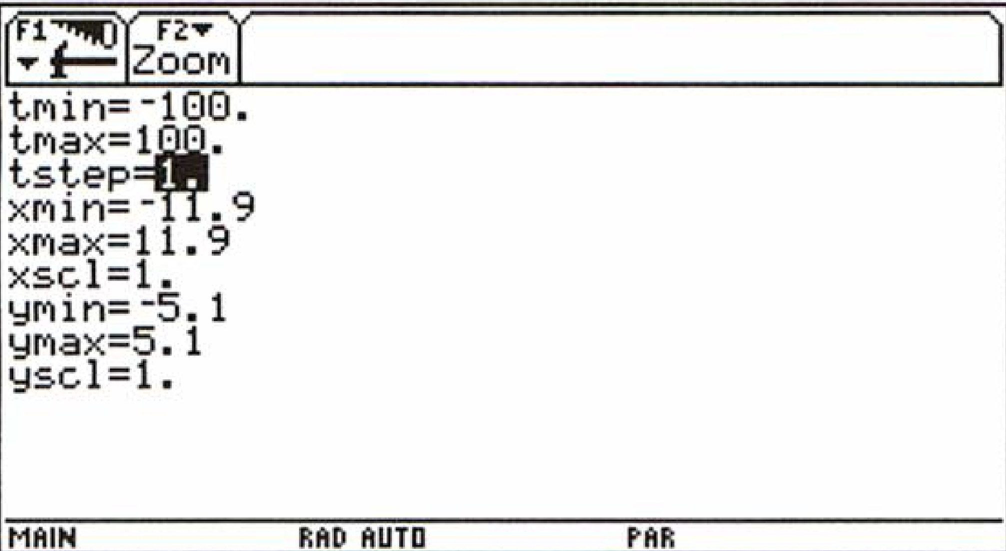


und geben dann die Gerade zeilenweise ein:





Die WINDOW-Variablen werden eingestellt:

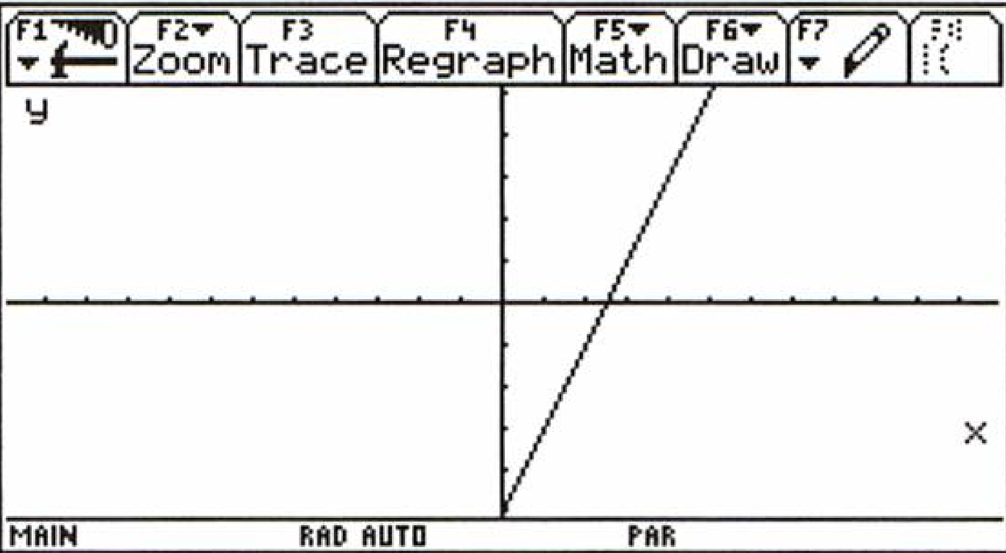


Wir schalten auf den WINDOW-Bildschirm und geben ein:



Mit <ZoomDec> sind wir im GRAPH-Bildschirm gelandet und sehen die Gerade bei 2,5 die x-Achse und bei –5 die y-Achse schneiden.

Der Graph ergibt:



Beispiel:

Man bestimme die Lage der Geraden g und h

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die erste Zeile der Gleichung g = h wird nach s aufgelöst. Dies wird in die zweite Zeile eingesetzt und dann nach t aufgelöst. Die Auflösung der Gleichungen erfolgt mit dem **solve**-Befehl.

solve(wird mit F2 1 erzeugt.

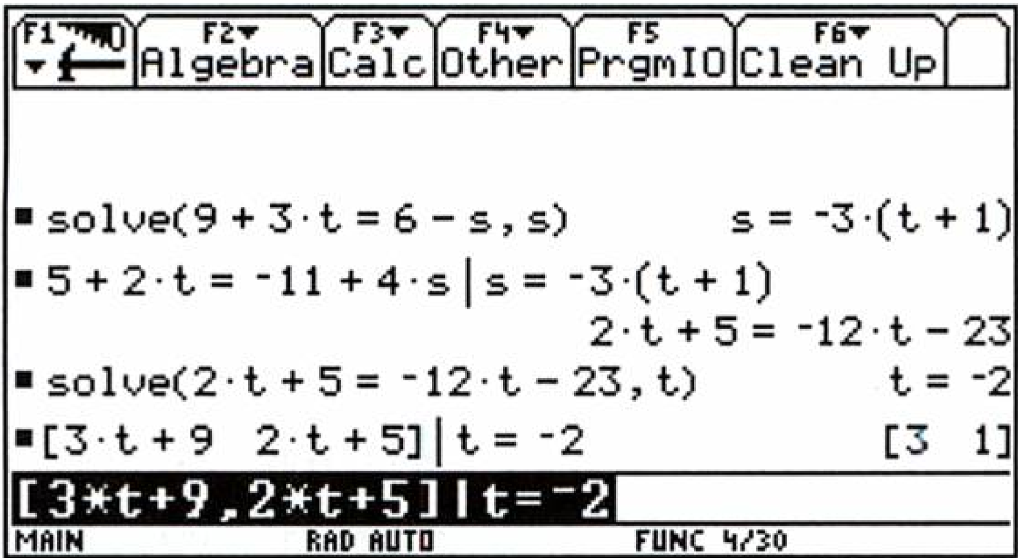
a) Eingabe:

solve(9+3t=6–s,s) [ENTER]

5+2t =–11+4s | (▲) [ENTER] [ENTER]

solve((▲) [ENTER] ,t) [ENTER]

[3t+9,2t+5] | (▲) [ENTER] [ENTER]



Bemerkung: Der senkrechte Strich „|“ wird durch [2nd] [K] erzeugt und bedeutet „WOBEI“. Dieser Strich wird für die Ersetzung von Variablen duch Zahlen bzw. Terme verwendet.

Ergebnis: Die Geraden schneiden einander in S(3,1).

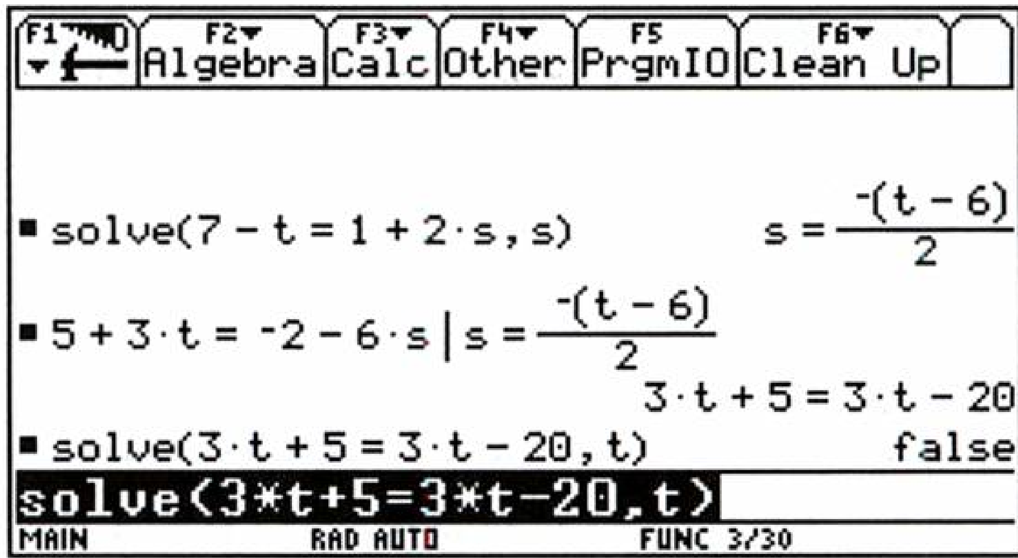
b) Eingabe:

solve(7–t=1+2s,s) [ENTER]

5+3t=–2–6s | (▲) [ENTER] [ENTER]

solve((▲) [ENTER] ,t) [ENTER]

Ergebnis: false ⇒ Die Geraden sind parallel.



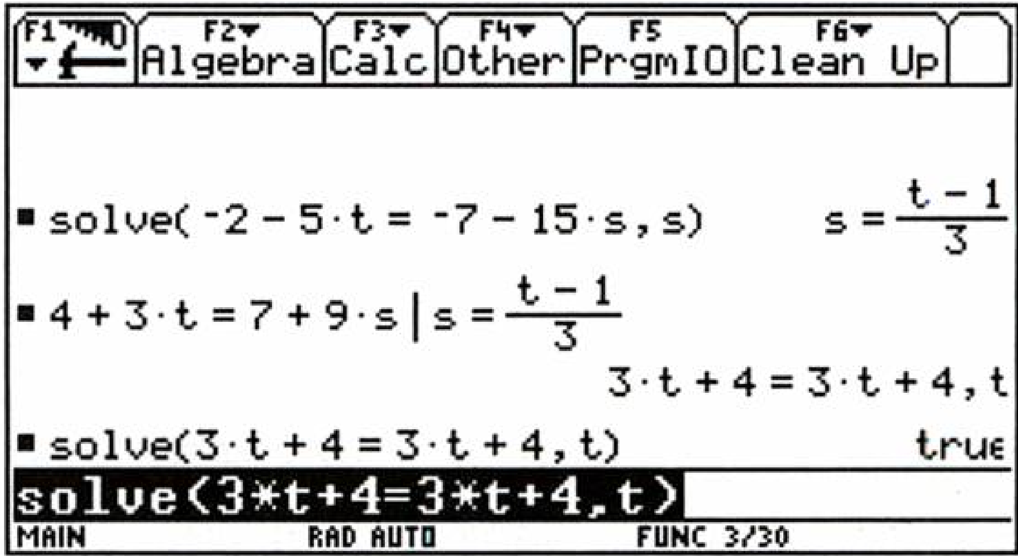
c) Eingabe:

solve(–2–5t=–7–15s,s) [ENTER]

4+3t=7+9s | (▲) [ENTER] [ENTER]

solve ((▲) [ENTER] , t) [ENTER]

Ergebnis: true ⇒ Die Geraden sind identisch.



Beispiel:

Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC [A(–5,2), B(6,–6), C(2,6)]. Gesucht ist der Umkreismittelpunkt und der Radius des Umkreises.

Lösung:

Zuerst werden die Punkte eingegeben:

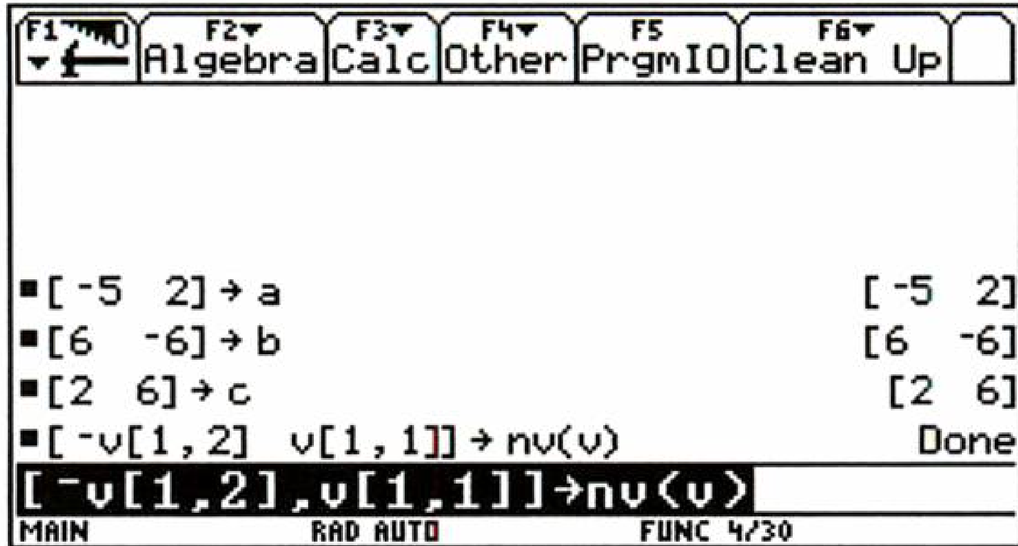
[–5,2] [STO▸] a [ENTER]

[6,–6] [STO▸] b [ENTER]

[2,6] [STO▸] c [ENTER]

Dann wird eine Funktion nv für den Normalvektor allgemein eingegeben:

[–v[1,2],v[1,1]] [STO▸] nv(v) [ENTER]

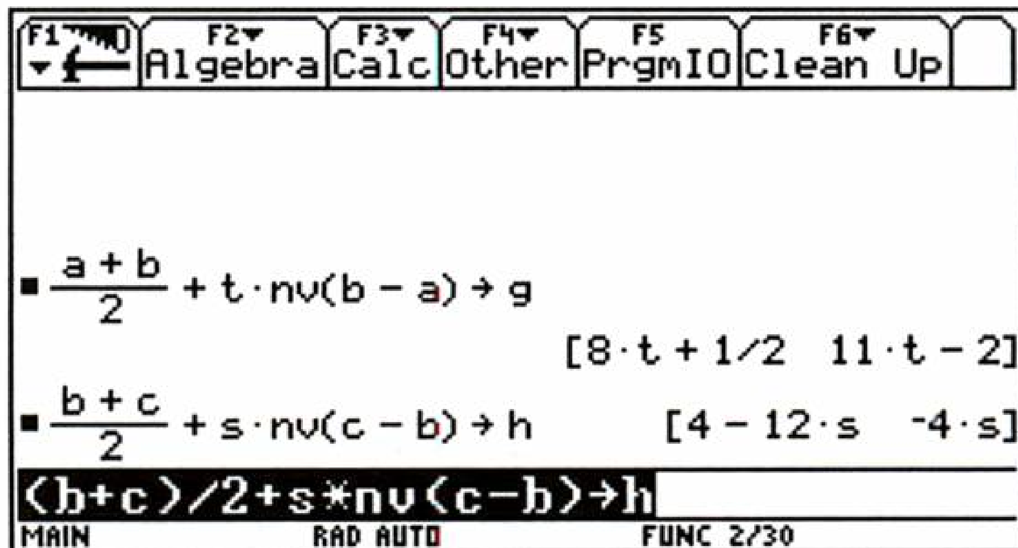


Mit Hilfe der Normalvektorfunktion werden die Streckensymmetralen von c und a bestimmt.

Eingabe:

$(a+b)/\ 2+t\cdot nv\,(b-a)$ [STO▸] g [ENTER]

$(b+c)/\ 2+s\cdot nv\,(c-b)$ [STO▸] h [ENTER]



```
F1 F2 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ solve(8·t + 1/2 = -12·s + 4, s)
                          s = -(16·t - 7)/24
■ 11·t - 2 = -4·s | s = -(16·t - 7)/24
                     11·t - 2 = (16·t - 7)/6
solve(11*t-2=(16*t-7)/6,t)
MAIN        RAD AUTO       FUNC 2/30
```

```
F1 F2 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
■ 11·t - 2 = -4·s | s = -(16·t - 7)/24
                     11·t - 2 = (16·t - 7)/6
■ solve(11·t - 2 = (16·t - 7)/6, t)   t = 1/10
■ g | t = 1/10             [13/10  -9/10]
g|t=1/10
MAIN        RAD AUTO       FUNC 4/30
```

```
F1 F2 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
                     11·t - 2 = (16·t - 7)/6
■ solve(11·t - 2 = (16·t - 7)/6, t)   t = 1/10
■ g | t = 1/10             [13/10  -9/10]
■ norm(a - [13/10  -9/10])        √4810/10
■ norm(a - [13/10  -9/10])         6.93542
norm(a-[[13/10,-9/10]])
MAIN        RAD AUTO       FUNC 6/30
```

Der Schnittpunkt der Streckensymmetralen ist der Umkreismittelpunkt

Eingabe:

solve(8t+1/2=–12s+4,s) [ENTER]

11t–2=–4s | (↑) [ENTER] [ENTER]

solve((↑) [ENTER] ,t) [ENTER]

g | (↑) [ENTER] [ENTER]

Der Mittelpunkt des Umkreises ist U$\left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$.

Der Radius des Umkreises ergibt sich aus der Länge (norm) des Vektors $\overrightarrow{AU}$.

Eingabe:

norm (a– (↑) [ENTER]) [◆] [ENTER]

Der Radius des Umkreises ist **r ≈ 6,9.**

AUFGABEN

615. Zeichnen Sie die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ durch Eingabe im [Y=]-Bildschirm

616. Man bestimme die Lage der Geraden g und h.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Für die allgemeine Eingabe einer Normalvektorfunktion vgl. obiges Beispiel.

617. Gesucht ist der **Mittelpunkt** U und der Radius r des Umkreises des Dreiecks ABC [A(–8,–1), B(8,–9), C(2,9)].

Anleitung: Man löse das Beispiel durch Schnitt der Streckensymmetralen, z. B.: $\frac{(A+B)}{2} + t \cdot nv \cdot (B-A) =$

$= \frac{(A+C)}{2} + s \cdot nv \cdot (C-A)$

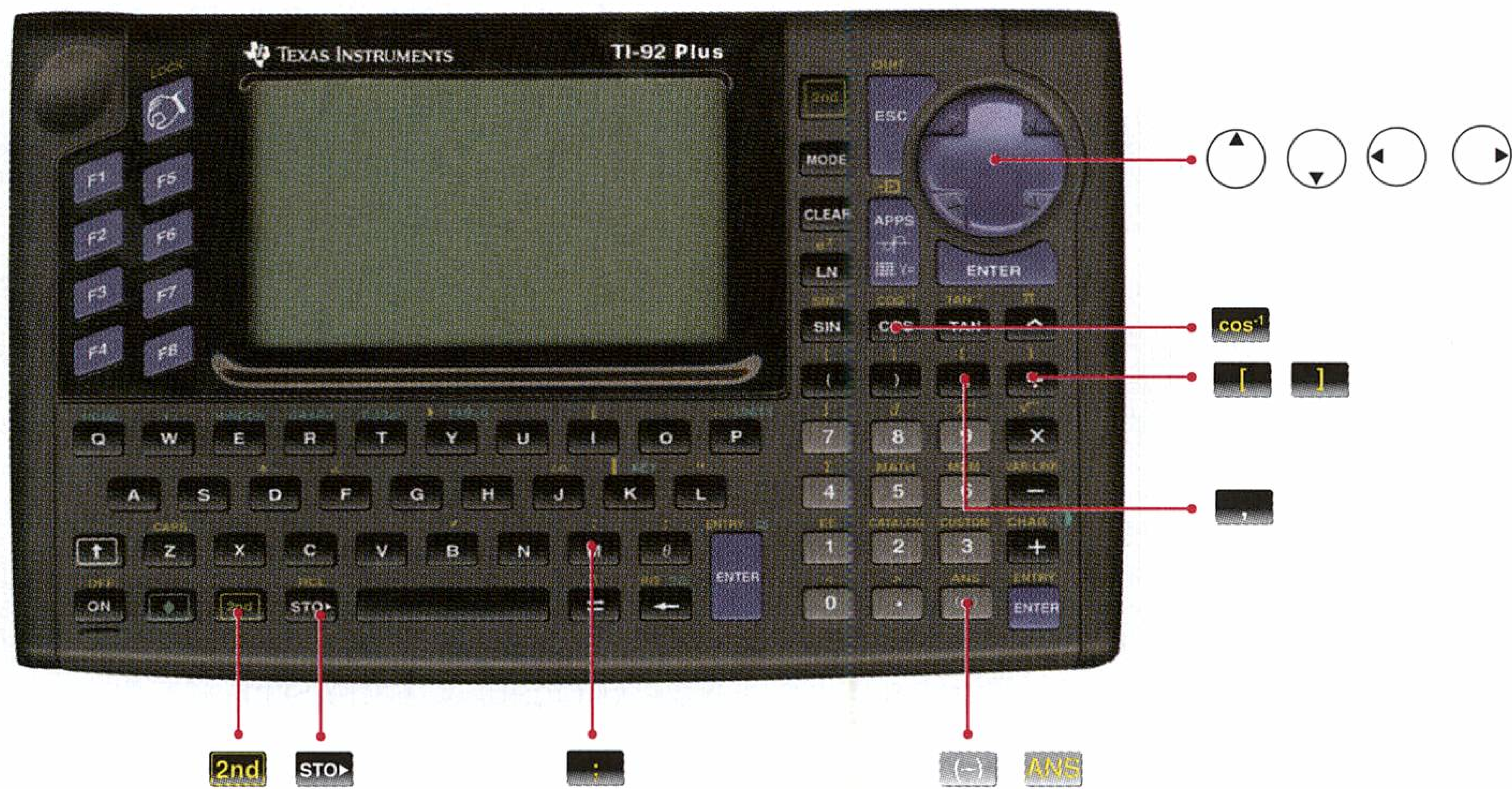
618. Berechnen Sie den **Höhenschnittpunkt** H eines Dreiecks als Schnitt der Höhen: A(–7,0), B(9,–8), C(3,10)

Anleitung: $C + t \cdot nv(B-A) = A + s \cdot nv \cdot (C-B)$

619. Berechnen Sie den **Mittelpunkt** I und den Radius ρ des Inkreises des Dreiecks ABC [A(0,-2), B(10,3), C(4,6)].

Anleitung: Eine Winkelsymmetrale ist z. B.: A + t · (unitv(B – A) + unitv(C – A)). Den Radius findet man als Abstand des Mittelpunkts von der Seite AB: dotp(unitv(nv(B – A)),M – A)

Lineare analytische Geometrie und TI-92 bzw. TI-92 – Übersicht



Mathematische Darstellung	Eingabe im TI-92 bzw. TI-92 Plus
Vektoren: waagrecht: (2, 3) senkrecht: $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$	waagrecht: [2,3] senkrecht: [5;–1] oder [[5][–1]]
Betrag = Länge: $\lvert\vec{v}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{2^2+3^2}$	norm([2,3])
Einheitsvektor: $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}$	unitv([2,3])
skalares Produkt zweier Vektoren: $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = 2\cdot5-3\cdot4=-2$	dotp([2,-3] , [5,4])
vektorielles Produkt zweier Vektoren: $\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-9\\20\end{pmatrix}$	crossp([2,6,3],[–3,1,0])
Winkel zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit der cos-Formel: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$	[1,2] STO▸ a / [2,3] STO▸ b MODE ▼ ▼ ▼ ▶ 2 ENTER <Degree> 2nd cos⁻¹ (dotp(a,b) / (norm(a) · norm(b)))

Bemerkung: Die Befehle dotp, crossp, unitv erhält man mit der Eingabe: 2nd MATH 4 L ...

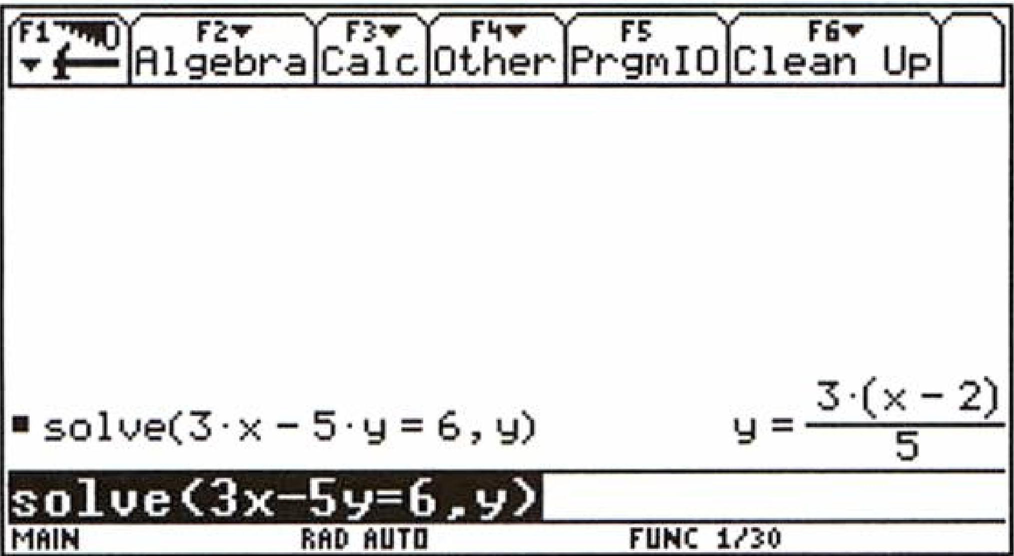
norm(erhält man mit 2nd MATH 4 B 1
solve(erhält man mit 2nd MATH 9 , 1 oder F2 1
simult(erhält man mit 2nd MATH 4 5
abs(erhält man mit 2nd MATH 1 2

Alle Befehle kann man auch mit 2nd MATH und Anfangsbuchstabe und Cursor erreichen.

4. Kegelschnitte

Beispiel:

Die Ellipse ell: $9x^2+25y^2=900$ wird von der Geraden g: $3x-5y=6$ geschnitten. Schnittpunkte?



Lösung:

Zuerst berechnen wir y aus der linearen Gleichung der Geraden (mit **solve**).

Eingabe: F2 1 3 X − 5 Y = 6 , Y) ENTER
(F2 1 = solve( )

Dann wird das Ergebnis in die zweite Gleichung eingesetzt (Einsetzungsverfahren) und mit **solve** nach x aufgelöst. Zum Schluss wird dieses Ergebnis in die erste Gleichung eingesetzt.

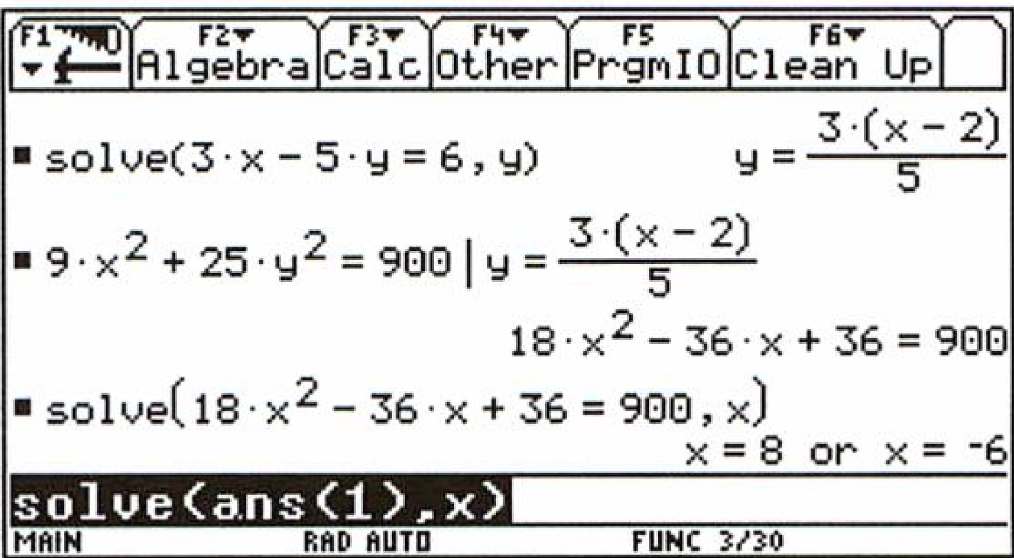
Eingabe:

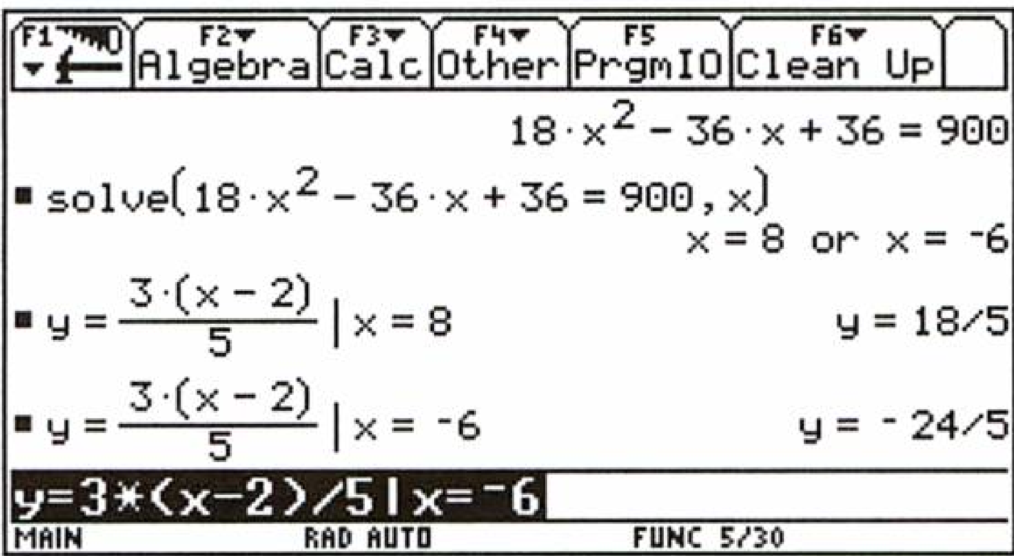
9 X ^ 2 + 2 5 Y ^ 2 = 9 0 0 2nd | 2nd ANS ENTER
(2nd ANS = ans(1))

F2 1 2nd ANS , X) ENTER
(F2 1 = solve(; 2nd ANS = ans(1))

▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ENTER 2nd | X = 8 ENTER ► ←

(−) 6 ENTER





Ergebnis: $S_1\left(8, \frac{18}{5}\right)$, $S_2\left(-6, -\frac{24}{5}\right)$

AUFGABEN

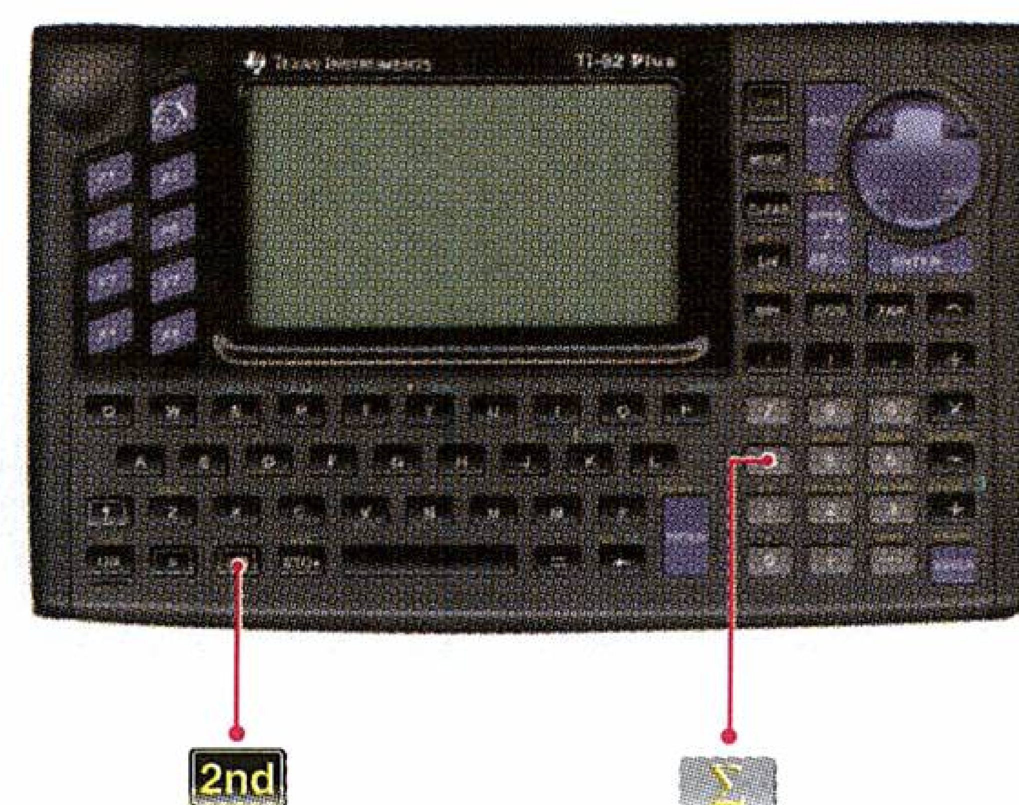
620. Die Schnittpunkte der Ellipse ell: $5x^2+4y^2=180$ mit der Geraden g: $x-y+1=0$ sind gesucht.

621. Welche Schnittpunkte hat die Gerade g: $2x-y=12$ mit der Parabel par: $y^2=4x$?

622. In welchen Punkten schneiden einander die Hyperbel hyp: $x^2-3y^2=9$ und die Gerade g: $x-3y=-3$?

623. In welchen Punkten wird der Kreis k: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ von der Geraden g: $3x+4y=26$ geschnitten?

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik



$\binom{n}{k}$ wird eingegeben mit:

N C R (N , K)

Beispiel: Binomialverteilung

Ein Schüler kann 70 % der Vokabeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine positive Note, wenn auf 10 Fragen mindestens 6 richtige Antworten gegeben werden müssen. Man löse das Beispiel mit Hilfe der Binomialverteilung, die als Funktion im TI-92 bzw. TI-92 Plus abgespeichert werden soll.

Lösung:

Die Binomialverteilung für k richtige Antworten bei n Fragen, wenn p die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort ist, wird so angeschrieben:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

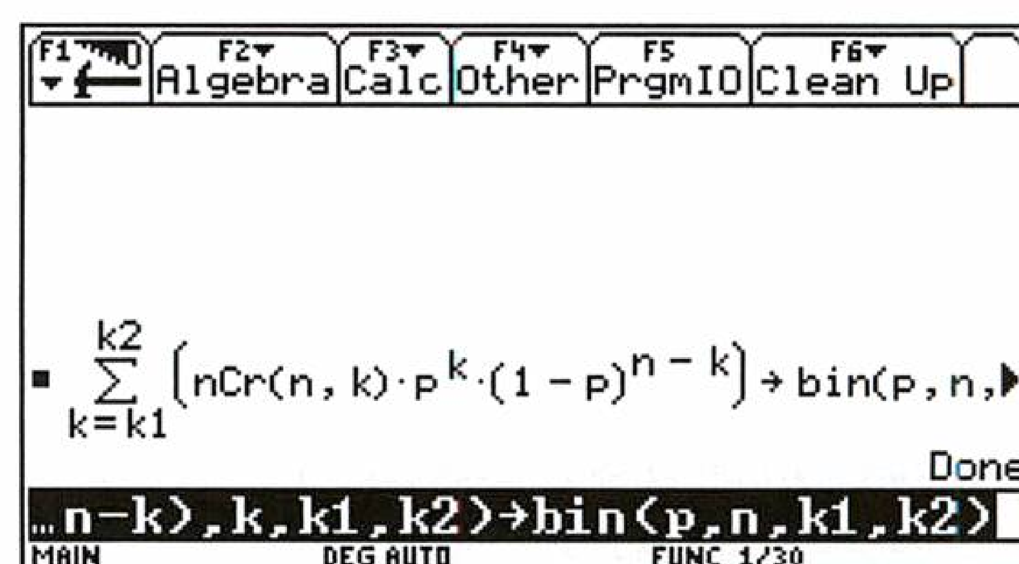
Wenn mehrere k möglich sind, von k_1 bis k_2, so erhält man die Wahrscheinlichkeit dafür als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(k_1\leqslant X\leqslant k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Dies speichern wir auf der Funktionsvariablen **bin** ab.

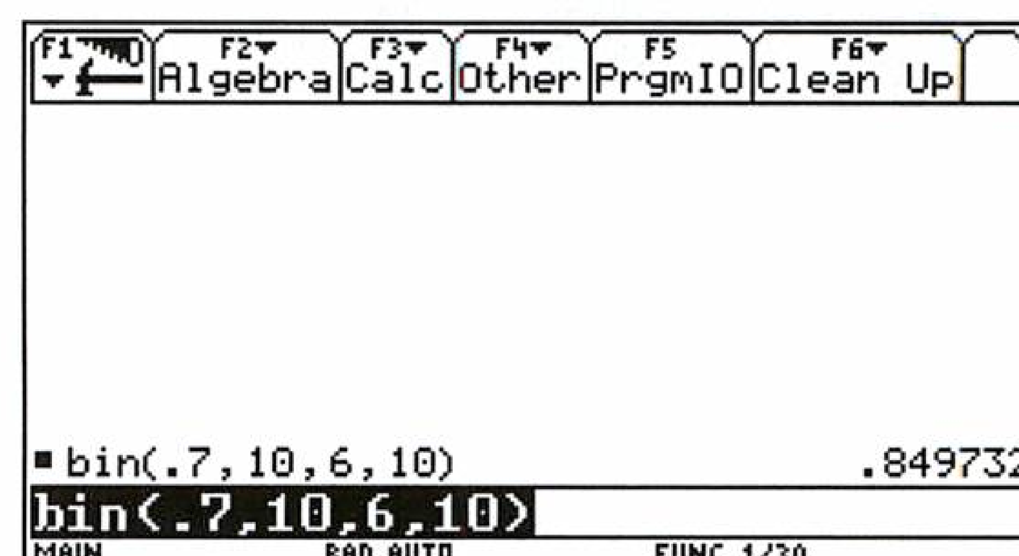
Eingabe:

2nd Σ N C R (N , K) × P ^ K × (1 −
P) ^ (N − K) , K , K 1 , K 2) STO▸
B I N (P , N , K 1 , K 2) ENTER



Damit lässt sich unser Problem leicht lösen mit der **Eingabe:**

B I N (0 . 7 0 , 1 0 , 6 , 1 0) ENTER



Das ergibt: **0,8497 ≈ 85 %**

In 85 % der Fälle kann man (mit 70 % Vokabelwissen) eine positive Note bekommen.

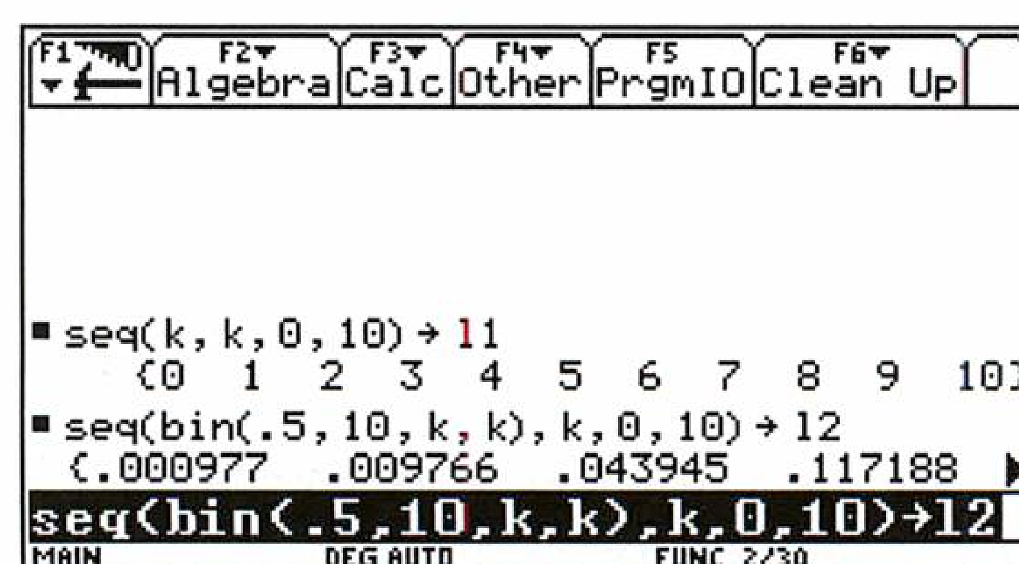
Beispiel: Graph der Binomialverteilung

Man stelle die Binomialverteilung von 10 Münzwürfen ($p=\frac{1}{2}$) als PLOT dar!

Lösung:

Dazu müssen wir die k-Werte (0 bis 10) auf der Liste L1 abspeichern. Dann speichern wir die Werte der Binomialverteilung auf der Liste L2 ab. Dazu benutzen wir die seq-Funktion des TI-92 bzw. TI-92 Plus:

S E Q (K , K , 0 , 1 0) STO▸ L 1 ENTER
S E Q (B I N (. 5 , 1 0 , K , K
) , K , 0 , 1 0) STO▸ L 2 ENTER



Nun wechseln wir in den Y=-Bildschirm und erstellen den PLOT

◆ Y= F1 8 <Clear Editor> ▲ ENTER

▼ ▼ L 1 ▼ L 2 ENTER ENTER

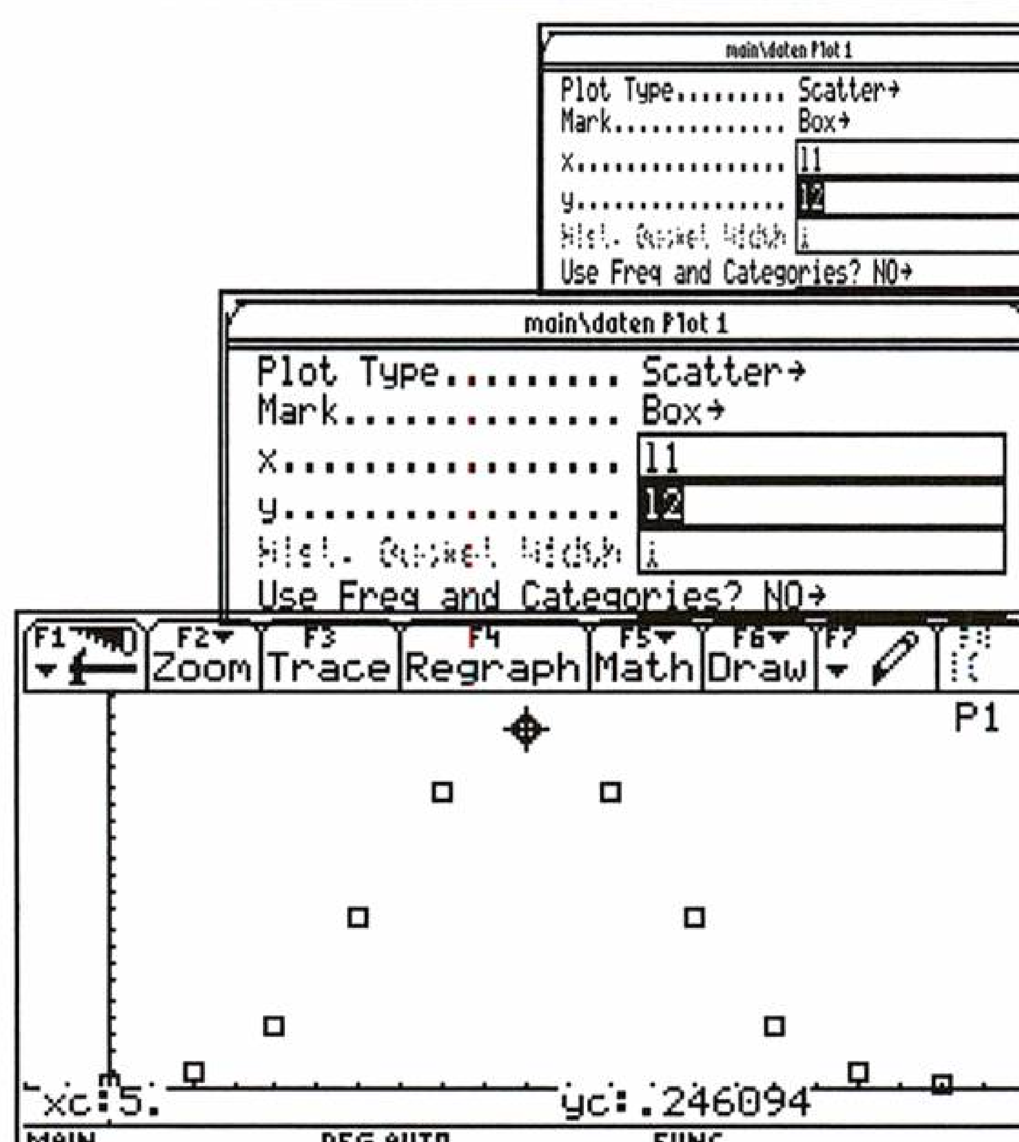
F2 9 <ZoomData>

F2▾ Zoom | F3 Edit | F4 ✓ | F5▾ All
1:ZoomBox
2:ZoomIn
3:ZoomOut
4:ZoomDec
5:ZoomSqr
6:ZoomStd
7:ZoomTrig
8:ZoomInt
9:ZoomData
A:ZoomFit
B:Memory
C:SetFactors...

Damit sehen wir die Binomialverteilung für n = 10

Mit F3 ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ wandern wir die einzelnen Punkte entlang und können die Werte der Funktion ablesen. **Der größte Wert ist bei x = 5 mit y = 0,25 = 25 % gegeben.**

Diese Funktion ähnelt schon sehr der Normalverteilung. Das zeigen wir später genauer!



Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

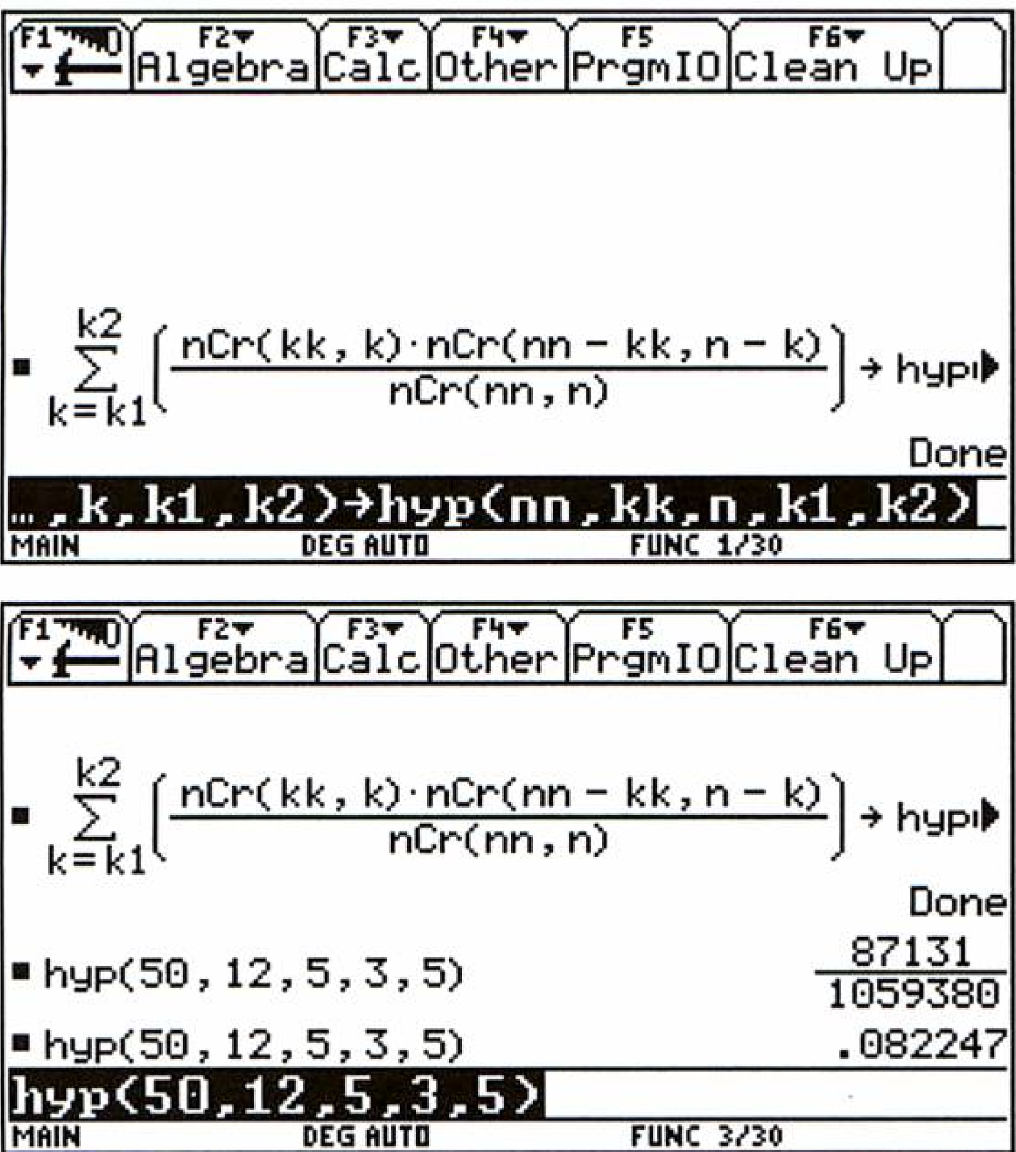
In einer Kiste von 50 Äpfeln sind 12 Äpfel verfault. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei Ziehung einer Stichprobe von 5 Äpfeln mehr als 2 verfaulte Äpfel zu bekommen?

Man löse das unter Eingabe einer Funktion der hypergeometrischen Verteilung.

Lösung:

Die Funktion der hypergeometrischen Funktion ist:

$$P(X=k)=\frac{\binom{\text{SCHLECHT}}{\text{schlecht}}\cdot\binom{\text{GUT}}{\text{gut}}}{\binom{\text{GESAMT}}{\text{gesamt}}}=\frac{\binom{\text{KK}}{\text{k}}\cdot\binom{\text{NN–KK}}{\text{n–k}}}{\binom{\text{NN}}{\text{n}}},$$ wobei die groß geschriebenen Doppelbuchstaben die Grundmenge bezeichnen, die klein geschriebenen die Stichprobe.



Dies lässt sich für die Summe für k von k_1 bis k_2 so abspeichern:

[2nd] [Σ] [N] [C] [R] [(] [K] [K] [,] [K] [)] [×] [N] [C] [R] [(] [N] [N] [–] [K] [K] [,] [N] [–] [K] [)] [÷] [N] [C] [R] [(] [N] [N] [,] [N] [)] [,] [K] [,] [K] [1] [,] [K] [2] [)] [STO▸] [H] [Y] [P] [(] [N] [N] [,] [K] [K] [,] [K] [1] [,] [K] [2] [)] [ENTER]

Jetzt lässt sich die Wahrscheinlichkeit für nn = 50, kk = 12 und n = 5 mit $k_1 = 3$ und $k_2 = 5$ berechnen:

[H] [Y] [P] [(] [5] [0] [,] [1] [2] [,] [5] [,] [3] [,] [5] [)] [ENTER] [◆] [ENTER]

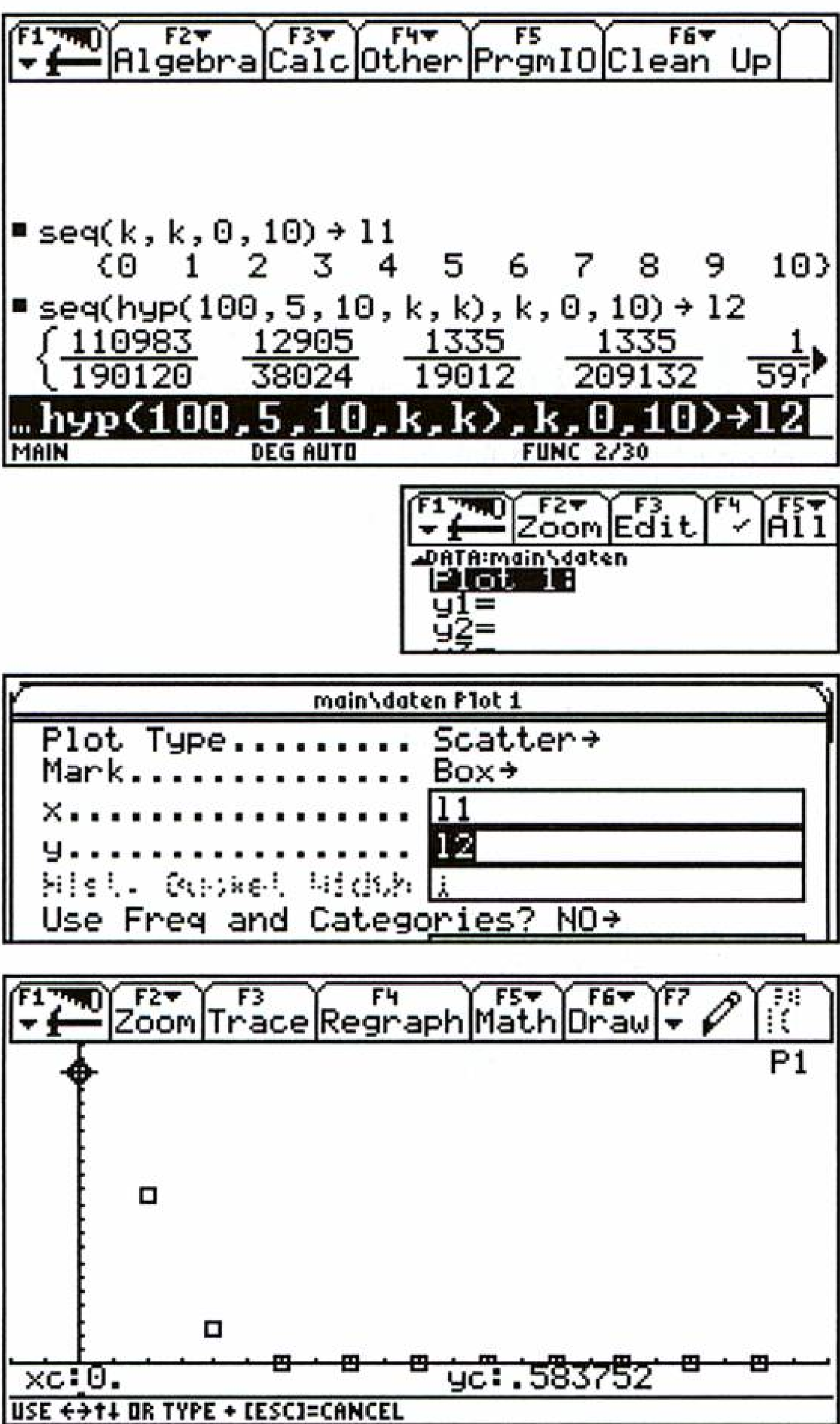
Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Stichprobe von 5 Äpfeln 3 bis 5 „schlechte" Äpfel zu bekommen, ist ca. 8 %.

Beispiel: Graph der hypergeometrischen Verteilung

Man stelle die hypergeometrische Verteilung einer Stichprobe von 10 Elementen aus einer Grundmenge von 100 Elementen mit 5 „schlechten" Elementen als PLOT dar!

Lösung:

Dazu müssen wir die k-Werte (0 bis 10) auf der Liste L1 abspeichern. Dann speichern wir die Werte der hypergeometrischen Verteilung auf der Liste L2 ab. Dazu benutzen wir die seq-Funktion des TI-92 bzw. TI-92 Plus:



[S] [E] [Q] [(] [K] [,] [K] [,] [0] [,] [1] [0] [)] [STO▸] [L] [1] [ENTER]
[S] [E] [Q] [(] [H] [Y] [P] [(] [1] [0] [0] [,] [5] [,] [1] [0] [,] [K] [,] [K] [)] [,] [K] [,] [0] [,] [1] [0] [)] [STO▸] [L] [2] [ENTER]

Nun wechseln wir in den [Y=]-Bildschirm und erstellen den PLOT:

[◆] [Y=] [F1] [8] <Clear Editor> [▲] [ENTER]

[▼] [▼] [L] [1] [▼] [L] [2] [ENTER] [ENTER]

[F2] [9] <ZoomData>

Damit sehen wir die Binomialverteilung für n=10

Mit [F3] [▶] … [▶] wandern wir die einzelnen Punkte entlang und können die Werte der Funktion ablesen. **Der größte Wert ist bei x = 0 mit y = 0,58 (= 58 %) gegeben.**

Beispiel: Graph der Normalverteilung

Zeichnen Sie die Dichtefunktion der Normalverteilung für den Weitwurf mit $\mu = 25$ m und $\sigma = 4$ m auf und bestimmen Sie mit dem grafischen Integral die Wahrscheinlichkeit, dass der Weitwurf zwischen 22 m und 30 m liegt.

Lösung:

Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist $fn(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Die Eingabe erfolgt so:

1 ÷ (2nd G S × 2nd √ 2 2nd π)) ×
2nd e^x (-) (X − 2nd G M) ^ 2 ÷ (2
2nd G S ^ 2)) STO▸ F N (2nd G M ,
2nd G S , X) ENTER

Zur Erstellung des Graphen wechseln wir in den Y=-Bildschirm:

MODE ▶ 1 <Graph...FUNCTION> ENTER

◆ Y= F1 8 ENTER <Clear Functions> ▲ ← ▼ <Plot löschen> ENTER

F N (2 5 , 4 , X) ENTER

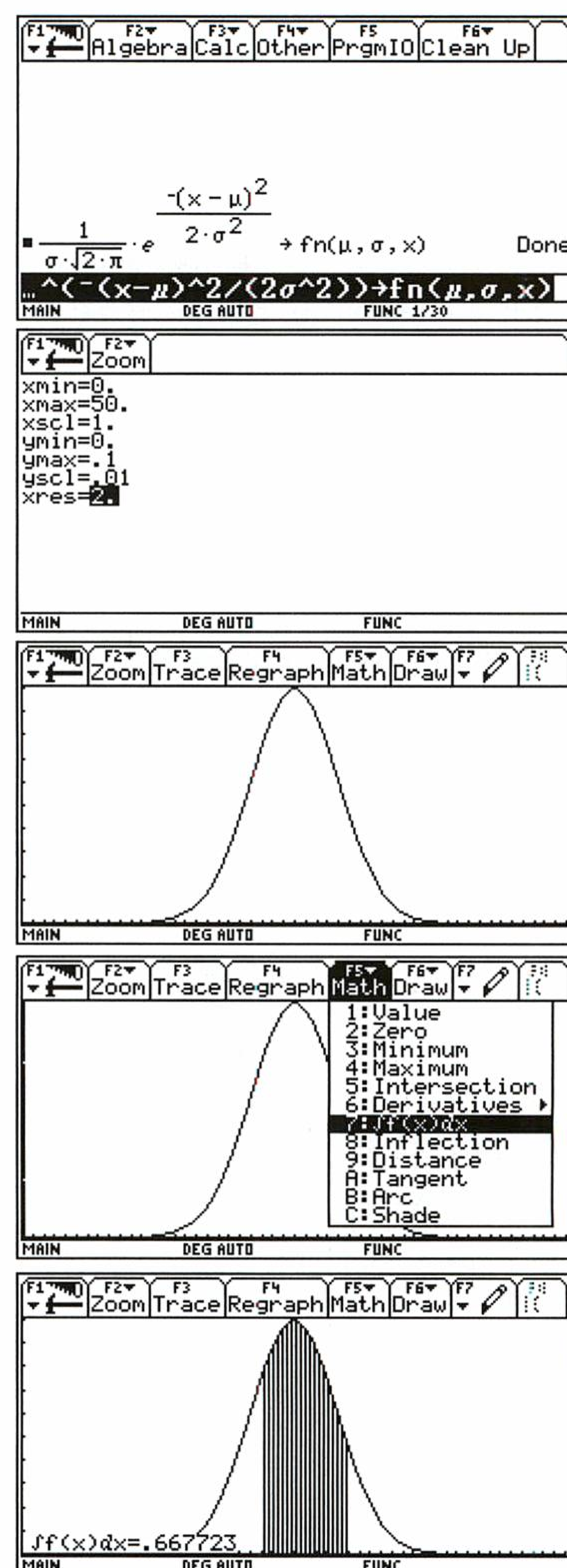
Die WINDOW-Werte werden eingegeben:

◆ WINDOW 0 ENTER 5 0 ENTER 1 ENTER 0 ENTER • 1 ENTER • 0 1 ENTER

und zur grafischen Anzeige gewechselt: ◆ GRAPH
Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Weitwürfe zwischen 22 und 30 m verwenden wir das grafische Integral:

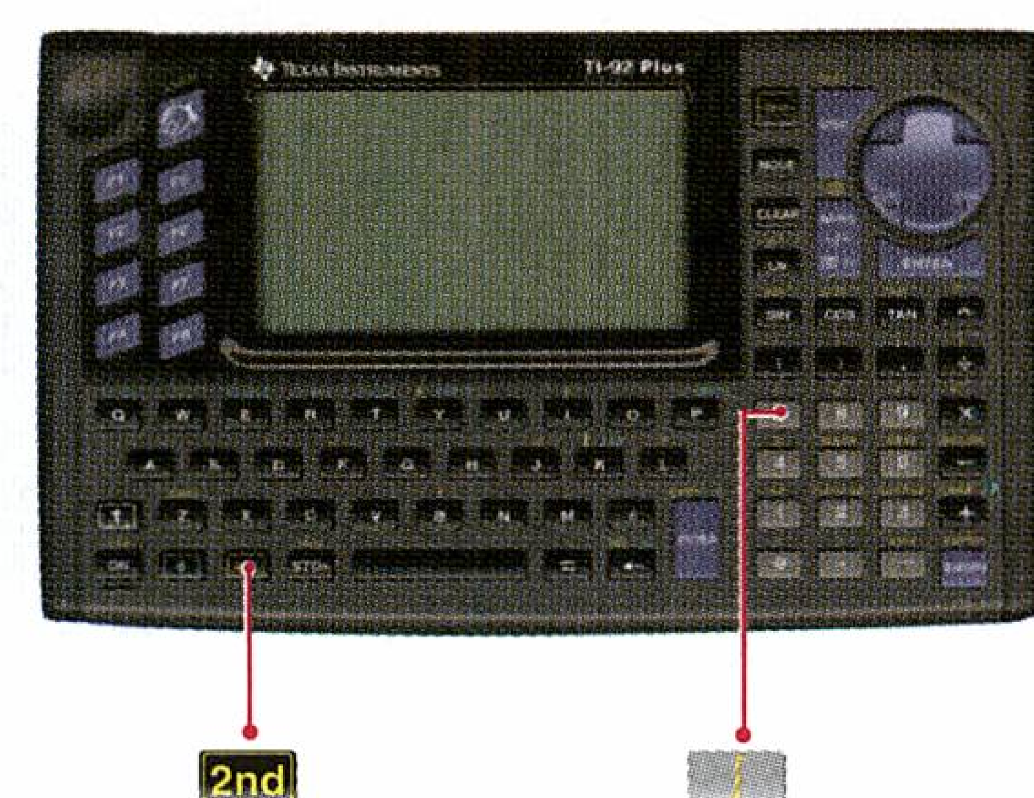
F5 7 2 2 ENTER 3 0 ENTER

Das ergibt als Wahrscheinlichkeit: **0,6677 ≈ 67 %**



Beispiel: Normalverteilung

Schraubenlängen seien normalverteilt mit der mittleren Länge $\mu = 20$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 1$ mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schraubenlängen zwischen 19 mm und 21 mm lang sind?
Man löse dieses Beispiel **a)** mit der Tabelle **b)** mit dem TI-92- bzw. TI-92 Plus- Integral.



Lösung:

a) Gesucht ist $P(19 < X < 21) = P(X < 21) - P(X \leq 19) =$

$= P(U < \frac{21-20}{1}) - P(U \leq \frac{19-20}{1}) = F(1) - F(-1) = F(1) - (1 - F(1))$

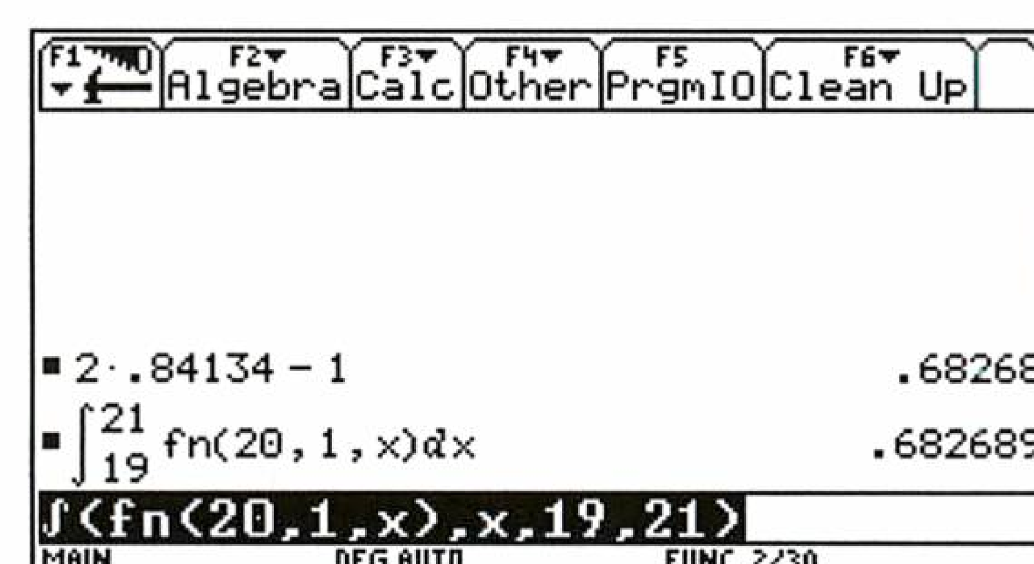
$= 2F(1) - 1 =$ laut Tabelle: $2 \cdot 0{,}84134 - 1 =$ **0,68268**

b) Die Integralmethode ist: $P(19 < X < 21) = \int_{19}^{21} fn(20,1,x)\,dx$

Eingabe:

2nd ∫ F N (2 0 , 1 , X) , X , 1
9 , 2 1) ENTER

Das liefert als Ergebnis: **0,682689**



Beispiel: Vergleich zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung:

Zeichnen Sie die Binomialverteilung und die Normalverteilung für folgende Werte: n = 10, p = 0,5

$\mu = n \cdot p = 5, \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1{,}5$

Lösung:

Für den PLOT der Binomialverteilung geben wir ein:

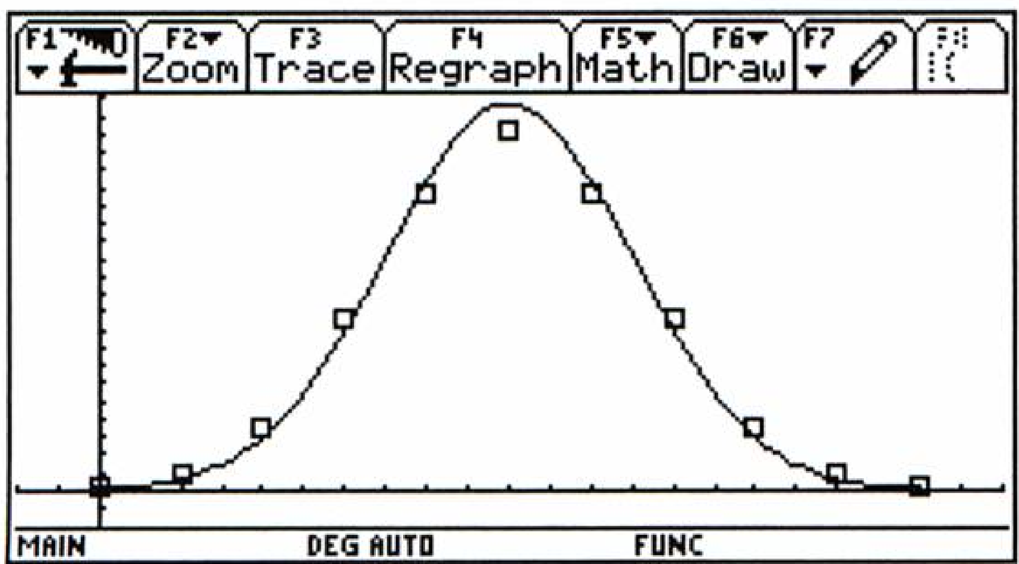
S E Q (K , K , 0 , 1 0) STO▸ L 1 ENTER
S E Q (B I N (• 5 , 1 0 , K , K
) , K , 0 , 1 0) STO▸ L 2 ENTER
◆ Y= F1 8 <Clear Editor> ENTER ▲ ENTER ▼ ▼ L 1 ▼ L
2 ENTER ENTER

Für die Normalverteilung geben wir ein:

▼ F N (5 , 1 • 5 , X) ENTER

F2 9 <Zoom Data>

Das ergibt nebenstehendes Bild (vgl. Außenspalte).



Beispiel: Regression und Korrelation

Gegeben sind folgende Wertepaare:

x_i	80	75	45	75	70	60	45	80	80
y_i	80	75	75	95	100	80	45	70	90

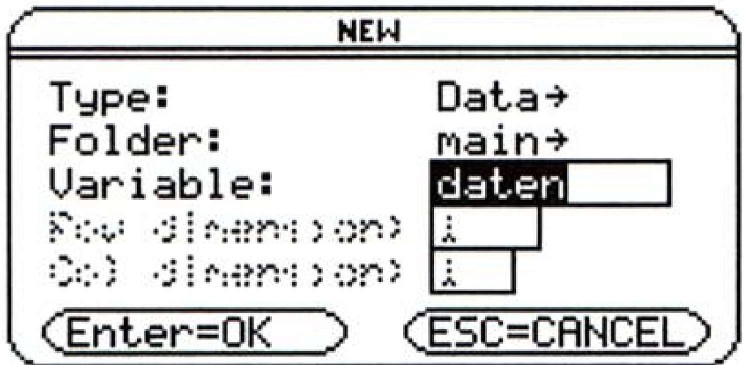
Man ermittle die Koeffizienten a und b der Regressionsgeraden $y = ax + b$ sowie den Korrelationskoeffizienten und stelle die Regressionsgerade grafisch dar.

Lösung:

Zur Eingabe der Tabelle benutzen wir den DATA/MATRIX-Editor:



APPS 6 3 ▼ ▼ daten ENTER ENTER



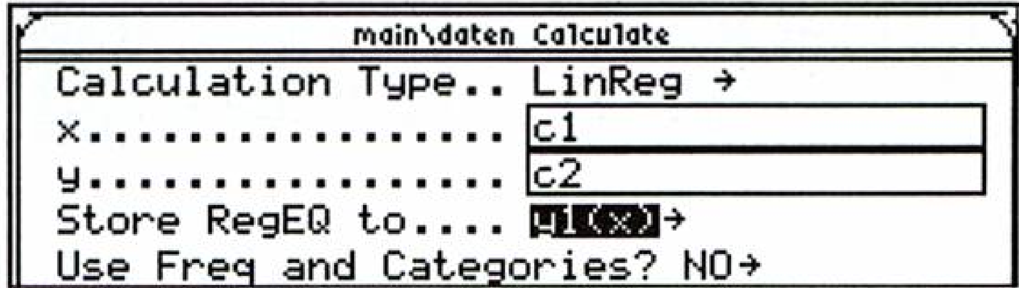
und geben die Daten spaltenweise ein:

8 0 ENTER 7 5 ENTER 4 5 ENTER 7 5 ENTER 7 0 ENTER 6 0
ENTER 4 5 ENTER 8 0 ENTER 8 0 ENTER

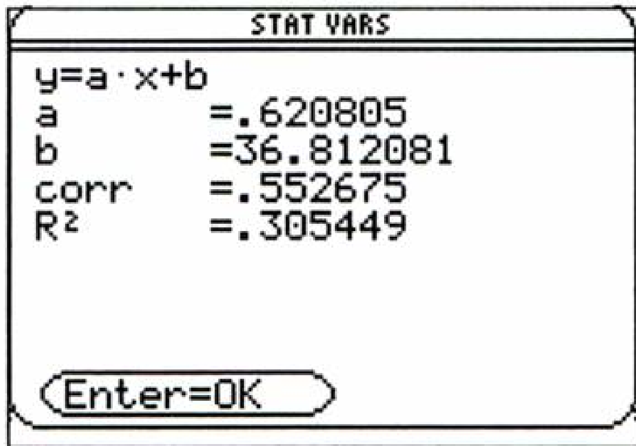
▶ 2nd ▲ <2.Spalte>

8 0 ENTER 7 5 ENTER 7 5 ENTER 9 5 ENTER 1 0 0 ENTER
8 0 ENTER 4 5 ENTER 7 0 ENTER 9 0 ENTER

Zur Ermittlung der Regressionsgeraden geben wir ein:



F5 ▶ 5 <LinReg> ▼ C 1 ▼ C 2 ▼ ▶ ▼ ENTER ENTER



das ergibt die Variablen der Regressionsgeraden: **a = 0,63 b = 36,8 und die Korrelation corr = 0,55 (mittlere Korrelation)**

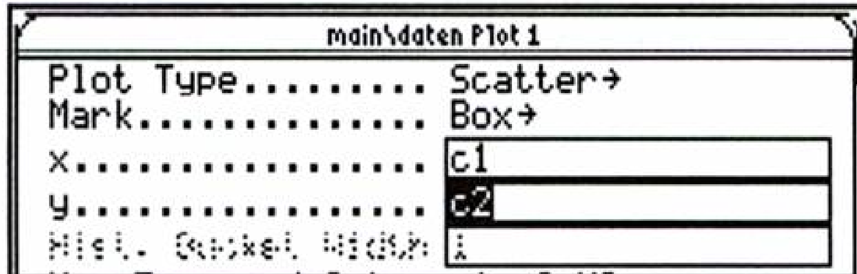
Um die Gerade und die Punkte zu sehen, erstellen wir einen Punkte-PLOT:

ENTER F2 F1 ▼ ▼ C 1 ▼ C 2 ENTER ENTER ENTER

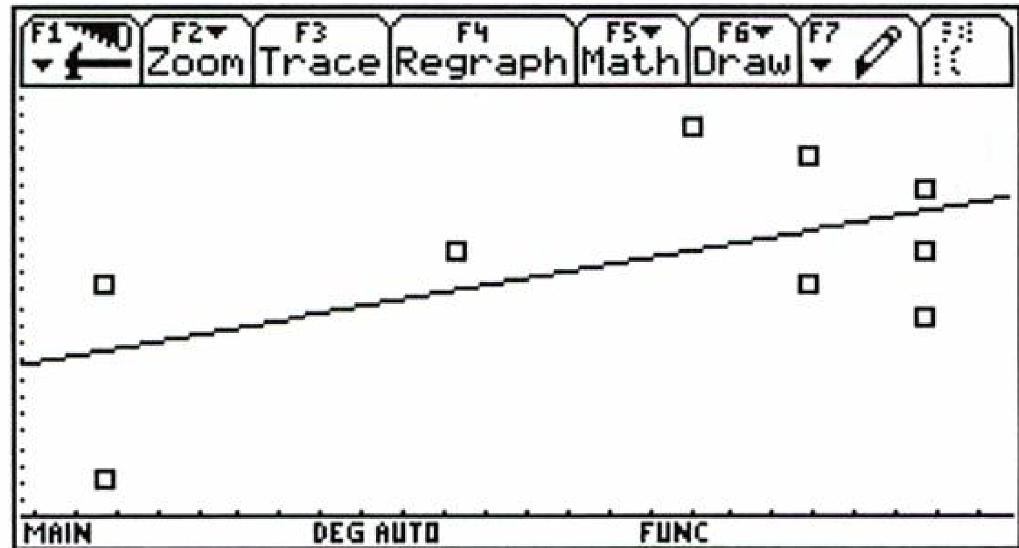
Wir schalten den Graph ein:

◆ WINDOW

F2 9 <ZoomData>



und sehen die Punkte mit der Regressionsgeraden.



AUFGABEN

624. Eine Urne enthält 10 Kugeln, 4 sind rot, der Rest schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen mit Zurücklegen, dass von 5 gezogenen Kugeln **a)** 2 rot **b)** mindestens 3 schwarz **c)** 2, 3 oder 4 Kugeln rot sind?

Man löse dies mit der **bin**-Funktion!

625. Britta und Georg spielen Tennis. Sie sind beide gleich gut. Ist es wahrscheinlicher, dass Britta 4 von 5 Spielen gewinnt oder 7 von 9 Spielen? Man löse dies mit der **bin**-Funktion!

626. Bei der Produktion von Glühlampen gibt es 5 % Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass von 10 Lampen mehr als eine Lampe kaputt ist? Man löse dies mit der **bin**-Funktion!

627. Erstellen Sie einen PLOT der Binomialverteilung für $n = 20$ und $p = 0{,}3$. Bei welchem Wert von k tritt das Maximum auf?

628. Erstellen Sie einen PLOT der Binomialverteilung für $n = 8$ und $p = 0{,}8$. Bei welchem Wert von k tritt das Maximum auf?

629. Von 20 gut durchmischten Schnapskarten bekommt ein Spieler 5 auf die Hand. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3 Karten in der „Farbe" Pik mit Hilfe der hyp-Funktion.

630. Von den 1200 Schülern einer Schule sind 235 Schüler größer als 1,85 m. Wie groß ist die Chance in einer Turnklasse von 18 Schülern mindestens 2 „großen" Schülern zu begegnen?

631. Man stelle die hypergeometrische Verteilung einer Stichprobe von 20 Elementen aus einer Grundmenge von 500 Elementen mit 80 „schlechten" Elementen als PLOT dar! Bei welchem Wert von k tritt das Maximum auf?

632. Man stelle die hypergeometrische Verteilung einer Stichprobe von 5 Elementen aus einer Grundmenge von 300 Elementen mit 50 „schlechten" Elementen als PLOT dar! Bei welchem Wert von k tritt das Maximum auf?

633. Die Produktion von Roller-Skates-Rollern sei normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 35$ mm und $\sigma = 0{,}2$ mm. Wie groß ist der Ausschussanteil, wenn Rollen mit weniger als 34,6 mm weggeworfen werden. Lösen Sie das Beispiel grafisch mit der Normalverteilungsfunktion fn und dem grafischen Integral!

634. Nimmt man eine Normalverteilung der Leistungen von Schülerinnen und Schülern mit dem Mittelwert $\mu = 2{,}5$ und $\sigma = 1$ an, so kann man fragen, wie viel % der Schülerinnen und Schüler Nichtgenügend ($X \geqslant 5$) haben werden. Lösen Sie das Beispiel grafisch mit der Normalverteilungsfunktion fn und dem grafischen Integral!

635. Man berechne die Fragestellung von Aufgabe **582.** händisch und mit dem TI-92- bzw. TI-92 Plus- Integral.

636. Man berechne die Fragestellung von Aufgabe **583.** händisch und mit dem TI-92- bzw. TI-92 Plus- Integral.

637. Berechnen Sie die Regressionsgerade und die Korrelation für die Punktepaare: (36,43), (12,24), (20,22), (40,42), (13,16). Sind die x- und y-Werte gut korreliert?

638. Folgende Tabelle gibt die Bevölkerungszahlen in einem bestimmten Gebiet und die Anzahl der dort beobachteten Störche an:

	1951	1961	1971	1981	1991
Bevölkerung	276.136	271.001	272.319	269.771	270.880
Störche	810	786	790	753	770

Berechnen Sie die Regressionsgerade und die Korrelation. Bestätigt das die These: „Die Störche bringen die Babys?"

TI-92 bzw. TI-92 Plus und Wahrscheinlichkeit und Statistik – Übersicht



	Eingabe im TI-92 bzw. TI-92 Plus
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	[N] [C] [R] [(] [N] [,] [K] [)]
Binomialverteilung $P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $p = 0{,}5$, $n = 10$, $k_1 = 8$, $k_2 = 10$	Eingabe der Funktion: [2nd] [∑] [N] [C] [R] [(] [N] [,] [K] [)] [×] [P] [^] [K] [×] [(] [1] [−] [P] [)] [^] [(] [N] [−] [K] [)] [,] [K] [,] [K] [1] [,] [K] [2] [)] [STO▸] [B] [I] [N] [(] [P] [,] [N] [,] [K] [1] [,] [K] [2] [)] [ENTER] Aufruf: [B] [I] [N] [(] [•] [5] [,] [1] [0] [,] [8] [,] [1] [0] [)]
Hypergeometrische Verteilung: $P(X \leq k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\binom{KK}{k}\binom{NN-KK}{n-k}}{\binom{NN}{n}}$ für $NN = 100$, $KK = 10$, $n = 5$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$	Eingabe der Funktion: [2nd] [∑] [N] [C] [R] [(] [K] [K] [,] [K] [)] [×] [N] [C] [R] [(] [N] [N] [−] [K] [K] [,] [N] [−] [K] [)] [÷] [N] [C] [R] [(] [N] [N] [,] [N] [)] [K] [,] [K] [1] [,] [K] [2] [)] [STO▸] [H] [Y] [P] [(] [N] [N] [,] [K] [K] [,] [N] [,] [K] [1] [,] [K] [2] [)] [ENTER] Aufruf: [H] [Y] [P] [(] [1] [0] [0] [,] [1] [0] [,] [5] [,] [2] [,] [3] [)]
Normalverteilungsfunktion: $fn(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $P(19 < X < 21) = \int_{19}^{21} fn(20,1,x)dx$	Eingabe der Funktion: [1] [÷] [(] [2nd] [G] [S] [×] [2nd] [√] [2] [2nd] [π] [)] [)] [×] [2nd] [e^x] [(-)] [(] [X] [−] [2nd] [G] [M] [)] [^] [2] [÷] [(] [2] [2nd] [G] [S] [^] [2] [)] [)] [STO▸] [F] [N] [(] [2nd] [G] [M] [,] [2nd] [G] [S] [,] [X] [)] [ENTER] Aufruf: [2nd] [∫] [F] [N] [(] [2] [0] [,] [1] [,] [X] [)] [,] [X] [,] [1] [9] [,] [2] [1] [)]
Regression und Korrelation:	[APPS] [6] [3] [↓] [↓] daten Dateneingabe... [F5] [→] [5] <LinReg> [↓] [C] [1] [↓] [C] [2] [↓] [→] [↓] [F2] [F1] [↓] [↓] [C] [1] [↓] [C] [2] [◆] [WINDOW] [F2] [9]
Erstellung eines Punkte-PLOTs	L1 und L2 müssen Listen enthalten (statt L1 und L2 kann man auch C1 und C2 angeben, wenn man die Daten im DATA/MATRIX-Editor stehen hat): [◆] [Y=] [F1] [8] <Clear Editor> [↑] [ENTER] [↓] [↓] [L] [1] [↓] [L] [2] [F2] [9] <ZoomData>
Erstellen von Folgen (Listen)	seq(Term, Variable, Anfangswert, Endwert)

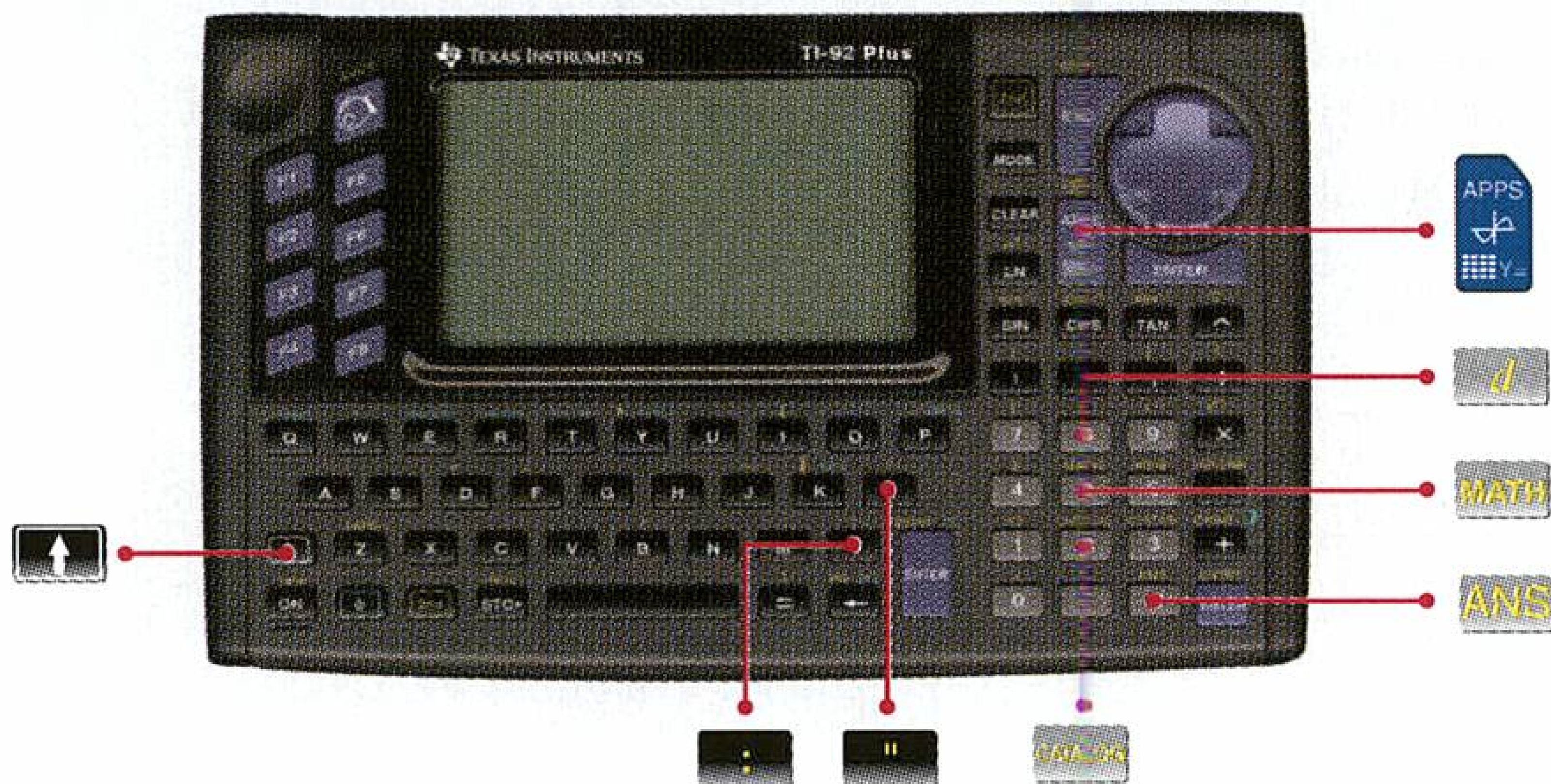
6. Ausbau der Infinitesimalrechnung

Beispiel: Kurvendiskussion mit dem Text-Editor

Man diskutiere die Funktion $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ mit Hilfe nachstehendem Text-Programms, das mit den Befehlen [APPS] <8/9 Text Editor> [3] [▾] [T] [2nd] [P] [K] [U] [R] [V] [D] [ENTER] [ENTER] eingegeben wird.

Jede Textzeile – außer der ersten – muss mit [F2] [ENTER] [ENTER] abgeschlossen werden (erzeugt das C am linken Rand!). **approx** erzeugt man mit [2nd] [CATALOG] [A] [▾] ... [▾] [ENTER]. **zeros** erzeugt man mit [2nd] [MATH] [9] [4].

Das Kommentar- © erzeugt man mit [2nd] [X] .



TEXT-PROGRAMM	KOMMENTAR
:kurvendiskussion C:x^3-9x^2+24x-10 [STO▸] f(x)	In der zweiten Zeile wird die gesuchte Funktion auf f(x) gespeichert.
C:setMode("split screen","top-bottom"):setMode("split screen ratio","1:2")	Einschalten des geteilten Bildschirms im Verhältnis 1:2
C:f(x) [STO▸] y1(x):f(x) C: [d] (f(x),x) [STO▸] f1(x):f1(x) C: [d] (f1(x),x) [STO▸] f2(x):f2(x) C: [d] (f2(x),x) [STO▸] f3(x):f3(x)	Nun wird f(x) auf y1(x) abgespeichert (für den Graph). Es folgen die Ableitungen der Funktion f(x), gespeichert auf f1(x) bis f3(x).
C:approx(zeros(f(x),x))	Ausgabe der Nullstellen
C:approx(zeros(f1(x),x)) [STO▸] ewx C:approx(f(ewx)) C:approx(f2(ewx))	Ausgabe der Extremwerte: x-Werte, y-Werte, y″-Werte
C:approx(zeros(f2(x),x)) [STO▸] wpx C:approx(f(wpx)) [STO▸] wpy C:approx(f3(wpx))	Ausgabe der Wendepunkte (gespeichert auf wpx, wpy) mit x-Werten, y-Werten, y‴-Werten
C:approx(f1(wpx)) [STO▸] wpk C:approx(wpy-wpx*wpk) [STO▸] wpd C:wpk*x+wpd [STO▸] y2(x)	Ausgabe der Wendetangente (mit wpk, wpd), abgespeichert auf y2(x):
C:expand(f(x)) © Asymptote C: [ANS] (1) [STO▸] y3(x)	Als letztes kommt die Asymptote, die wir bekommen, wenn wir den Zähler durch den Nenner dividieren (nur bei Bruchtermen). Dazu dient der Befehl **expand**. Gespeichert wird dies auf y3(x). Um die wirkliche Asymptote zu bekommen, muss man im [Y=]-Bildschirm den Bruchtermteil von y3(x) löschen!
C:approx(zeros(getdenom(f(x)),x)) © Polstellen C:setMode("split screen","full"):zoomStd C:zoomDec	Nun können auch noch die Polstellen als Nullstellen des Nenners **(getdenom)** angegeben werden: Die letzten Befehle dienen zum Aufruf des [GRAPH]-Bildschirms.

Lösung:

Nach der Beendigung der Eingabe starten wir das Text-Programm mit einem Sprung an den Anfang mit [Taste] einem (TI-92 Plus, TI-89) oder 2nd ⬆ ... 2nd ⬆ (TI-92) und einem fortwährendem F4-Tastendruck: F4 F4 ... F4

Ausführung des Textprogramms:

```
F1 F2 Command F3 View F4 Execute F5 Find...
C:d(f1(x),x)→f2(x):f2(x)
C:d(f2(x),x)→f3(x):f3(x)
C:approx(zeros(f(x),x))
                                3·x² - 18·x + 24
■ d/dx(f1(x)) → f2(x) : f2(x)           6·x - 18
■ d/dx(f2(x)) → f3(x) : f3(x)                  6
MAIN          DEG AUTO          FUNC
```

1. Ableitung der Funktion
2. Ableitung der Funktion
3. Ableitung der Funktion

```
F1 F2 Command F3 View F4 Execute F5 Find...
C:approx(f(ewx))
C:approx(f2(ewx))
C:approx(zeros(f2(x),x))→wpx
■ approx(zeros(f(x),x))           {.507967}
■ approx(zeros(f1(x),x)) → ewx    {2.   4.}
■ approx(f(ewx))                  {10.  6.}
■ approx(f2(ewx))                 {-6.  6.}
MAIN          DEG AUTO          FUNC
```

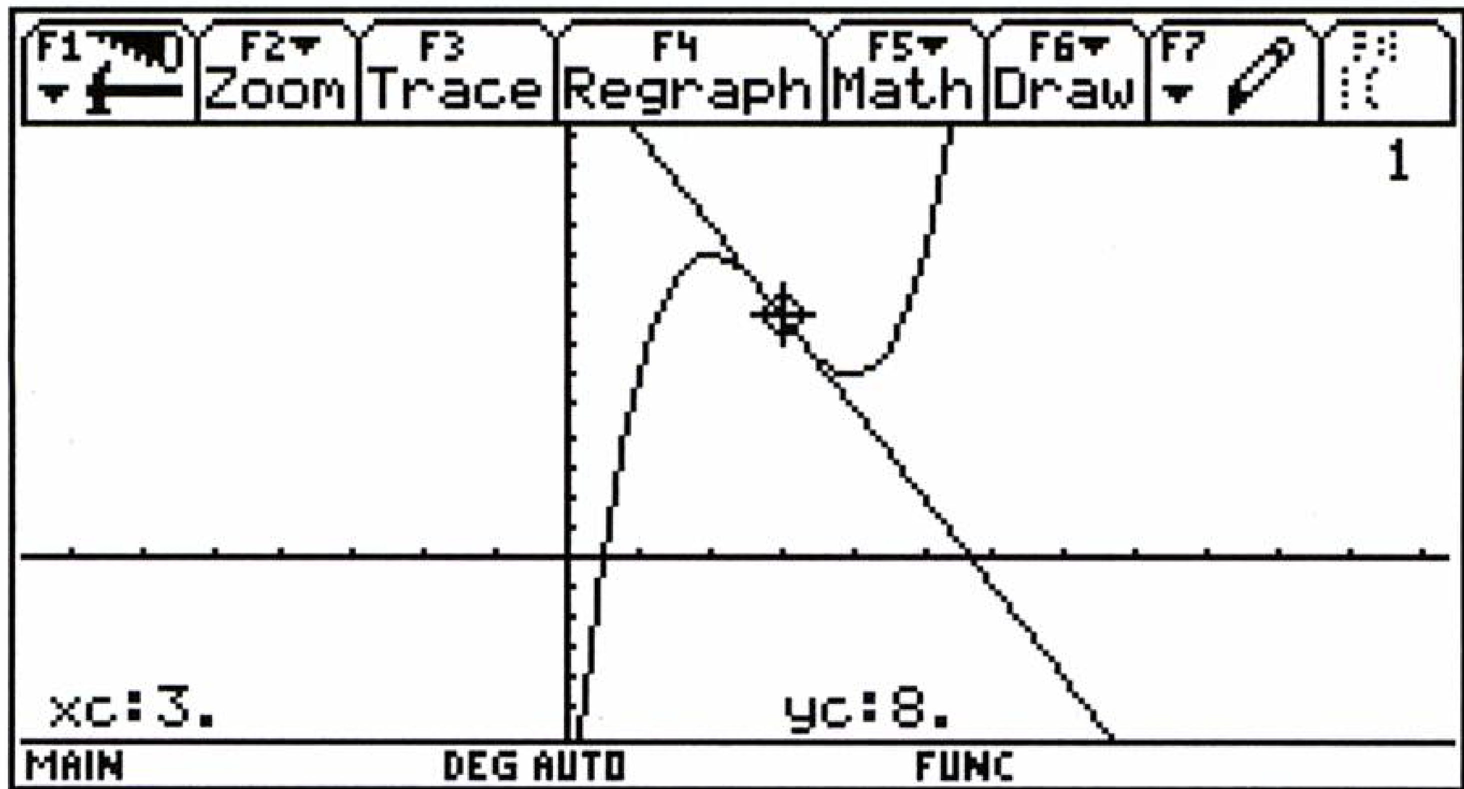
- x-Koordinate der Nullstelle
- x-Koordinaten der Extremwerte
- y-Koordinaten der Extremwerte
- y″-Wert der Extremwerte

```
F1 F2 Command F3 View F4 Execute F5 Find...
C:approx(f1(wpx))→wpk
C:approx(wpy-wpx*wpk)→wpd
C:wpk*x+wpd→y2(x)
■ approx(zeros(f2(x),x)) → wpx      {3.}
■ approx(f(wpx)) → wpy              {8.}
■ approx(f3(wpx))                     6.
■ approx(f1(wpx)) → wpk            {-3.}
■ approx(wpy - wpx·wpk) → wpd      {17.}
MAIN          DEG AUTO          FUNC
```

- x-Koordinate des Wendepunkts
- y-Koordinate des Wendepunkts
- y‴-Wert des Wendepunkts
- Anstieg der Wendetangente
- Schnittpunkt der Wendetangente mit der y-Achse

Resultat: N(0,508,0), H(2,10), T(4,6), W(3,8), t_W: $y = -3x + 17$

Graph (mit anderer ZOOM-Einstellung):



Beispiel: Umgekehrte Kurvendiskussion

Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt P(–3, 4) eine waagrechte Tangente, bei x = –2 einen Wendepunkt und bei x= –1 eine Nullstelle. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung:

Wir stellen die Polynomfunktion dritten Grads allgemein auf:

[F6] [ENTER] [ENTER] <Clear a-z>

[A] [×] [X] [^] [3] [+] [B] [×] [X] [^] [2] [+] [C] [×] [X] [+] [D]

[STO▸] [F] [(] [X] [)] [ENTER]

Nun legen wir die Bedingungen fest: Der Punkt P wird in die Punktfunktion f(x) eingesetzt:

[F] [(] [(-)] [3] [)] [=] [4] [ENTER]

Die waagrechte Tangente dort wird in die erste Ableitung eingesetzt:

[(] [2nd] [d] [F] [(] [X] [)] [,] [X] [,] [1] [)] [2nd] [|] [X] [=] [(-)] [3] [)] [=] [0] [ENTER]

Der Wendepunkt bei x= –2 wird in die zweite Ableitung eingesetzt:

[(] [2nd] [d] [F] [(] [X] [)] [,] [X] [,] [2] [)] [2nd] [|] [X] [=] [(-)] [2] [)] [=] [0] [ENTER]

Die Nullstelle wird in die Punktfunktion f(x) eingesetzt:

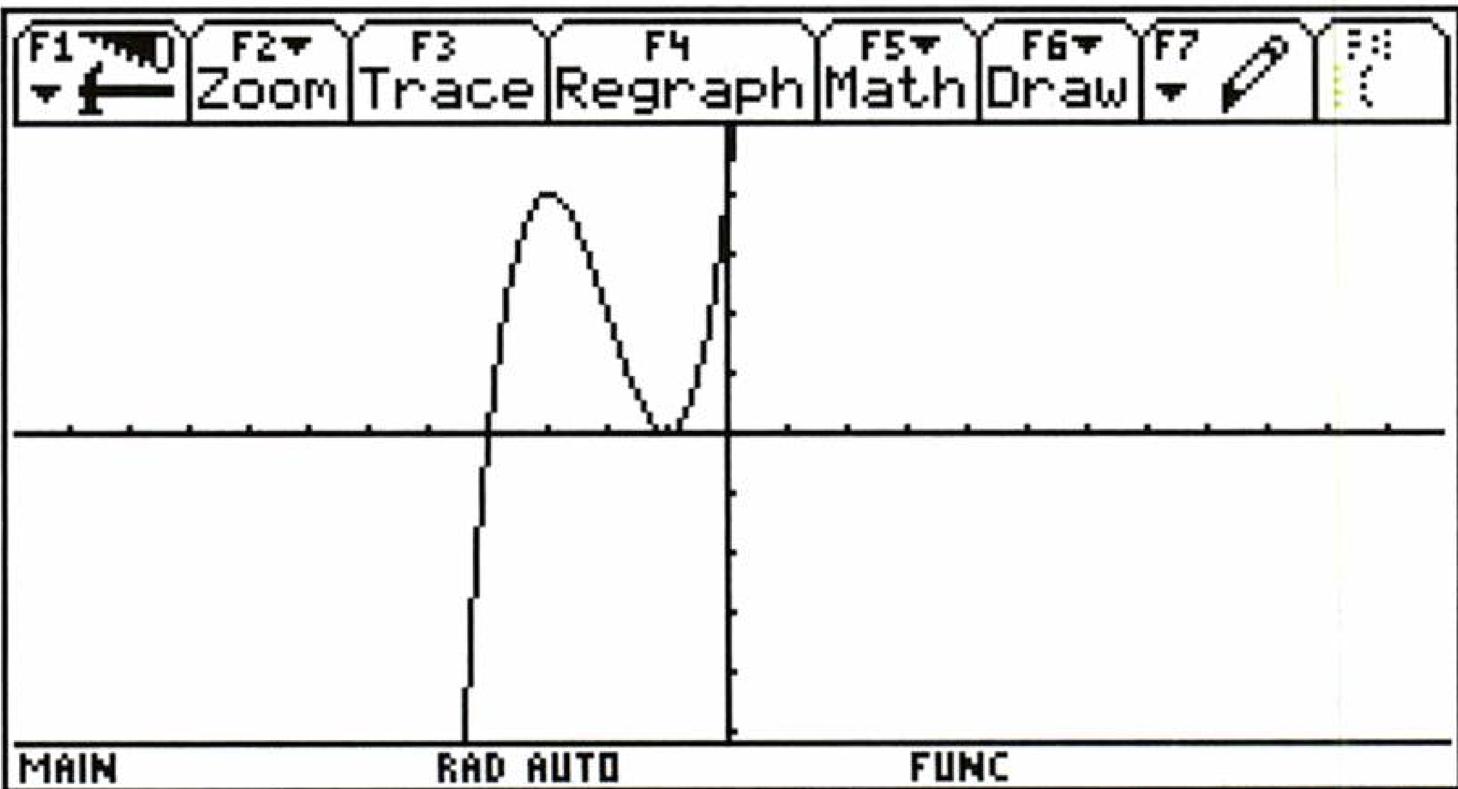
[F] [(] [(-)] [1] [)] [=] [0] [ENTER]

Das ergibt die nötigen Gleichungen. Die kann man nun koeffizientenweise in die Funktion **simult** oder **rref** einsetzen (TI-92) oder mit **and** verbunden in **solve** einsetzen (TI-92 Plus):

[R] [R] [E] [F] [(] [2nd] [[] [(-)] [2] [7] [,] [9] [,] [(-)] [3] [,] [1] [,] [4] [2nd] [;] [2] [7] [,] [(-)] [6] [,] [1] [,] [0] [,] [0] [2nd] [;] [(-)] [1] [2] [,] [2] [,] [0] [,] [0] [,] [0] [2nd] [;] [(-)] [1] [,] [1] [,] [(-)] [1] [,] [1] [,] [0] [2nd] []] [)] [ENTER]

[S] [O] [L] [V] [E] [(] [A] [N] [S] [(] [1] [)] [ ] [A] [N] [D] [ ] [A] [N] [S] [(] [2] [)] [ ] [A] [N] [D] [ ] [A] [N] [S] [(] [3] [)] [ ] [A] [N] [D] [ ] [A] [N] [S] [(] [4] [)] [,] [2nd] [{] [A] [,] [B] [,] [C] [,] [D] [2nd] [}] [)] [ENTER]

Den erhaltenen Term kann man auf y1(x) abspeichern und im [GRAPH]-Bildschirm ansehen:



Aufstellen der Polynomfunktion:

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up
■ a·x^3 + b·x^2 + c·x + d → f(x)                 Done
a*x^3+b*x^2+c*x+d→f(x)
MAIN     DEG AUTO     FUNC 1/30
```

Aufstellen des Gleichungssystems (sowohl TI-92 als auch TI-92 Plus, TI-89)

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up
■ f(-3) = 4                    -27·a + 9·b - 3·c + d = 4
■ (d/dx^1 (f(x)) | x = -3) = 0      27·a - 6·b + c = 0
■ (d^2/dx^2 (f(x)) | x = -2) = 0         2·b - 12·a = 0
■ f(-1) = 0                          -a + b - c + d = 0
f(-1)=0
MAIN     DEG AUTO     FUNC 5/30
```

Lösung mit dem TI-92:

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

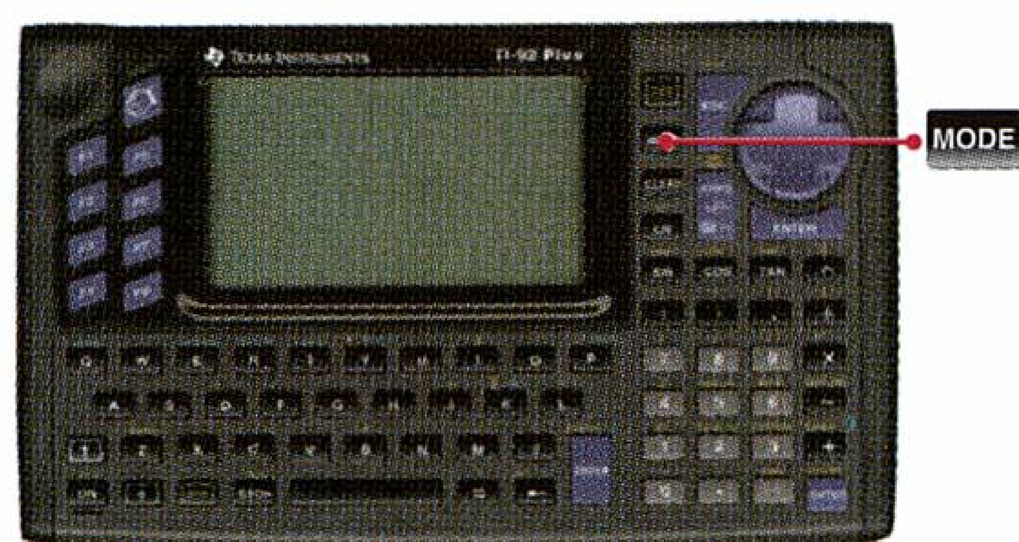
        ⎛⎡-27   9  -3  1  4⎤⎞   ⎡1 0 0 0 1⎤
■ rref  ⎜⎢ 27  -6   1  0  0⎥⎟   ⎢0 1 0 0 6⎥
        ⎜⎢-12   2   0  0  0⎥⎟   ⎢0 0 1 0 9⎥
        ⎝⎣ -1   1  -1  1  0⎦⎠   ⎣0 0 0 1 4⎦
…;27,-6,1,0,0;-12,2,0,0,0;-1,…
MAIN     DEG AUTO     FUNC 1/30
```

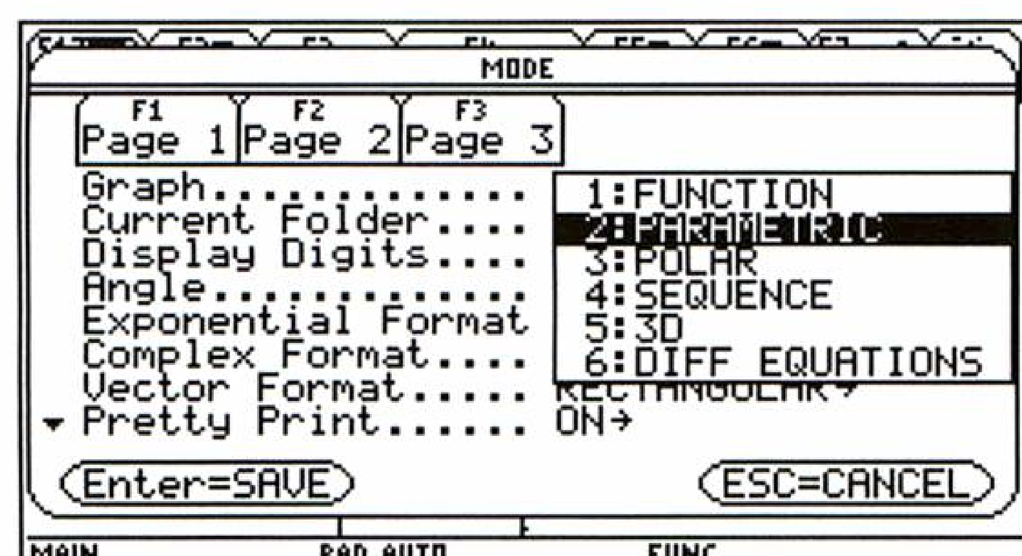
Lösung mit dem TI-92 Plus:

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up
■ (d/dx^1 (f(x)) | x = -3) = 0      27·a - 6·b + c = 0
■ (d^2/dx^2 (f(x)) | x = -2) = 0         2·b - 12·a = 0
■ f(-1) = 0                          -a + b - c + d = 0
■ solve(-a + b - c + d = 0 and 2·b - 12·a = 0 ▸
         a = 1 and b = 6 and c = 9 and d = 4
…ans(3) and ans(4),{a,b,c,d})
MAIN     RAD AUTO     FUNC 6/30
```

Abspeichern des Funktionsterm (sowohl TI-92 als auch TI-92 Plus, TI-89):

```
F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up
■ f(-1) = 0                          -a + b - c + d = 0
■ solve(-a + b - c + d = 0 and 2·b - 12·a = 0 ▸
         a = 1 and b = 6 and c = 9 and d = 4
■ f(x) | a = 1 and b = 6 and c = 9 and d = 4
                               x^3 + 6·x^2 + 9·x + 4
■ x^3 + 6·x^2 + 9·x + 4 → y1(x)                 Done
ans(1)→y1(x)
MAIN     RAD AUTO     FUNC 8/30
```





Beispiel: Parameterdarstellung von Kurven

a) Die Funktion $f{:}\,t \to \begin{cases} 8\cdot\cos^3(t) \\ 4\cdot\sin^3(t) \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ ist grafisch darzustellen.

b) Der Kurvenpunkt und die Steigung der Tangente an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{4}$ ist zu bestimmen.

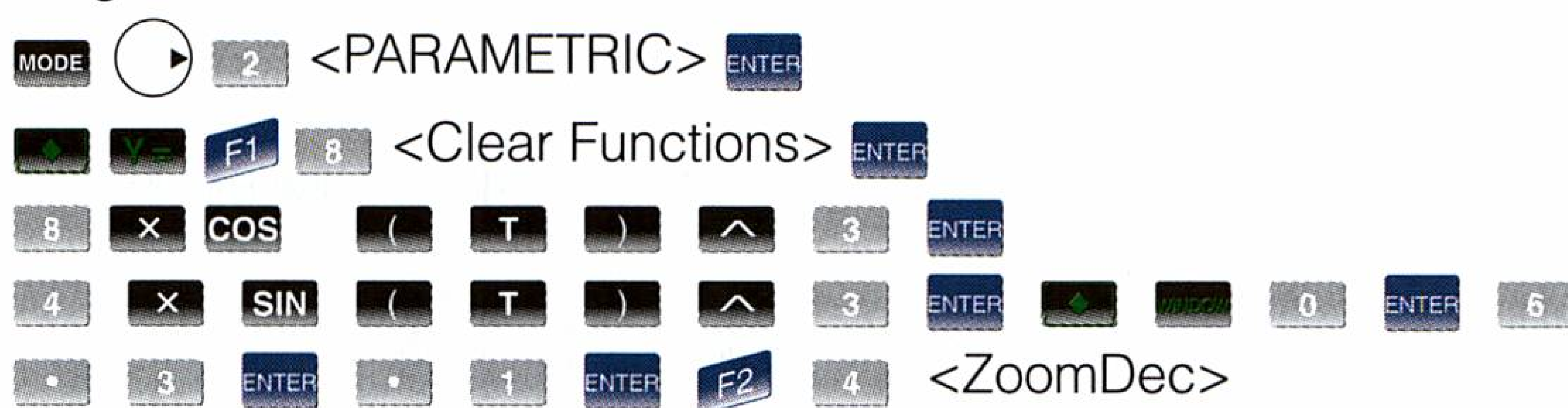
c) Die Bogenlänge zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = \frac{\pi}{2}$ ist zu bestimmen.

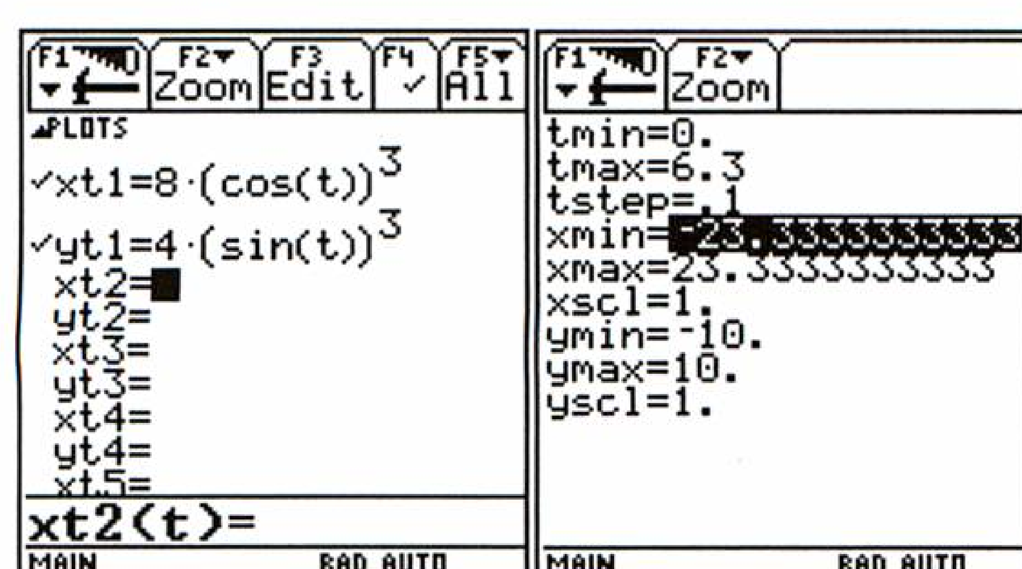
d) Die Fläche zwischen $t_0 = 0$ und 2π ist zu bestimmen.

Lösung:

a) Die Funktion wird im Y= Bildschirm eingegeben. Zuvor muss aber noch die MODE-Einstellung auf Graph ... **PARAMETRIC** geändert werden.

Eingabe:

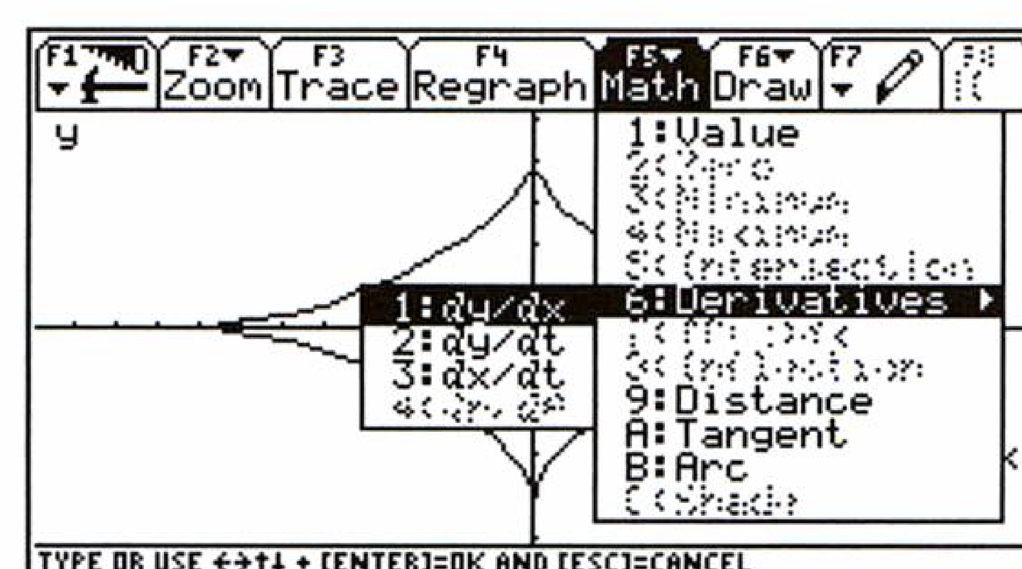


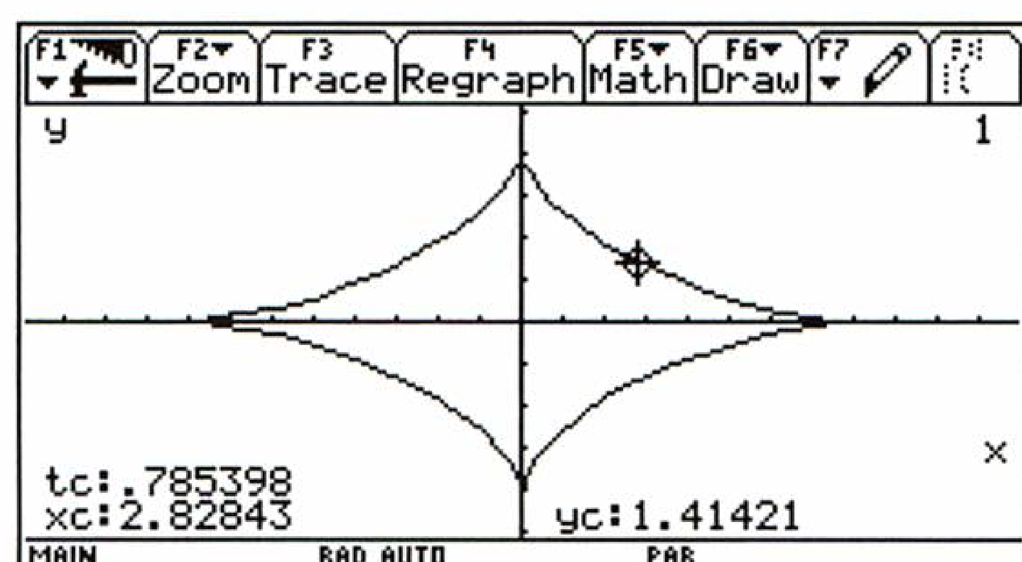


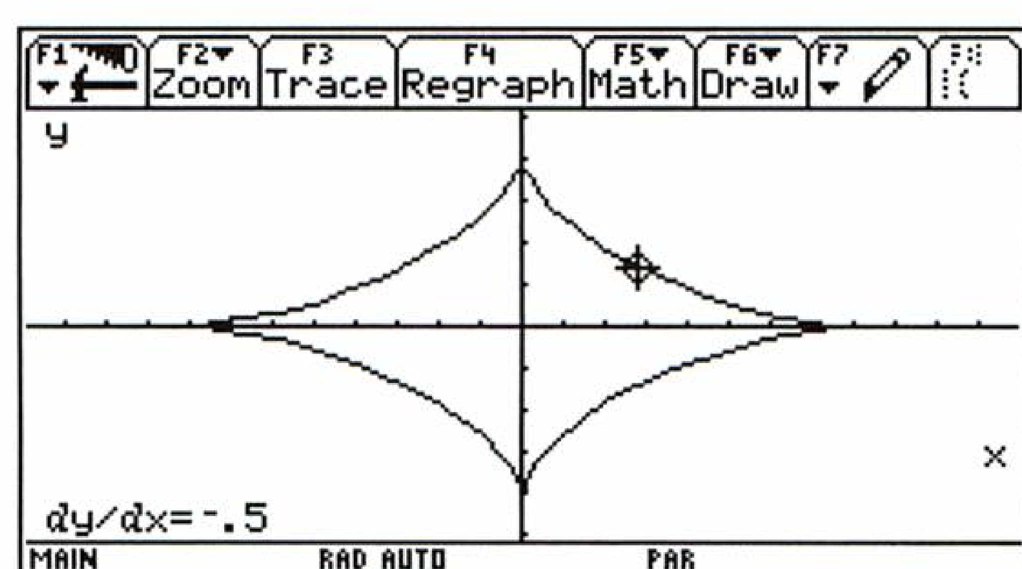
b) Zur Bestimmung des Kurvenpunkts rufen wir die TRACE-Funktion auf und geben $\frac{\pi}{4}$ ein. Dann bestimmen wir die Steigung mit Hilfe des MATH-Menüs, Unterpunkt: **Derivatives**.

Eingabe:







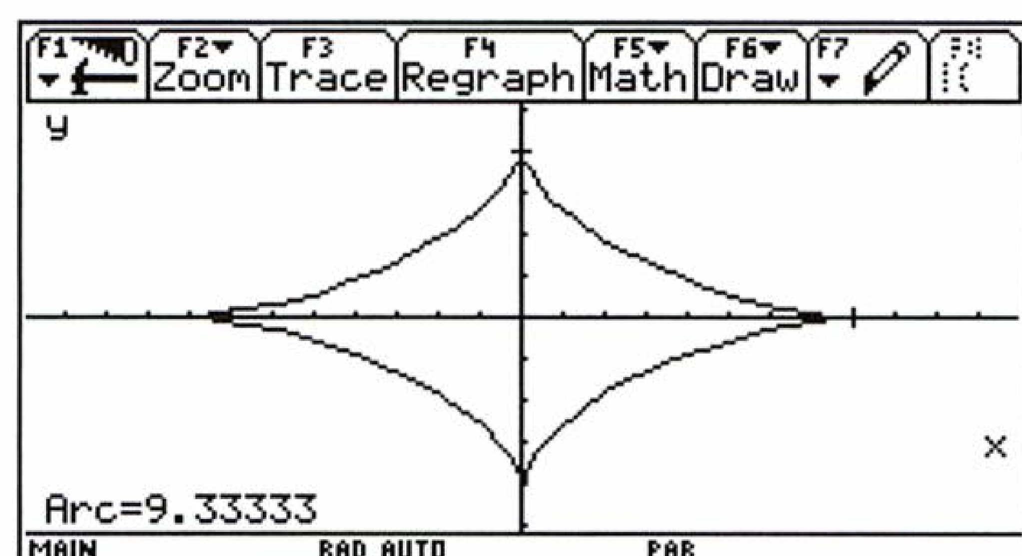


Ergebnis: Punkt P(2,82, 1,41) mit Steigung $k = -0{,}5$

c) Um die Bogenlänge zu bestimmen, rufen wir die Funktion ARC vom F5-Menü auf:

Eingabe:

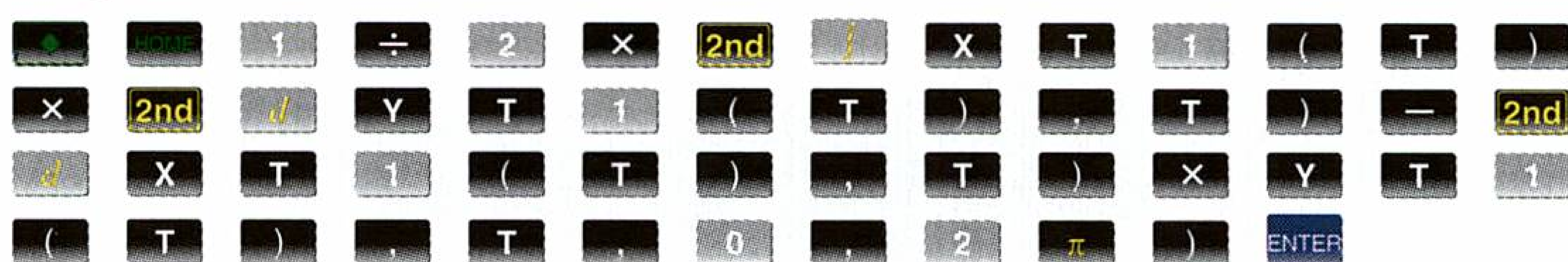


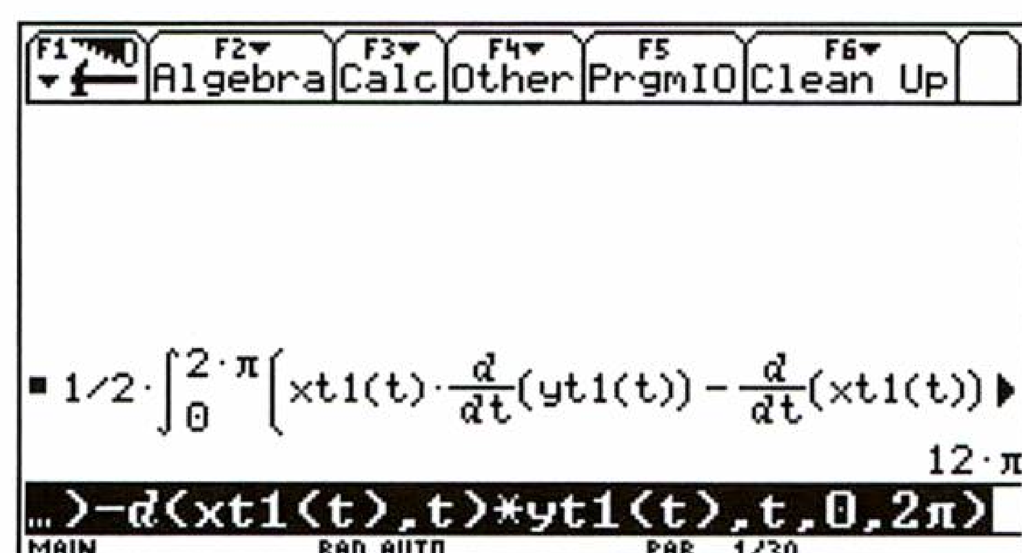


Ergebnis: Die Bogenlänge beträgt 9,33 Einheiten.

d) Die Fläche muss man im HOME-Bildschirm durch Eingabe der Flächenformel bestimmen:

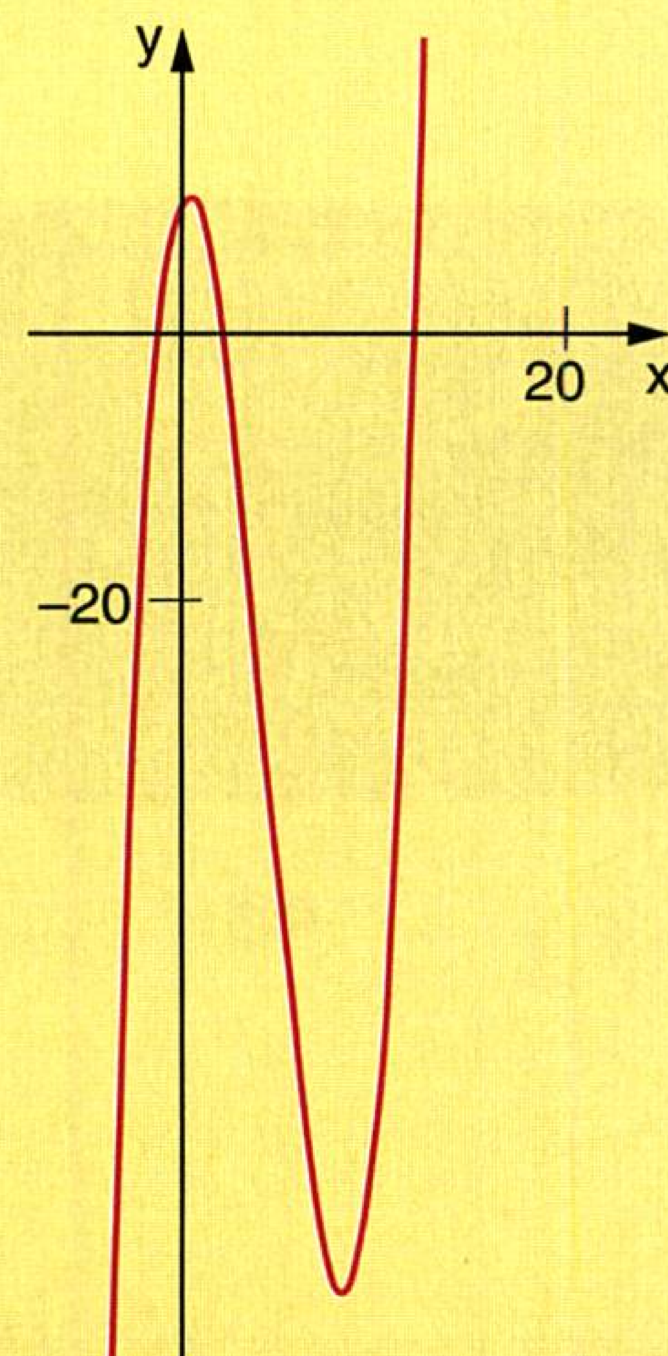
Eingabe:





Ergebnis: Die Fläche beträgt 12π Flächeneinheiten.

AUFGABEN



639. Man diskutiere die Funktion $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x$ (vgl. nebenstehende Abbildung) händisch und mit dem Text-Programm „t_kurvd".

Anleitung: Das Programm ist für die Funktion $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12$bestimmen bestimmen neu einzugeben.

640. Man diskutiere die Funktion $y = \frac{x^2}{3x-6}$ händisch und mit dem Text-Programm „t_kurvd.

Anleitung: Das Programm ist für die Funktion $y = \frac{x^2}{3x-6}$ neu einzugeben.

641. Man diskutiere die Funktion $y = e^x \cdot \sin(x)$ händisch und mit dem Text-Programm t_kurvd".

Anleitung: Das Programm ist für die Funktion $y = e^x \cdot \sin(x)$ neu einzugeben. Die auftretenden Variablen @n1, @n2, ... können durch k ersetzt werden (k als ganze Zahl). Die Wendetangente auf y2(x) muss gelöscht werden (Error: Undefined variable) oder man ersetzt die Variable @nx durch 1, 2, ...

642. Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt P(4, 48) den Anstieg 26. Ferner besitzt sie im Punkt (–2,0) einen Wendepunkt. Stellen Sie die Funktionsgleichung mit Hilfe des TI-92 bzw. TI-92 Plus auf!

643. Eine Polynomfunktion vierten Grads geht durch den Punkt P(–1, 9), hat in E(1,1) einen Extremwert und berührt die x-Achse an der Stelle $x_3 = 2$. Stellen Sie die Funktionsgleichung mit Hilfe des TI-92 bzw. TI-92 Plus auf!

644. a) Die Funktion ist f: $t \to \begin{cases} 8\cos t - \cos 4t \\ 8\sin t - \sin 4t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ grafisch darzustellen.

b) Der Kurvenpunkt und die Steigung der Tangente an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{2}$ ist zu bestimmen.

c) Die Bogenlänge zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = \frac{\pi}{2}$ ist zu bestimmen.

d) Die Fläche zwischen $t_0 = 0$ und 2π ist zu bestimmen.

645. a) Die Funktion ist f: $t \to \begin{cases} 10\cos t - 3\cos 5t \\ 10\sin t - 3\sin 5t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ grafisch darzustellen.

b) Der Kurvenpunkt und die Steigung der Tangente an der Stelle $t_0 = \frac{\pi}{4}$ ist zu bestimmen.

c) Die Bogenlänge zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = \frac{\pi}{2}$ ist zu bestimmen.

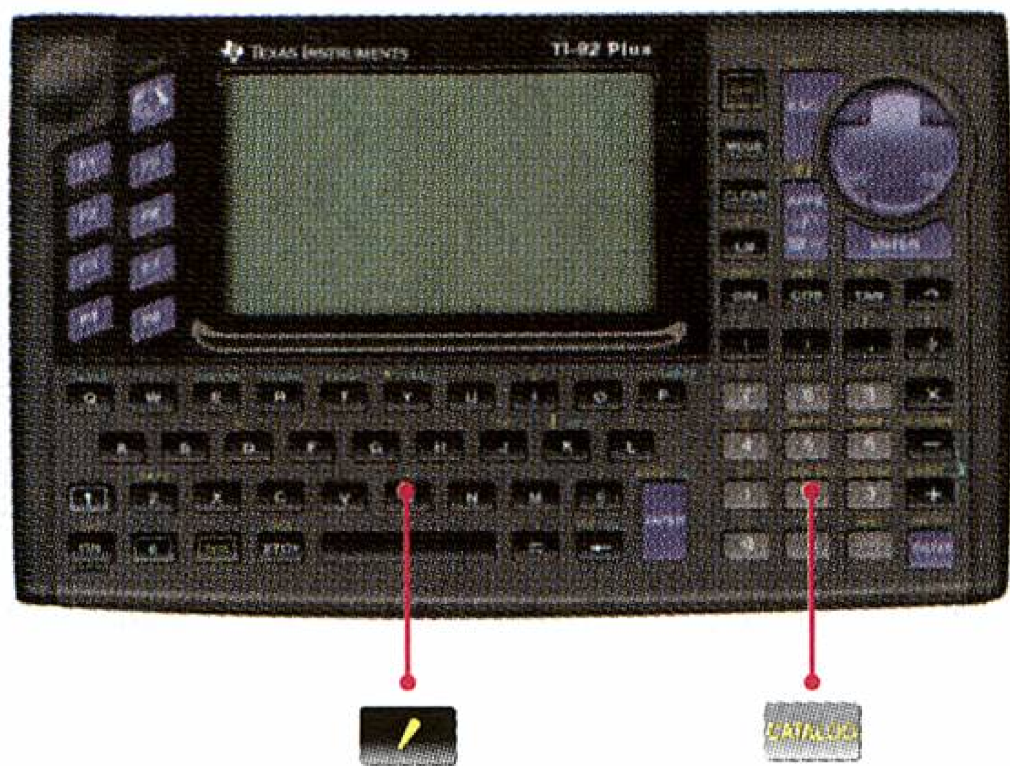
646. a) Die Funktion ist f: $t \to \begin{cases} t + \frac{1}{t} \\ t - \frac{1}{t} \end{cases}$ $0 < t < 8$ grafisch darzustellen.

b) Der Kurvenpunkt und die Steigung der Tangente an der Stelle $t_0 = 3$ ist zu bestimmen.

c) Die Bogenlänge zwischen $t_0 = 1$ und $t_1 = 7$ ist zu bestimmen.

7. Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen kann man nur mit dem TI-92 PLUS lösen. Dazu verwendet man die Funktion **deSolve**.



Beispiel:

Lösen Sie die Differenzialgleichung: $x\,y' - y = x^2 \cos x$

a) allgemein

b) mit der Anfangsbedingung: $y(1) = 0$ (partikuläre Lösung)

Bemerkung: Den Ableitungsstrich ['] erhält man mit 2nd B.

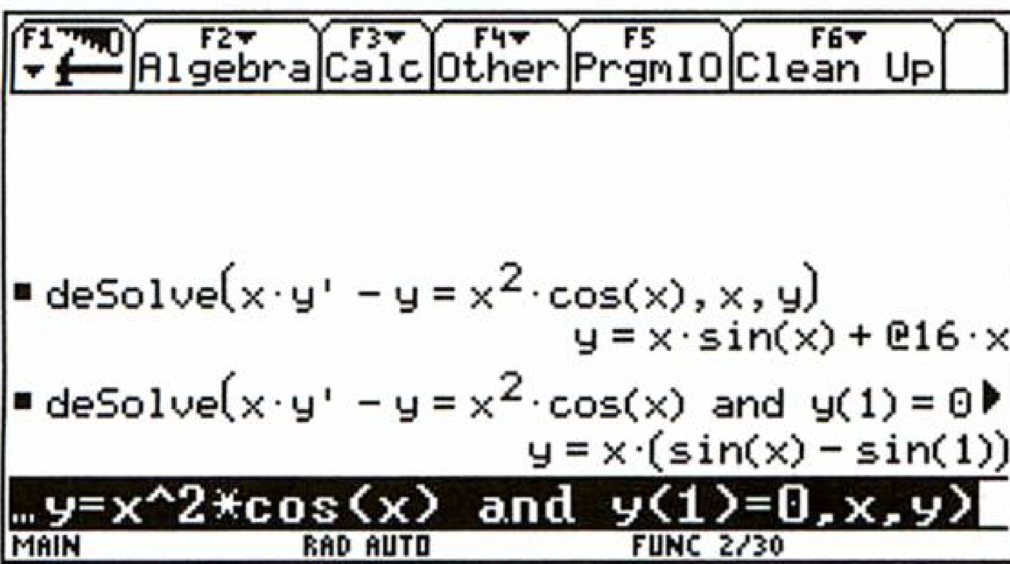
Lösung:

a) Eingabe:

2nd CATALOG D ⌄ … ⌄ <deSolve> ENTER

X × Y 2nd ′ − Y = X ^ × COS X) , X , Y) ENTER

Lösung: $y = x \sin x + C \cdot x$ (@16 steht für die Konstante C)



b) Eingabe:

2nd CATALOG <deSolve> ENTER X × Y 2nd ′ − Y =

X ^ 2 × COS X) SPACE A N D

SPACE Y (1) = 0 , X , Y) ENTER

Lösung: $y = x \cdot (\sin x - \sin 1)$

Beispiel:

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$

a) allgemein

b) für die Anfangsbedingungen: $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ und zeichnen Sie die Lösungskurve für Fall b)

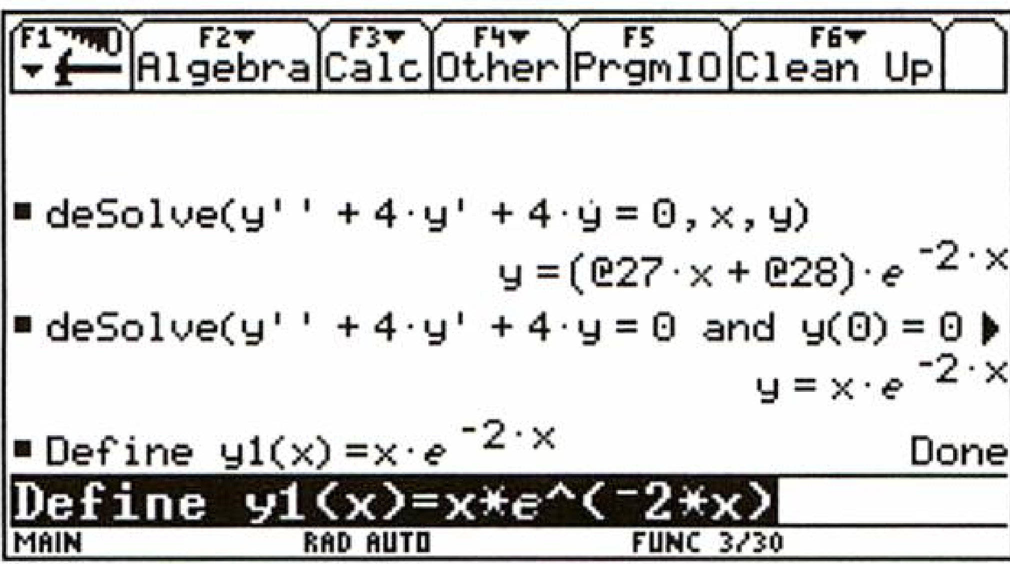
Lösung:

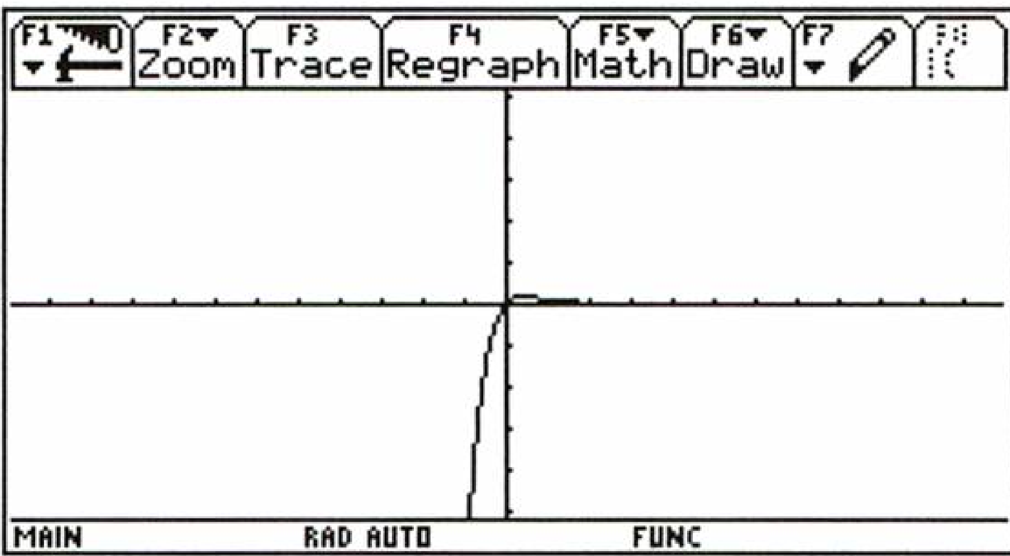
a) Eingabe:

2nd CATALOG D ⌄ … ⌄ <deSolve> ENTER Y 2nd ′ 2nd ′ + 4

Y 2nd ′ + 4 Y = 0 , X , Y) ENTER

Lösung: $y = (C \cdot x + D) \cdot e^{-2x}$





b) Eingabe:

2nd CATALOG <deSolve> ENTER Y 2nd ′ 2 ′ + 4 Y 2 ′ +

4 Y = 0 SPACE A N D SPACE Y (0) = 0

SPACE A N D SPACE Y 2nd ′ (0) = 1 , X

, Y) ENTER F4 ENTER <Define> ↑ ENTER ← ← ← ← ← ←

← ← ← ← 1 (X) ENTER ◆ GRAPH F2 4 <ZoomDec>

Lösung: $y = x \cdot e^{-2x}$

AUFGABEN

647. Lösen Sie die Differenzialgleichung $y' - \frac{4y}{x} - x\sqrt{y} = 0$ mit der **deSolve**-Funktion **a)** allgemein **b)** mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

648. Lösen Sie die Differenzialgleichung $6y'' + y' + 8y = 0$ **a)** allgemein **b)** für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ und zeichnen Sie die Lösungskurve für Fall **b)**.

8. Funktionenreihen

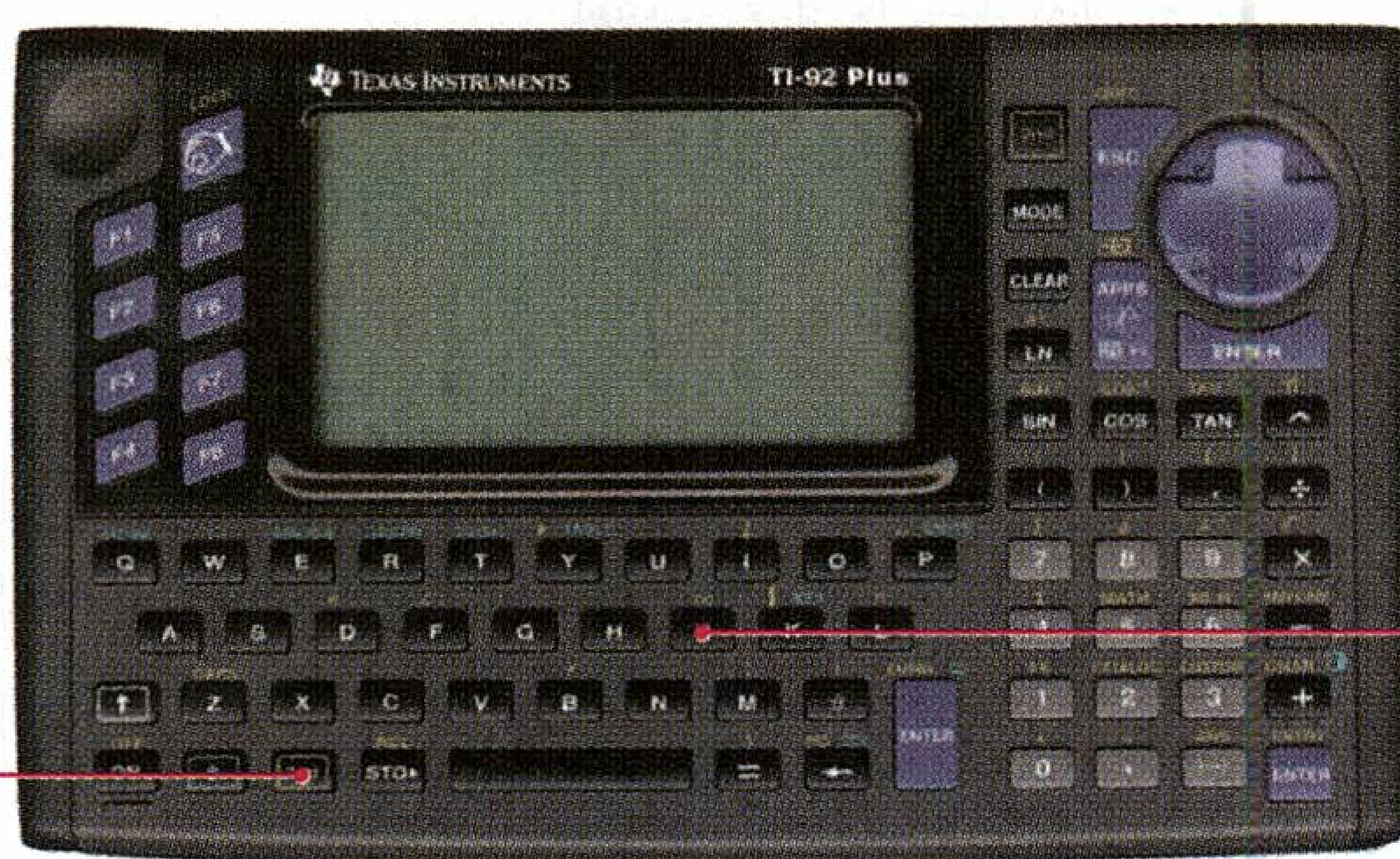
Das wichtigste Werkzeug für Funktionenreihen sind die Summen (Σ). Dazu zeigen wir ein Beispiel. Danach stellen wir die Verwendung der **taylor**-Funktion vor. Für die Erstellung von Fourierreihen muss man eine selbstdefinierte Funktion **fourier** eingeben.

Beispiel:

Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit Hilfe der Summenfunktion.

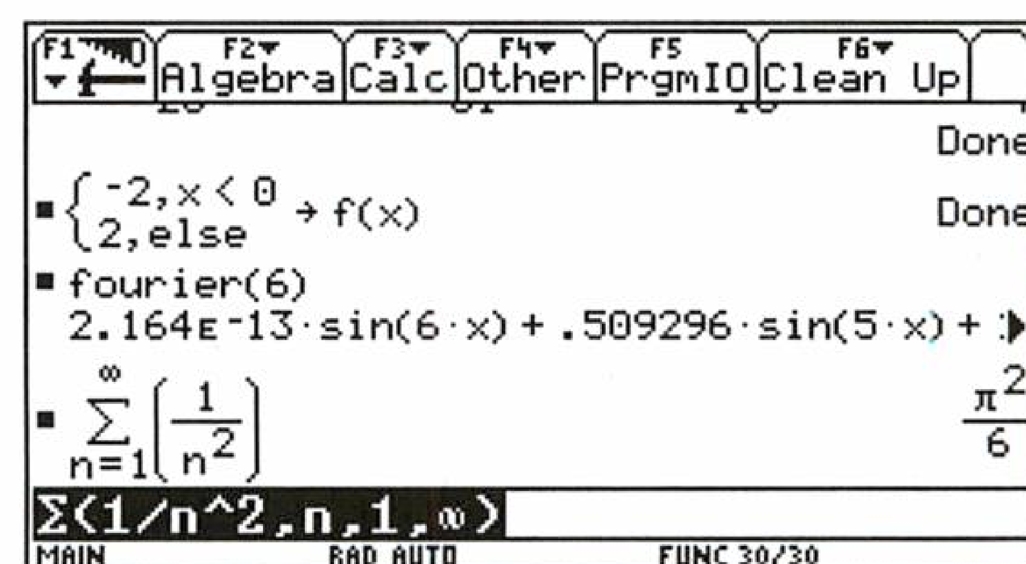
Lösung:

Eingabe:



2nd Σ (1 ÷ N ^ 2 , N , 1 , 2nd ∞) ENTER

Ergebnis: $\frac{\pi^2}{6}$



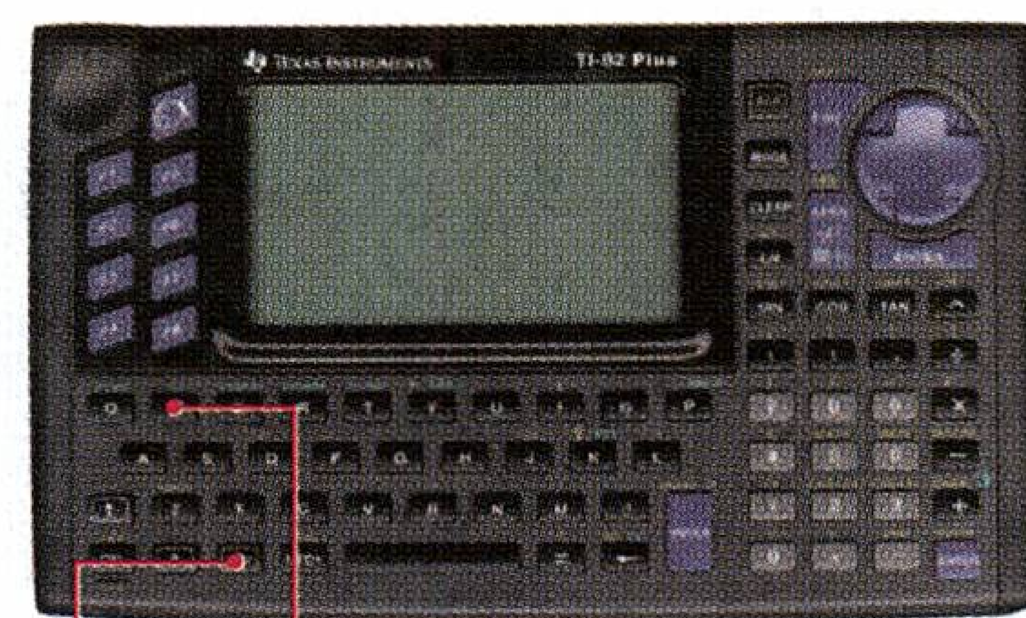
Beispiel:

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums und berechnen Sie wenn möglich die Summe der unendlichen Reihe.

Lösung:

Wir müssen den Quotienten des n + 1-ten Folgengliedes durch das n-te Folgenglied aufstellen: $\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}}$ und dessen Limes berechnen.

Ist dieser kleiner als 1, so konvergiert die Reihe.

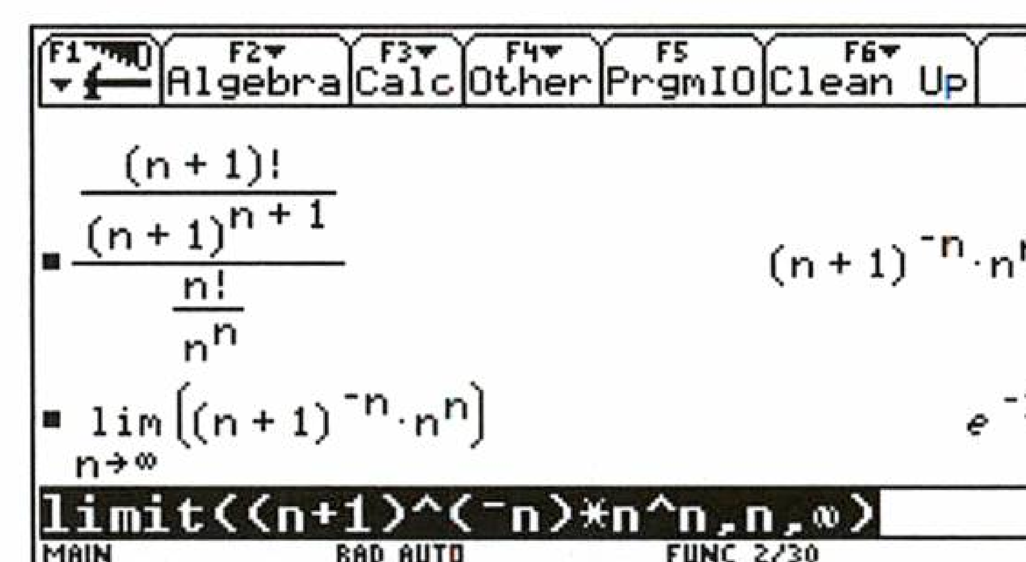


2nd W ergibt das Rufzeichen: !

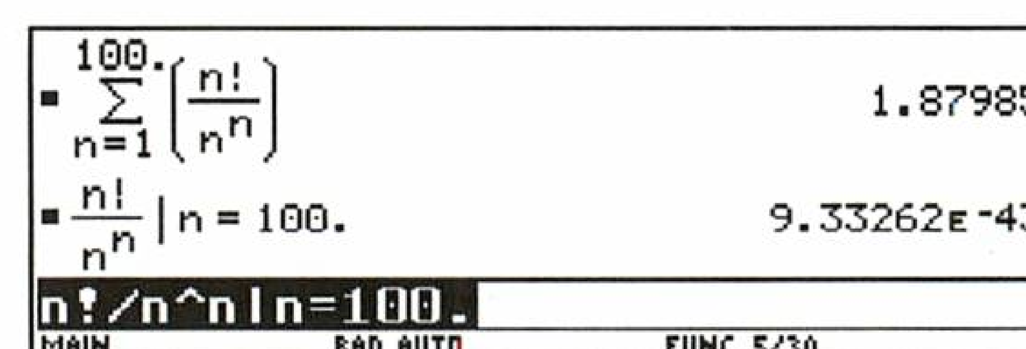
Eingabe:

((N + 1) 2nd W ÷ (N + 1) ^ (N + 1)) ÷ (N 2nd W ÷ N ^ N) ENTER

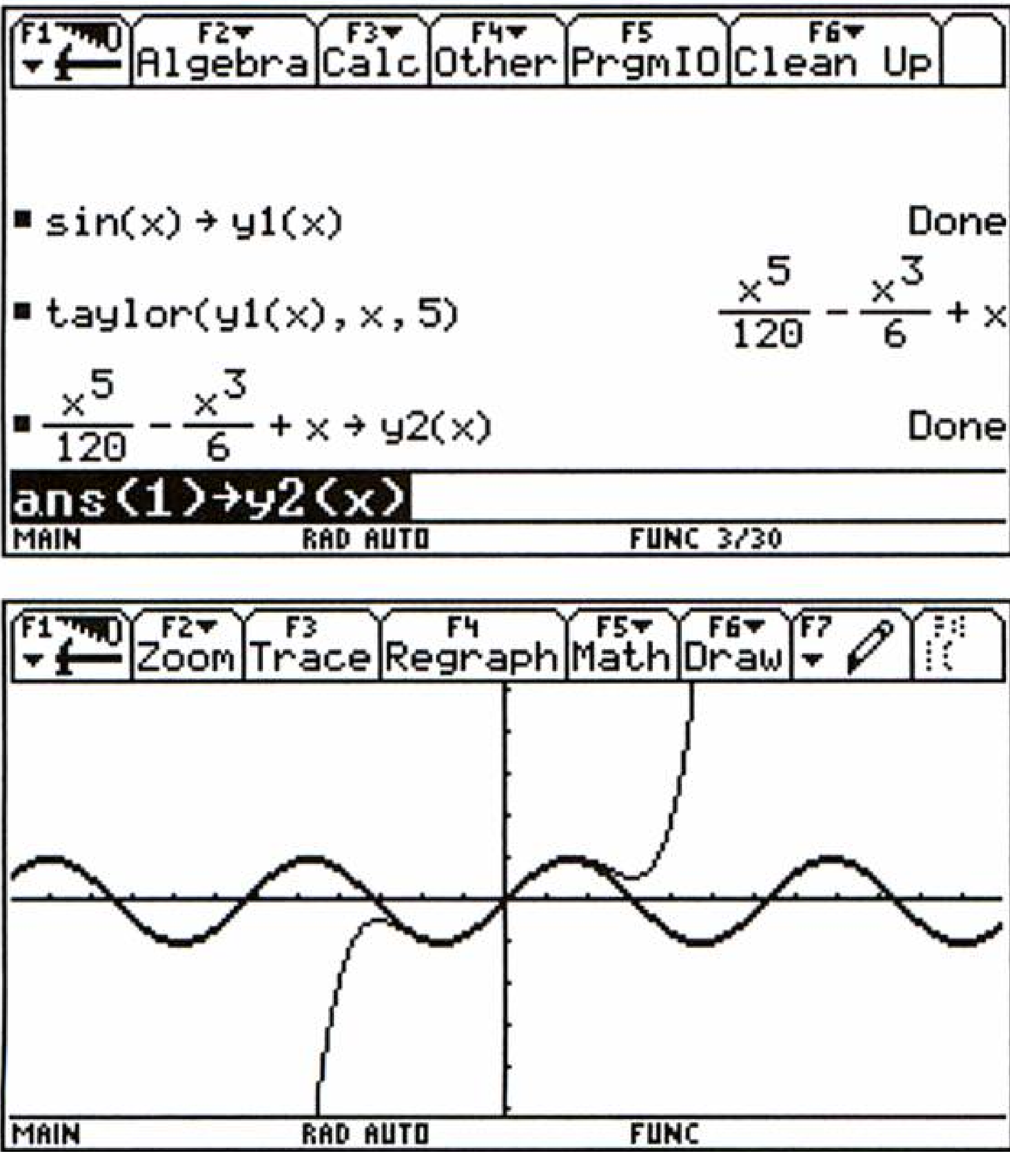
F3 3 <limit> ↑ ENTER) ENTER



Ergebnis: Der limes ist e^{-1} und das ist kleiner als 1, also ist diese Reihe **konvergent**. Der TI-92 liefert allerdings keine Lösung für die unendliche Reihe, nur für die endliche Reihe bis n = 100, was aber ein ausreichender Näherungswert ist, da das Folgenglied für n = 100 schon ungefähr 10^{-42} ist!



Die Winkeleinstellung muss hier auf RAD stehen!



Beispiel:
Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe mit dem 5. Grad für f(x) = sin x an der Stelle 0 und zeichnen Sie beide Funktionen am TI-92 bzw. TI-92 Plus.

Lösung:
Wir speichern die Sinusfunktion auf y1(x) ab und berechnen mit der taylor-Funktion die TAYLOR-Reihe und speichern sie auf y2(x) ab.

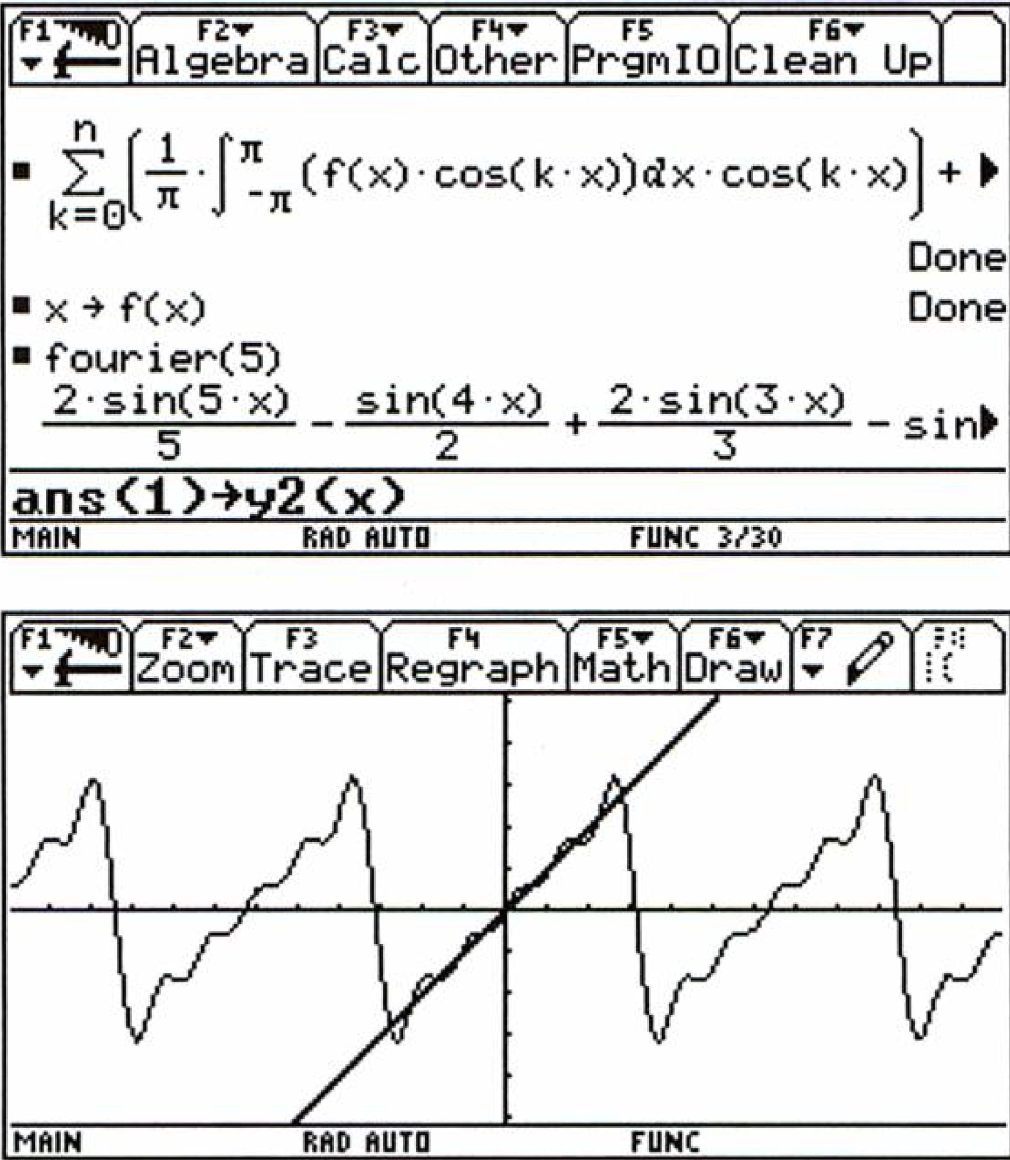
Eingabe:

MODE ↓ ↓ ↓ → 1 ENTER <MODE Angle...RADIAN> S I N
(X) STO▸ Y 1 (X) ENTER
F3 9 <taylor> Y 1 (X)
, X , 5) ENTER STO▸ Y 2 (
X) ENTER ◆ Y= ↑ ... ↓ Y 1
F6 4 <Thick> F2 4 <ZoomDec>

Ergebnis: Die TAYLOR-Reihe ist $y2(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$

Die beiden Funktionen sind im Bereich [–2,2] fast identisch.

Die Winkeleinstellung muss hier auf RAD stehen!



Beispiel:
Die periodische Funktion f(x) = x, $-\pi < x < \pi$ ist in eine FOURIER-Reihe für n = 5 zu entwickeln und im TI-92 grafisch darzustellen.

Lösung:
Zuerst müssen wir die **fourier**-Funktion eingeben und dann die Funktion f(x). Mit dem Aufruf **fourier**(5) kann man die FOURIER-Reihe erhalten.

Eingabe:

MODE ↓ ↓ ↓ → 1 ENTER <MODE Angle...RADIAN> 2nd Σ (
1 ÷ π × 2nd ∫ F (X) × COS K × X) ,
X , (-) π , π) × COS K × X) , K , 0
, N) + 2nd Σ (1 ÷ π × 2nd ∫ F (X)
× SIN K × X) , X , (-) π , π) × SIN K
× X) , K , 1 , N) STO▸ F O U R I E
R (N) ENTER X STO▸ F (X) ENTER F O U R I
E R (5) ENTER STO▸ Y 2 (X) ENTER F (X)
STO▸ Y 1 (X) ENTER ◆ Y= ↑ ... ↓ <y1> F6 4 <Thick>
F2 4 <ZoomDec>

Ergebnis: $fourier(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{2\sin 5x}{5}$

AUFGABEN

649. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ mit Hilfe der Summenfunktion.

650. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums und berechnen Sie mit dem TI-92 bzw. TI-92 Plus die Summe der Reihe **a)** bis n=100 **b)** bis n = 200.

651. Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe mit dem 4. und 6. Grad für $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ an der Stelle 0 und zeichnen Sie alle drei Funktionen am TI-92 bzw. TI-92 Plus.

652. Die periodische Funktion $f(x) = \frac{x^3}{9}$, $-\pi < x < \pi$ ist in eine FOURIER-Reihe für n = 5 zu entwickeln und im TI-92 bzw. TI-92 Plus grafisch darzustellen.

ZUSAMMENSTELLUNG WICHTIGER FORMELN

Formeln der Trigonometrie unter besonderer Berücksichtigung der Integralrechnung

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$

$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$

$\sin n\pi = 0 \quad \cos n\pi = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\sin(n\pi - na) = (-1)^{n+1} \sin na$

Periodische Funktionen:

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt **periodisch** mit der **Periode p**, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$f(x) = f(x+p)$ mit $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
und $x + p \in \mathbb{D}$.

Für diese gilt:

$$\int_0^p f(x)\,dx = \int_a^{p+a} f(x)\,dx$$

Die Summe zweier periodischer Funktionen ergibt wieder eine periodische Funktion.

Eine Funktion f(x) heißt **gerade**, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\mathbf{f(-x) = f(x)}$, sie heißt **ungerade**, wenn gilt $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$. Das Produkt zweier gerader Funktionen und das Produkt zweier ungerader Funktionen ergibt jeweils eine gerade Funktion. Das Produkt von gerader und ungerader Funktion ergibt eine ungerade Funktion.

Es gilt für eine

gerade Funktion	**ungerade Funktion**
$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$	$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
$\int_{-a}^{a} f(x) \sin nx\,dx = 0$	$\int_{-a}^{a} f(x) \cos nx\,dx = 0$

FOURIER-Reihendarstellung einer periodischen Funktion mit der Periode $p = 2\pi$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

NORMALVERTEILUNGSTABELLE

k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)
0,01	0,50399	0,51	0,69497	1,01	0,84375	1,51	0,93448
0,02	0,50798	0,52	0,69847	1,02	0,84614	1,52	0,93574
0,03	0,51197	0,53	0,70194	1,03	0,84849	1,53	0,93699
0,04	0,51595	0,54	0,70540	1,04	0,85083	1,54	0,93822
0,05	0,51994	0,55	0,70884	1,05	0,85314	1,55	0,93943
0,06	0,52392	0,56	0,71226	1,06	0,85543	1,56	0,94062
0,07	0,52790	0,57	0,71566	1,07	0,85769	1,57	0,94179
0,08	0,53188	0,58	0,71904	1,08	0,85993	1,58	0,94295
0,09	0,53586	0,59	0,72240	1,09	0,86214	1,59	0,94408
0,10	0,53983	0,60	0,72575	1,10	0,86433	1,60	0,94520
0,11	0,54380	0,61	0,72907	1,11	0,86650	1,61	0,94630
0,12	0,54776	0,62	0,73237	1,12	0,86864	1,62	0,94738
0,13	0,55172	0,63	0,73565	1,13	0,87076	1,63	0,94845
0,14	0,55567	0,64	0,73891	1,14	0,87286	1,64	0,94950
0,15	0,55962	0,65	0,74215	1,15	0,87493	1,65	0,95053
0,16	0,56356	0,66	0,74537	1,16	0,87698	1,66	0,95154
0,17	0,56749	0,67	0,74857	1,17	0,87900	1,67	0,95254
0,18	0,57142	0,68	0,75175	1,18	0,88100	1,68	0,95352
0,19	0,57535	0,69	0,75490	1,19	0,88298	1,69	0,95449
0,20	0,57926	0,70	0,75804	1,20	0,88493	1,70	0,95543
0,21	0,58317	0,71	0,76115	1,21	0,88686	1,71	0,95637
0,22	0,58706	0,72	0,76424	1,22	0,88877	1,72	0,95728
0,23	0,59095	0,73	0,76730	1,23	0,89065	1,73	0,95818
0,24	0,59483	0,74	0,77035	1,24	0,89251	1,74	0,95907
0,25	0,59871	0,75	0,77337	1,25	0,89435	1,75	0,95994
0,26	0,60257	0,76	0,77637	1,26	0,89617	1,76	0,96080
0,27	0,60642	0,77	0,77935	1,27	0,89796	1,77	0,96164
0,28	0,61026	0,78	0,78230	1,28	0,89973	1,78	0,96246
0,29	0,61409	0,79	0,78524	1,29	0,90147	1,79	0,96327
0,30	0,61791	0,80	0,78814	1,30	0,90320	1,80	0,96407
0,31	0,62172	0,81	0,79103	1,31	0,90490	1,81	0,96485
0,32	0,62552	0,82	0,79389	1,32	0,90658	1,82	0,96562
0,33	0,62930	0,83	0,79673	1,33	0,90824	1,83	0,96638
0,34	0,63307	0,84	0,79955	1,34	0,90988	1,84	0,96712
0,35	0,63683	0,85	0,80234	1,35	0,91149	1,85	0,96784
0,36	0,64058	0,86	0,80511	1,36	0,91309	1,86	0,96856
0,37	0,64431	0,87	0,80785	1,37	0,91466	1,87	0,96926
0,38	0,64803	0,88	0,81057	1,38	0,91621	1,88	0,96995
0,39	0,65173	0,89	0,81327	1,39	0,91774	1,89	0,97062
0,40	0,65542	0,90	0,81594	1,40	0,91924	1,90	0,97128
0,41	0,65910	0,91	0,81859	1,41	0,92073	1,91	0,97193
0,42	0,66276	0,92	0,82121	1,42	0,92220	1,92	0,97257
0,43	0,66640	0,93	0,82381	1,43	0,92364	1,93	0,97320
0,44	0,67003	0,94	0,82639	1,44	0,92507	1,94	0,97381
0,45	0,67364	0,95	0,82894	1,45	0,92647	1,95	0,97441
0,46	0,67724	0,96	0,83147	1,46	0,92785	1,96	0,97500
0,47	0,68082	0,97	0,83398	1,47	0,92922	1,97	0,97558
0,48	0,68439	0,98	0,83646	1,48	0,93056	1,98	0,97615
0,49	0,68793	0,99	0,83891	1,49	0,93189	1,99	0,97670
0,50	0,69146	1,00	0,84134	1,50	0,93319	2,00	0,97725

NORMALVERTEILUNGSTABELLE

k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)
2,01	0,97778	2,51	0,99396	3,01	0,99869	3,51	0,99978
2,02	0,97831	2,52	0,99413	3,02	0,99874	3,52	0,99978
2,03	0,97882	2,53	0,99430	3,03	0,99878	3,53	0,99979
2,04	0,97932	2,54	0,99446	3,04	0,99882	3,54	0,99980
2,05	0,97982	2,55	0,99461	3,05	0,99886	3,55	0,99981
2,06	0,98030	2,56	0,99477	3,06	0,99889	3,56	0,99981
2,07	0,98077	2,57	0,99492	3,07	0,99893	3,57	0,99982
2,08	0,98124	2,58	0,99506	3,08	0,99896	3,58	0,99983
2,09	0,98169	2,59	0,99520	3,09	0,99900	3,59	0,99983
2,10	0,98214	2,60	0,99534	3,10	0,99903	3,60	0,99984
2,11	0,98257	2,61	0,99547	3,11	0,99906	3,61	0,99985
2,12	0,98300	2,62	0,99560	3,12	0,99910	3,62	0,99985
2,13	0,98341	2,63	0,99573	3,13	0,99913	3,63	0,99986
2,14	0,98382	2,64	0,99585	3,14	0,99916	3,64	0,99986
2,15	0,98422	2,65	0,99598	3,15	0,99918	3,65	0,99987
2,16	0,98461	2,66	0,99609	3,16	0,99921	3,66	0,99987
2,17	0,98500	2,67	0,99621	3,17	0,99924	3,67	0,99988
2,18	0,98537	2,68	0,99632	3,18	0,99926	3,68	0,99988
2,19	0,98574	2,69	0,99643	3,19	0,99929	3,69	0,99989
2,20	0,98610	2,70	0,99653	3,20	0,99931	3,70	0,99989
2,21	0,98645	2,71	0,99664	3,21	0,99934	3,71	0,99990
2,22	0,98679	2,72	0,99674	3,22	0,99936	3,72	0,99990
2,23	0,98713	2,73	0,99683	3,23	0,99938	3,73	0,99990
2,24	0,98745	2,74	0,99693	3,24	0,99940	3,74	0,99991
2,25	0,98778	2,75	0,99702	3,25	0,99942	3,75	0,99991
2,26	0,98809	2,76	0,99711	3,26	0,99944	3,76	0,99992
2,27	0,98840	2,77	0,99720	3,27	0,99946	3,77	0,99992
2,28	0,98870	2,78	0,99728	3,28	0,99948	3,78	0,99992
2,29	0,98899	2,79	0,99736	3,29	0,99950	3,79	0,99992
2,30	0,98928	2,80	0,99744	3,30	0,99952	3,80	0,99993
2,31	0,98956	2,81	0,99752	3,31	0,99953	3,81	0,99993
2,32	0,98983	2,82	0,99760	3,32	0,99955	3,82	0,99993
2,33	0,99010	2,83	0,99767	3,33	0,99957	3,83	0,99994
2,34	0,99036	2,84	0,99774	3,34	0,99958	3,84	0,99994
2,35	0,99061	2,85	0,99781	3,35	0,99960	3,85	0,99994
2,36	0,99086	2,86	0,99788	3,36	0,99961	3,86	0,99994
2,37	0,99111	2,87	0,99795	3,37	0,99962	3,87	0,99995
2,38	0,99134	2,88	0,99801	3,38	0,99964	3,88	0,99995
2,39	0,99158	2,89	0,99807	3,39	0,99965	3,89	0,99995
2,40	0,99180	2,90	0,99813	3,40	0,99966	3,90	0,99995
2,41	0,99202	2,91	0,99819	3,41	0,99968	3,91	0,99995
2,42	0,99224	2,92	0,99825	3,42	0,99969	3,92	0,99996
2,43	0,99245	2,93	0,99831	3,43	0,99970	3,93	0,99996
2,44	0,99266	2,94	0,99836	3,44	0,99971	2,94	0,99996
2,45	0,99286	2,95	0,99841	3,45	0,99972	3,95	0,99996
2,46	0,99305	2,96	0,99846	3,46	0,99973	3,96	0,99996
2,47	0,99324	2,97	0,99851	3,47	0,99974	3,97	0,99996
2,48	0,99343	2,98	0,99856	3,48	0,99975	3,98	0,99997
2,49	0,99361	2,99	0,99861	3,49	0,99976	3,99	0,99997
2,50	0,99379	3,00	0,99865	3,50	0,99977	4,00	0,99997

SACHWORTVERZEICHNIS

A

B

C

D

M

N

O

P

U

V

W

X

Y

Z